

ΗΛΙΑ Β. ΝΤΖΙΩΡΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

# αλγεβρα

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ



ΑΛΓΕΒΡΑ

Η. Β. ΝΤΖΙΩΡΑ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ ΑΘΗΝΑ 1979



Τις πιο σημαντικές  
αφ' ους τις αλλαγές  
αυ γινώσκω  
ας γνωρίζετε  
ας ενημερωθείτε  
ας ενημερωθείτε  
ας ενημερωθείτε

αφ' ους τις αλλαγές  
ας ενημερωθείτε  
ας ενημερωθείτε  
ας ενημερωθείτε

17-5-1988

17-5-1988

Ηλ

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Α Λ Γ Ε Β Ρ Α

ΗΛΙΑ Β. ΝΤΖΙΩΡΑ

«η  
α  
πά

Η τ

ρ και  
όπως  
νουμε  
μηση

ΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ  
ΑΘΗΝΑ 1979



## ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

### ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΟΥ ΠΕΑΝΟ - ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

#### \* ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

#### ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΤΑ ΣΥΝΟΛΑ

#### ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΕΙΣ

Σκοπός αυτού του Κεφαλαίου είναι να επαναλάβουμε τις πιο βασικές έννοιες από τη Μαθηματική προτασιακή Λογική και τα Σύνολα, που μάθαμε στην προηγούμενη τάξη, και να διευκρινίσουμε τη σημασία των λογικών λέξεων και συμβόλων, τα όποια πρόκειται να χρησιμοποιήσουμε παρακάτω, ώστε οι όρισμοί και οι προτάσεις που υπάρχουν σ' αυτό τό βιβλίο να μπορούν να διατυπωθούν με συντομία και με σαφήνεια.

**§ 1. Προτασιακοί τύποι - Προτάσεις.**— Οι έννοιες: *προτασιακός τύπος*, *πρόταση* μās είναι γνωστές από την προηγούμενη τάξη. Έκεϊ μάθαμε ότι: Μία μαθηματική έκφραση που περιέχει ένα σύμβολο  $x$  τη λέμε *προτασιακό τύπο της μεταβλητής  $x$*  και την παριστάνουμε με  $p(x)$ . "Αν τώρα στον προτασιακό τύπο  $p(x)$  αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή (*ακαθόριστο σύμβολο*)  $x$  με μία συγκεκριμένη έννοια, έστω  $\lambda$ , τότε την έκφραση που θα προκύψει τη λέμε *λογική πρόταση* ή απλώς *πρόταση* και την παριστάνουμε με  $p(\lambda)$  ή απλούστερα με  $p$ .

Στά μαθηματικά και γενικά στη λογική (κλασική λογική) με τον όρο «*πρόταση*» έννοούμε μία έκφραση με αυτοτελές νόημα, ή όποια επιδέχεται έναν *ακριβώς* από τους δύο χαρακτηρισμούς: «*αληθής*», «*ψευδής*» και με την ίδια πάντοτε σημασία.

**Παράδειγμα.** "Εστω ο προτασιακός τύπος:

$p(x)$ : «*ο  $x$  είναι άρτιος αριθμός*».

"Η πρόταση:

$p(2)$ : «*ο 2 είναι άρτιος αριθμός*» είναι *αληθής*, ενώ η πρόταση:

$p(3)$ : «*ο 3 είναι άρτιος αριθμός*» είναι *ψευδής*.

Οι χαρακτηρισμοί *αληθής*, *ψευδής* λέγονται *τιμές αλήθειας* της προτάσεως  $p$  και συμβολίζονται με  $\alpha, \psi$  αντίστοιχως. Τις διάφορες (λογικές) προτάσεις, όπως ξέρουμε και από τα μαθήματα της προηγούμενης τάξεως, τις παριστάνουμε γενικά με μικρά γράμματα του λατινικού αλφαβήτου και κατά προτίμηση με  $p, q, r, \dots$



Όταν τό περιεχόμενο μιᾶς προτάσεως  $p$  είναι ἀληθές, τότε λέμε ὅτι ἡ πρόταση ἔχει **τιμὴ ἀλήθειας**  $\alpha$  καὶ γράφουμε  $\tau(p) = \alpha$ , ἐνῶ ὅταν τό περιεχόμενο τῆς  $p$  είναι ψευδές, τότε λέμε ὅτι ἡ  $p$  ἔχει **τιμὴ ἀλήθειας**  $\psi$  καὶ γράφουμε  $\tau(p) = \psi$ . Ὡστε:

$$\tau(p) \stackrel{\text{ορσ}}{=} \begin{cases} \alpha, & \text{ἂν } p \text{ ἀληθής} \\ \psi, & \text{ἂν } p \text{ ψευδής.} \end{cases}$$

Ἡ συγκεκριμένη ἔννοια  $\lambda$ , μέ τήν ὁποία ἀντικαθιστοῦμε τή μεταβλητή  $x$  τοῦ προτασιακοῦ τύπου  $p(x)$  γιά νά προκύψει πρόταση, τή λέμε **τιμὴ** τῆς μεταβλητῆς. Τό σύνολο  $\Omega$  τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς τό λέμε **σύνολο ἀναφορᾶς** τοῦ ἀντίστοιχου προτασιακοῦ τύπου καί τό σύνολο τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς, γιά τίς ὁποῖες ὁ προτασιακός τύπος γίνεται πρόταση ἀληθής, τό λέμε: **σύνολο τιμῶν ἀλήθειας** τοῦ προτασιακοῦ τύπου.

**§ 2. Ποσοδείκτες.**—Σύμφωνα μέ αὐτά πού εἶπαμε πιο πάνω, ἂν ἡ μεταβλητή ἐνός προτασιακοῦ τύπου ἀντικατασταθεῖ μέ ἕνα ὀρισμένο στοιχεῖο τοῦ συνόλου ἀναφορᾶς του, τότε ὁ προτασιακός τύπος γίνεται μία (λογική) πρόταση. Εἶναι δυνατό ὅμως ἀπό ἕναν προτασιακό τύπο νά λάβουμε μία λογική πρόταση, ἂν τοῦ προτάξουμε διάφορες ἐκφράσεις, ὅπως: «*υἰάρχει (τουλάχιστο) ἕνα...*», «*γιά μερικά*», «*γιά κάθε*», «*γιά ἕνα ἀκριβῶς*», «*γιά ἕνα τό πολύ*», «*γιά κανένα*» κ.ἄ., αὐτές λέγονται **ποσοδείκτες**. Ἀπό τοὺς πιο πάνω ποσοδείκτες οἱ: «*υἰάρχει (τουλάχιστο) ἕνα*» καί «*γιά κάθε*», ὅπως ξέρουμε καί ἀπό τήν  $A'$  τάξη, ἔχουν ἰδιαιτέρη σημασία στά Μαθηματικά καί λέγονται **υπαρξιακός**, καί ἀντίστοιχα **καθολικός**, **ποσοδείκτης**. Ὁ πρῶτος συμβολίζεται μέ τό σύμβολο  $\exists$  καί ὁ δεύτερος μέ τό  $\forall$ . Οἱ ποσοδείκτες, ὅπως εἶπαμε καί πιο πάνω, μπαίνουν μπροστά\*\* στοὺς προτασιακοὺς τύπους. Ἔτσι οἱ ἐκφράσεις:

α) « $\exists x \in \Omega, p(x)$ » (διαβάζουμε: «*υἰάρχει (τουλάχιστο) ἕνα  $x$  στό  $\Omega$ , ὥστε νά ἰσχύει  $p(x)$* » ἢ καί ἀλλιῶς: «*γιά ἕνα (τουλάχιστο)  $x \in \Omega$  ἰσχύει  $p(x)$* »).

β) « $\forall x \in \Omega, p(x)$ » (διαβάζουμε: «*γιά κάθε  $x \in \Omega$  ἰσχύει  $p(x)$* ») εἶναι λογικές προτάσεις καί μάλιστα ἡ πρώτη λέγεται **υπαρξιακή** καί ἡ δεύτερη **καθολική πρόταση**. Ἀπό αὐτά πού εἶπαμε, συμπεραίνουμε τώρα ὅτι: **Κάθε υπαρξιακή, καί ἀντίστοιχα κάθε καθολική, πρόταση εἶναι πάντοτε λογική πρόταση**.

**Σημείωση.** Ἡ ἐκφραση: «*υἰάρχει ἀκριβῶς ἕνα*» ἢ ἀλλιῶς «*υἰάρχει ἕνα καί μόνο ἕνα*» παριστάνεται συμβολικά μέ ἕνα ἀπό τά σύμβολα: « $\exists!$ », « $\exists$ », « $\exists!$ ».

**§ 3. Λογικοί σύνδεσμοι—Σύνθετες προτάσεις.**—Στή Μαθηματική Λογική, ὅπως καί στήν καθημερινή ὁμιλία, δέ χρησιμοποιοῦμε μόνο ἀπλές προτάσεις. Συνήθως τίς ἀπλές προτάσεις τίς συνδέουμε μεταξύ τους μέ διάφορες λέξεις καί ἐκφράσεις (συνδετικά), τίς ὁποῖες ὀνομάζουμε **λογικούς συνδέσμους**, καί σχηματίζουμε μ' αὐτό τόν τρόπο νέες (συνθετότερες) προτάσεις. Τίς προτάσεις αὐτές

\* Τό σύμβολο  $\stackrel{\text{ορσ}}{=}$  σημαίνει, ὅπου συναντᾶται ἐδῶ, «ἴσον ἐξ ὀρισμοῦ».

\*\* Στά ἐπόμενα, γιά εὐκολία στό γράψιμο, οἱ ποσοδείκτες θά ἀκολουθοῦν πολλές φορές τοὺς προτασιακοὺς τύπους.

τίς λέμε **σύνθετες προτάσεις**. Στή λογική τῶν προτάσεων ὡς λογικοί σύνδεσμοι θεωροῦνται οἱ ἐξῆς ἐκφράσεις: «*καί*», «*εἴτε*», «*ἢ*», «*ἂν...*, *τότε*», «*τότε καί μόνο τότε, ἂν*», ἐπίσης ἡ ἐκφραση «*ὄχι (δέν)*», ὅταν μπαίνει μπροστά ἀπό μία πρόταση. Ἀμέσως παρακάτω θά δοῦμε μέ ποιόν τρόπο ἐπιδροῦν στή σημασία τῶν προτάσεων οἱ λογικοί σύνδεσμοι.

**§ 4. Πράξεις μεταξύ λογικῶν προτάσεων.**—Ἐστω  $L$  τό σύνολο τῶν (ἀπλῶν) λογικῶν προτάσεων καί μία συνάρτηση  $\tau$  μέ πεδίο ὀρισμοῦ τό σύνολο  $L$  καί πεδίο τιμῶν τό (διμελές) σύνολο  $\{\alpha, \psi\}$ , δηλαδή:

$$\tau: L \rightarrow \{\alpha, \psi\}: p \rightarrow \tau(p) \in \{\alpha, \psi\}.$$

Οἱ διάφοροι τρόποι, σύμφωνα μέ τοὺς ὁποῖους συνδέονται οἱ ἀπλές προτάσεις γιά νά σχηματίσουν μία σύνθετη πρόταση, ἀποτελοῦν τίς **λογικές πράξεις** μεταξύ τῶν προτάσεων. Μέ τή βοήθεια, λοιπόν, τῶν λογικῶν συνδέσμων ἐφοδιάζουμε τό σύνολο  $L$  τῶν ἀπλῶν προτάσεων μέ λογικές πράξεις. Εἶναι φανερό τώρα ὅτι γιά κάθε σύνθετη πρόταση ὀρίζεται ἀκριβῶς μία τιμὴ στό  $\{\alpha, \psi\}$ . Ἡ τιμὴ τῆς σύνθετης προτάσεως στό  $\{\alpha, \psi\}$ , ἡ ὁποία λέγεται καί **τιμὴ ἀλήθειας τῆς σύνθετης προτάσεως**, ὀρίζεται ἐπακριβῶς ἀπό τίς τιμές ἀλήθειας τῶν ἀπλῶν προτάσεων πού τήν ἀποτελοῦν καί ἀπό τόν τρόπο πού συνδέονται αὐτές γιά τό σχηματισμό τῆς σύνθετης προτάσεως.

Οἱ θεμελιώδεις λογικές πράξεις καί οἱ τιμές ἀλήθειας τῶν σύνθετων προτάσεων πού σχηματίζονται μ' αὐτό τόν τρόπο, ὅπως ξέρουμε καί ἀπό τά μαθήματα τῆς προηγούμενης τάξεως, εἶναι οἱ ἐξῆς:

**1. Σύζευξη.** Σύζευξη δύο προτάσεων  $p, q$  ὀνομάζουμε τήν πρόταση « $p$  καί  $q$ », (συμβολικά « $p \wedge q$ »), τήν ὁποία δεχόμαστε ἀληθῆ, μόνο ὅταν καί οἱ δύο προτάσεις  $p, q$  εἶναι ἀληθεῖς, καί ψευδῆ σέ κάθε ἄλλη περίπτωση· δηλαδή:

$$\tau(p \wedge q) \stackrel{\text{ορσ}}{=} \begin{cases} \alpha, & \text{ἂν } \tau(p) = \alpha = \tau(q) \\ \psi, & \text{σέ κάθε ἄλλη περίπτωση} \end{cases} \quad (1)$$

**2. Ἐγκλειστική διάζευξη.** Ἐγκλειστική διάζευξη δύο προτάσεων  $p, q$  ὀνομάζουμε τήν πρόταση « $p$  εἴτε  $q$ » (συμβολικά « $p \vee q$ »), τήν ὁποία δεχόμαστε ψευδῆ μόνο ὅταν καί οἱ δύο προτάσεις  $p, q$  εἶναι ψευδεῖς, καί ἀληθῆ σέ κάθε ἄλλη περίπτωση· δηλαδή:

$$\tau(p \vee q) \stackrel{\text{ορσ}}{=} \begin{cases} \psi, & \text{ἂν } \tau(p) = \psi = \tau(q) \\ \alpha, & \text{σέ κάθε ἄλλη περίπτωση} \end{cases} \quad (2)$$

**3. Ἀποκλειστική διάζευξη.** Ἀποκλειστική διάζευξη δύο προτάσεων  $p, q$  ὀνομάζουμε τήν πρόταση « $p$  ἢ  $q$ » ἢ ἀλλιῶς «*ἢ μόνο  $p$  ἢ μόνο  $q$* » (συμβολικά « $p \vee q$ »), τήν ὁποία δεχόμαστε ψευδῆ, ὅταν οἱ δύο προτάσεις  $p$  καί  $q$  ἔχουν τήν ἴδια τιμὴ ἀλήθειας, καί ἀληθῆ, ὅταν οἱ  $p$  καί  $q$  ἔχουν διαφορετικές τιμές ἀλήθειας.



δηλαδή :

$$\tau(p \vee q) \equiv_{\text{ορσ}} \begin{cases} \psi, \text{ αν } \tau(p) = \tau(q) \\ \alpha, \text{ αν } \tau(p) \neq \tau(q) \end{cases} \quad (3)$$

4. **Άρνηση.** Άρνηση μιās προτάσεως  $p$  ονομάζουμε τήν πρόταση «όχι  $p$ » (συμβολικά « $\sim p$ »), τήν οποία δεχόμαστε αληθή, όταν ή  $p$  είναι ψευδής, και ψευδή όταν ή  $p$  είναι αληθής· δηλαδή:

$$\tau(\sim p) \equiv_{\text{ορσ}} \begin{cases} \alpha, \text{ αν } \tau(p) = \psi \\ \psi, \text{ αν } \tau(p) = \alpha \end{cases} \quad (4)$$

Από τήν (4) συμπεραίνουμε ότι οί τιμές αλήθειας τών  $p$  και  $\sim p$  είναι πάντοτε αντίθετες.

5. **Συνεπαγωγή.** Συνεπαγωγή δύο προτάσεων  $p, q$  ονομάζουμε τήν πρόταση «αν  $p$ , τότε  $q$ » ή αλλιώς « $p$  συνεπάγεται  $q$ » (συμβολικά « $p \Rightarrow q$ »), τήν οποία δεχόμαστε ψευδή, μόνο όταν ή  $p$  είναι αληθής και ή  $q$  ψευδής, και αληθή σέ κάθε άλλη περίπτωση· δηλαδή:

$$\tau(p \Rightarrow q) \equiv_{\text{ορσ}} \begin{cases} \psi, \text{ αν } \tau(p) = \alpha \text{ και } \tau(q) = \psi \\ \alpha, \text{ σέ κάθε άλλη περίπτωση} \end{cases} \quad (5)$$

**Παρατηρήσεις:** α). Άλλοι τρόποι διατυπώσεως τής συνεπαγωγής  $p \Rightarrow q$  είναι και οί εξής:

1. « $p$  είναι ικανή συνθήκη γιά  $q$ »
2. « $q$  είναι αναγκαία συνθήκη γιά  $p$ ».

β). Άν ή πρόταση  $p$  είναι ψευδής, τότε ή συνεπαγωγή  $p \Rightarrow q$  είναι πάντοτε αληθής γιά κάθε τιμή αλήθειας τής προτάσεως  $q$ . Άν όμως ή συνεπαγωγή  $p \Rightarrow q$  είναι αληθής, τότε δέν έπεται ότι όπωσδήποτε οί προτάσεις  $p$  και  $q$  είναι αληθείς.

γ). Η συνεπαγωγή  $q \Rightarrow p$  λέγεται **αντίστροφη** τής:  $p \Rightarrow q$  και ή συνεπαγωγή:  $\sim p \Rightarrow \sim q$  λέγεται **αντίθετη** τής:  $p \Rightarrow q$ . Τέλος ή συνεπαγωγή:  $\sim q \Rightarrow \sim p$  λέγεται **αντιστροφoαντίθετη** τής:  $p \Rightarrow q$ .

6. **Λογική ισοδυναμία.** Λογική ισοδυναμία δύο προτάσεων  $p, q$  ονομάζουμε τήν πρόταση « $p$  τότε και μόνο τότε, αν  $q$ » ή αλλιώς « $p$  συνεπάγεται  $q$  και αντίστροφως» (συμβολικά « $p \Leftrightarrow q$ »), τήν οποία δεχόμαστε αληθή, μόνο όταν και οί δύο προτάσεις  $p, q$  έχουν τήν ίδια τιμή αλήθειας, και ψευδή, όταν οί  $p$  και  $q$  έχουν διαφορετικές τιμές αλήθειας· δηλαδή:

$$\tau(p \Leftrightarrow q) \equiv_{\text{ορσ}} \begin{cases} \alpha, \text{ αν } \tau(p) = \tau(q) \\ \psi, \text{ αν } \tau(p) \neq \tau(q) \end{cases} \quad (6)$$

Από τόν όρισμό τής ισοδυναμίας εύκολα διαπιστώνουμε τώρα ότι:

1.  $p \Leftrightarrow p$ , 2.  $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$ , 3.  $(p \Leftrightarrow q \wedge q \Leftrightarrow r) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$

**Σημείωση:** Όταν θέλουμε νά δηλώσουμε ότι ή ισοδυναμία  $p \Leftrightarrow q$  δύο προτάσεων υπάρχει έξ όρισμού χρησιμοποιούμε τό σύμβολο  $\Leftrightarrow_{\text{ορσ}}$ , δηλ. γράφουμε  $p \Leftrightarrow_{\text{ορσ}} q$ .

**Ανακεφαλαίωση.** Οί τιμές αλήθειας τών προηγούμενων λογικών πράξεων (συνδέσεων) πού άπορρέουν άπό τούς όρισμούς (1) - (6) άποδίδονται συνοπτικά μέ τόν ακόλουθο πίνακα τιμών αλήθειας:

| p | q | Σύζευξη      | Έγκλ. Διάζ. | Άπ. Διάζ.  | Συνεπαγωγή        | Ισοδυναμία            | Άρνηση   |          |
|---|---|--------------|-------------|------------|-------------------|-----------------------|----------|----------|
|   |   | $p \wedge q$ | $p \vee q$  | $p \vee q$ | $p \Rightarrow q$ | $p \Leftrightarrow q$ | $\sim p$ | $\sim q$ |
| α | α | α            | α           | ψ          | α                 | α                     | ψ        | ψ        |
| α | ψ | ψ            | α           | α          | ψ                 | ψ                     | ψ        | α        |
| ψ | α | ψ            | α           | α          | α                 | ψ                     | α        | ψ        |
| ψ | ψ | ψ            | ψ           | ψ          | α                 | α                     | α        | α        |

**§ 5. Ταυτολογίες - ταυτολογικές ισοδυναμίες και αντιλογίες.**—Μία σύνθετη πρόταση, ή όποία σχηματίζεται άπό ένα «πεπερασμένο\*» πλήθος άπλών προτάσεων  $p, q, r, \dots$ , πού συνδέονται μεταξύ τους μέ τά σύμβολα (λογικούς συνδέσμους)  $\wedge, \vee, \vee, \sim, \Rightarrow$  και  $\Leftrightarrow$  τήν ονομάζουμε, όπως μάθαμε και στήν προηγούμενη τάξη, **λογικό τύπο**. Έτσι, λ.χ., ή έκφραση:

$[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$  είναι ένας λογικός τύπος.

Δίνουμε τώρα τούς ακόλουθους όρισμούς:

1. **Θά λέμε ότι ένας λογικός τύπος  $P$  είναι ταυτολογία, τότε και μόνο τότε, αν έχει τιμή αλήθειας  $\alpha$  γιά κάθε συνδυασμό τιμών αλήθειας τών προτάσεων πού τόν συνθέτουν.**

Άν  $P$  είναι μία ταυτολογία, τότε γράφουμε:  $\vdash P$  και διαβάζουμε: ή πρόταση  $P$  είναι ταυτολογία.

Όρισμένες ταυτολογίες, έπειδή έχουν καθολική ισχύ, λέγονται **άρχες ή νόμοι**. Τέτοιες ταυτολογίες είναι οί **νόμοι του Άριστοτέλη**:

1. **Νόμος τής ταυτότητας:**  $\vdash p \Rightarrow p$
2. **Νόμος τής μή αντιφάσεως:**  $\vdash \sim [p \wedge (\sim p)]$
3. **Νόμος του αποκλεισμού του τρίτου:**  $\vdash p \vee (\sim p)$ .

**Σημείωση.** Φραστικά οί δύο τελευταίοι νόμοι διατυπώνονται ως εξής:

Νόμος τής μή αντιφάσεως: «μία πρόταση και ή άρνησή της δέν μπορεί νά είναι και οί δύο αληθείς». Νόμος του αποκλεισμού του τρίτου: «κάθε πρόταση και ή άρνησή της αποκλείονται άμοιβαία».

Άλλες αξιόλογες ταυτολογίες είναι και οί εξής:

4.  $p \Leftrightarrow \sim(\sim p)$  (νόμος διπλής άρνήσεως)
5.  $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$  (νόμος συλλογισμού).

2. **Θά λέμε ότι ένας λογικός τύπος  $P$  είναι ταυτολογικά ισοδύναμος μέ έναν**

\* δηλ. τό πλήθος τους νά έκφράζεται μέ ένα φυσικό αριθμό ( $\geq 2$ ).



άλλο λογικό τύπο  $Q$ , και θα γράφουμε  $P \equiv Q$ , τότε και μόνο τότε, αν έχουν πάντοτε την ίδια τιμή αλήθειας, δηλ. αν η ισοδυναμία  $P \iff Q$  είναι ταυτολογία. Από τον όρισμό αυτό συνάγεται ότι οι συμβολισμοί:  $P \equiv Q$  και  $\vdash (P \iff Q)$  είναι ταυτόσημοι. Ωστε:

$$P \equiv Q \iff \vdash (P \iff Q)$$

**Παρατήρηση.** Ο συμβολισμός  $P \equiv Q$  δεν είναι ταυτόσημος με τον:  $P \iff Q$ , γιατί ο πρώτος δηλώνει ότι ο λογικός τύπος  $P$  βρίσκεται στη σχέση « $\equiv$ » με τον  $Q$ , ενώ  $P \iff Q$  δηλώνει μία λογική πρόταση.

Αξιόλογα παραδείγματα ισοδυναμιών, που είναι ταυτολογίες, είναι οι γνωστοί από την προηγούμενη τάξη **νόμοι του De Morgan**:

$$\begin{aligned} \sim (p \wedge q) &\iff (\sim p) \vee (\sim q) \\ \sim (p \vee q) &\iff (\sim p) \wedge (\sim q). \end{aligned}$$

Τό ότι οι παραπάνω ισοδυναμίες είναι ταυτολογίες αποδεικνύεται με τη βοήθεια των αντίστοιχων πινάκων αλήθειας.

**Σημείωση.** Επειδή  $\vdash (P \iff Q)$  και  $P \equiv Q$  είναι, όπως είπαμε πιο πάνω, ταυτόσημοι συμβολισμοί, γι' αυτό οι νόμοι του De Morgan μπορεί να διατυπωθούν και έτσι:

$$[\sim (p \wedge q)] \equiv [(\sim p) \vee (\sim q)], [\sim (p \vee q)] \equiv [(\sim p) \wedge (\sim q)].$$

Αξιοσημείωτες επίσης είναι και οι γνωστές από την Α' τάξη ισοδυναμίες:

$$\begin{aligned} 1. (p \implies q) &\equiv (\sim p) \vee q \\ 2. (p \iff q) &\equiv [(\sim p) \vee q] \wedge [p \vee (\sim q)] \\ 3. (p \vee q) &\equiv [(\sim p) \wedge q] \vee [p \wedge (\sim q)]. \end{aligned}$$

**Παρατήρηση:** Από τις τρεις τελευταίες ταυτολογίες συμπεραίνουμε ότι με τις λογικές πράξεις:  $\sim, \vee, \wedge$  μπορούμε να εκφράσουμε τις άλλες λογικές πράξεις, δηλαδή τη συνεπαγωγή ( $\implies$ ), την ισοδυναμία ( $\iff$ ) και την αποκλειστική διάζευξη ( $\vee$ ). επομένως οποιοσδήποτε λογικός τύπος μπορεί να διατυπωθεί μόνο με τα τρία συνδετικά:  $\wedge, \vee, \sim$ . Εξάλλου από τον πρώτο νόμο του De Morgan έχουμε:  $p \wedge q \equiv \sim [(\sim p) \vee (\sim q)]$ . Άρα μπορούμε οποιοδήποτε λογικό τύπο να τον εκφράσουμε μόνο με τους λογικούς συνδέσμους:  $\vee, \sim$ .

3. Θα λέμε ότι ένας λογικός τύπος  $Q$  είναι **αντιλογία** (ή αλλιώς: **αντίφαση**), τότε και μόνο τότε, αν η άρνησή του  $\sim Q$  είναι ταυτολογία, δηλαδή αν έχει τιμή αλήθειας  $\psi$  για κάθε συνδυασμό τιμών αλήθειας των προτάσεων που τον συνθέτουν. Μία αντιλογία συμβολίζεται με πρόταση του συμβόλου:  $\sim \vdash$ .

**Παράδειγμα.** Νά δείξετε ότι ο λογικός τύπος  $Q(p, q): (p \implies q) \iff (p \wedge \sim q)$  είναι αντιλογία. Λύση. Αυτό συνάγεται άμεσα από τον ακόλουθο πίνακα:

| p        | q        | $\sim q$ | $p \implies q$ | $p \wedge \sim q$ | $Q(p, q)$ | $\sim Q(p, q)$ |
|----------|----------|----------|----------------|-------------------|-----------|----------------|
| $\alpha$ | $\alpha$ | $\psi$   | $\alpha$       | $\psi$            | $\psi$    | $\alpha$       |
| $\alpha$ | $\psi$   | $\alpha$ | $\psi$         | $\alpha$          | $\psi$    | $\alpha$       |
| $\psi$   | $\alpha$ | $\psi$   | $\alpha$       | $\psi$            | $\psi$    | $\alpha$       |
| $\psi$   | $\psi$   | $\alpha$ | $\alpha$       | $\psi$            | $\psi$    | $\alpha$       |

**Γενική παρατήρηση.** Αυτά που μέχρι τώρα αναπτύξαμε σχετικά με το λογισμό των προτάσεων ισχύουν και για προτασιακούς τύπους (άνοιχτές προτάσεις), με τη μόνη διαφορά ότι ο χαρακτηρισμός «αληθής» ή «ψευδής» θα αναφέρεται στο σύνολο τιμών της μεταβλητής ή των μεταβλητών των αντίστοιχων προτασιακών τύπων.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Ομάδα Α':** 1. Νά βρείτε τις τιμές αλήθειας των ακόλουθων σύνθετων προτάσεων:

$$\begin{aligned} \alpha) (5 > 7) \wedge (9 = 3^2), \quad \beta) (4 < 3) \vee (8 = 7 + 1), \quad \gamma) (17 = 8 + 7) \vee (5^2 = 25), \\ \delta) (2 > 5) \implies (3 = 4), \quad \epsilon) (2 > 5) \iff (4^2 = 9), \quad \sigma\tau) (7 = 4 + 3) \iff (2 = 5). \end{aligned}$$

2. Νά βρείτε ποιές από τις επόμενες προτάσεις είναι ταυτολογίες και ποιές αντιλογίες:

$$\begin{aligned} \alpha) [p \wedge (p \implies q)] \implies q, \quad \beta) (p \vee q) \wedge [(\sim p) \wedge (\sim q)], \quad \gamma) p \vee (p \wedge q) \iff p \\ \delta) \sim (p \wedge q) \iff \sim [(\sim p) \vee (\sim q)], \quad \epsilon) [p \vee (\sim p)] \wedge [q \vee (\sim q)]. \end{aligned}$$

3. Νά αποδείξετε ότι  $\forall p, \forall q$  και  $\forall r$  από το σύνολο  $L$  ισχύουν:

$$\begin{aligned} \alpha) [p \wedge (q \vee r)] &\equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)], \quad \beta) p \vee (p \wedge r) \equiv p \equiv p \wedge (p \vee r) \\ \gamma) [(p \implies q) \wedge (r \implies q)] &\equiv [(p \vee r) \implies q], \quad \delta) [(p \vee q) \vee (p \wedge q)] \equiv (p \vee q) \\ \epsilon) [(p \wedge q) \vee [(\sim p) \wedge (\sim q)]] &\equiv [p \iff q], \quad \sigma\tau) [p \implies q] \equiv \sim [p \wedge (\sim q)] \equiv [(\sim p) \vee q]. \end{aligned}$$

**Ομάδα Β':** 4. \*Αν για κάθε πρόταση  $q$  είναι  $\tau[(\sim p) \implies q] = \alpha$ , νά αποδείξετε ότι:  $\tau(p) = \alpha$ .

5. Νά βρείτε τις τιμές αλήθειας  $\tau(p), \tau(q)$ , αν είναι γνωστό ότι:

$$\alpha) \tau[(p \implies q) \wedge (q \vee p)] = \alpha, \quad \beta) \tau[(p \vee q) \wedge (q \implies p)] = \psi.$$

6. \*Αν  $\tau(p \iff q) = \psi$ , νά βρείτε την τιμή αλήθειας  $\tau(p)$ , όπου  $\tau$   $P$  παριστάνει μία από τις ακόλουθες (σύνθετες) προτάσεις:

$$\alpha) [p \iff (\sim q)] \wedge [(\sim p) \iff q], \quad \beta) [p \implies (q \vee p)] \wedge [q \vee p].$$

## § 6. Η έννοια του συνόλου — Έννοιες συναφείς με αυτή. — α). Η

έννοια του συνόλου που μας είναι γνωστή από τις προηγούμενες τάξεις, είναι σήμερα μία από τις πιο βασικές και χρήσιμες έννοιες στα Μαθηματικά. Η έννοια αυτή, όπως ακριβώς και η έννοια της (άπλης) προτάσεως, θεωρείται στα Μαθηματικά ως «*αρχική*» έννοια, δηλαδή ως έννοια που δεν επιδέχεται όρισμό, ως έννοια που δεν μπορεί να αναχθεί σε άλλη έννοια.

Τή λέξη **σύνολο**, όπως μάθαμε και στην Α' τάξη, τη χρησιμοποιούμε όταν θέλουμε να αναφερθούμε σε αντικείμενα τελείως **ορισμένα** και «**διακεκριμένα\***», που τα θεωρούμε ως μία «**ολότητα**».

\*Ακριβολογώντας περισσότερο, μπορούμε να πούμε ότι:

Στά Μαθηματικά δεχόμαστε ότι επιτρέπεται «**πολλά**» αντικείμενα που είναι **έντελως** καθορισμένα και διακεκριμένα μεταξύ τους να τα θεωρούμε ως ένα **νέο** αντικείμενο, που το λέμε το **σύνολο** των αντικειμένων αυτών.

Αυτά τα αντικείμενα τα λέμε συνήθως **στοιχεία** του συνόλου.

Μερικές φορές, κυρίως σε μερικά θέματα γεωμετρικής φύσεως, αντί για τον όρο «σύνολο» χρησιμοποιείται ο όρος «**χώρος**» και τότε αντί να λέμε **στοιχείο** του συνόλου, λέμε «**σημείο**» του χώρου.

\* που ξεχωρίζουν το ένα από το άλλο.



Τά σύνολα συμβολίζονται συνήθως με τά κεφαλαία γράμματα:  $A, B, \Gamma, \dots$  και τά στοιχεία τους με τά μικρά γράμματα:  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Γιά νά δηλώσουμε ότι τό στοιχείο  $x$  ανήκει στό σύνολο  $A$ , γράφουμε:  $x \in A$ . ένω όταν τό στοιχείο  $x$  δέν ανήκει στό  $A$ , γράφουμε:  $x \notin A$ .

Γιά κάθε στοιχείο  $x$  καί κάθε σύνολο  $A$  ισχύει μία, καί μόνο μία, από τίς εξής δύο σχέσεις:  $x \in A$ ,  $x \notin A$ .

**β). Βασική ιδιότητα συνόλου.** Σύμφωνα με όσα είπαμε παραπάνω, τά αντικείμενα πού προορίζονται νά αποτελέσουν ένα σύνολο, οφείλουν νά διακρίνονται τό ένα από τό άλλο. Αυτό σημαίνει ότι: αν πάρουμε δύο οποιαδήποτε απ' αυτά τά αντικείμενα, πρέπει νά μπορούμε νά πούμε με βεβαιότητα ότι τά αντικείμενα αυτά είναι διαφορετικά μεταξύ τους ή όχι. Ακριβέστερα, αν  $\alpha, \beta$  παριστάνουν δύο οποιαδήποτε στοιχεία ενός συνόλου  $\Sigma$ , τότε είναι βέβαιο καί με τήν ίδια πάντοτε σημασία, ότι τά  $\alpha$  καί  $\beta$  παριστάνουν ή δέν παριστάνουν τό ίδιο στοιχείο του  $\Sigma$ . Έτσι, βλέπουμε ότι ή έννοια του συνόλου συνδέεται στενά με τήν έννοια μιās «σχέσεως ισότητας» πού ορίζεται μεταξύ των στοιχείων του, με τήν όποια μπορούμε νά τά διακρίνουμε. Αυτή τήν ιδιότητα, πού τή συμβολίζουμε με « $=$ », τή λέμε **βασική ιδιότητα** του συνόλου, γιά νά τήν αντιδιαστείλουμε πρós κάθε άλλη «ιδιότητα» πού μπορεί νά εισαχθεί μεταξύ των στοιχείων του συνόλου. Έτσι, γιά νά δηλώσουμε ότι τά  $\alpha$  καί  $\beta$  παριστάνουν τό ίδιο στοιχείο ενός συνόλου  $\Sigma$ , γράφουμε  $\alpha = \beta$ , ένω αν τά  $\alpha$  καί  $\beta$  δέν παριστάνουν τό ίδιο στοιχείο του  $\Sigma$ , γράφουμε  $\alpha \neq \beta$ . Π.χ. στό σύνολο  $N$  των φυσικών αριθμών έχουμε:

$$7 = 5 + 2, \quad 5 = 4 + 1, \quad 3 \neq 2, \quad 8 \neq 5 + 4.$$

**γ). Παραδείγματα:** Αξιοσημείωτα σύνολα αριθμών, με τά όποια έχουμε ήδη ασχοληθεί καί πού θά τά συναντήσουμε στά επόμενα κεφάλαια, είναι τά ακόλουθα:

$N$  : τό σύνολο των φυσικών αριθμών:  $1, 2, 3, \dots$

$N_0$  : τό σύνολο των ακεραιών της αριθμητικής:  $0, 1, 2, 3, \dots$

$Z$  : τό σύνολο των ακεραιών αριθμών:  $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$

$Q$  : τό σύνολο των ρητών αριθμών.

$R$  : τό σύνολο των πραγματικών αριθμών.

$R^+, R_0^+$  : τό σύνολο των θετικών, αντίστοιχως μή αρνητικών, πραγματικών αριθμών.

$C$  : τό σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

**§ 7. Τρόποι παραστάσεως ενός συνόλου.**—Μάθαμε στίς προηγούμενες τάξεις ότι ένα σύνολο είναι έντελώς καθορισμένο όταν δίνονται όλα του τά στοιχεία είτε όταν δίνεται μία ιδιότητα πού χαρακτηρίζει τά στοιχεία του. Έτσι οί πίο συνηθισμένοι τρόποι παραστάσεως ενός συνόλου είναι:

**α). Παράσταση συνόλου με αναγραφή των στοιχείων του.** Σ' αυτή τήν περίπτωση αναγράφουμε όλα τά στοιχεία του συνόλου άνάμεσα σέ δύο αντίκριστα άγκιστρα. Ό τρόπος βέβαια αυτός δέν είναι πάντοτε πρακτικός καί γι' αυτό μερικές φορές ένα σύνολο παριστάνεται με αναγραφή, μέσα σέ άγκιστρα, ορισμένων από τά στοιχεία του σέ συνδυασμό με τελείες (συνήθως τρείς) με τίς όποιες αφήνουμε νά έννοηθούν όλα τά στοιχεία πού παραλείψαμε στήν

αναγραφή. Έτσι, π.χ., τό σύνολο  $N$  των φυσικών αριθμών μπορεί νά παρασταθεί με:  $\{1, 2, 3, \dots\}$ .

Σημειώνουμε έδω ότι, έπειδή ή έννοια του συνόλου δέ συνεπάγεται καμιά διάταξη γιά τά στοιχεία του, μπορούμε κατά τήν αναγραφή νά γράφουμε τά σύμβολα των στοιχείων του με όποια τάξη θέλουμε.

**β). Παράσταση συνόλου με περιγραφή χαρακτηριστικής ιδιότητας των στοιχείων του.** Έστω ένας προτασιακός τύπος  $p(x)$  με σύνολο άναφοράς τό  $\Omega$ . Τά διάφορα στοιχεία του  $\Omega$  πού έχουν τήν «ιδιότητα»  $p$  (δηλ. οί τιμές τής μεταβλητής, με τίς όποιες ό προτασιακός τύπος γίνεται πρόταση αλήθης) αποτελούν (προσδιορίζουν) ένα σύνολο. Τό σύνολο αυτό συμβολίζεται ως εξής:

$\{x \in \Omega: x \text{ έχει τήν ιδιότητα } p\}$  ή  $\{x \in \Omega: p(x) \text{ αληθής}\}$  ή απλούστερα, όταν είναι γνωστό ότι πρόκειται γιά τό σύνολο άναφοράς  $\Omega$ , απλώς με:  $\{x: p(x)\}$ . Με τήν παραπάνω σημασία θά θεωρούμε στά επόμενα τό συμβολισμό:  $\{x \in \Omega: p(x)\}$ . Έπομένως, αν  $A = \{x \in \Omega: p(x)\}$ , τότε ό προτασιακός τύπος  $p(x)$  «περιγράφει» τά στοιχεία του συνόλου  $A$ . Πράγματι:

$$(\forall x) x \in A \iff p(x) \text{ αληθής.}$$

Αξιοσημείωτα σύνολα πραγματικών αριθμών πού περιγράφονται με προτασιακούς τύπους είναι τά ακόλουθα, γνωστά ως **διαστήματα** πραγμ. αριθμών:

1. Άνοικτό διάστημα με άκρα  $\alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ ):

$$(\alpha, \beta) = \{x \in R: \alpha < x < \beta\},$$



2. Κλειστό διάστημα με άκρα  $\alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ ):

$$[\alpha, \beta] = \{x \in R: \alpha \leq x \leq \beta\},$$



3. Ημι-ανοικτό από δεξιά με άκρα  $\alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ ):

$$[\alpha, \beta) = \{x \in R: \alpha \leq x < \beta\},$$



4. Ημι-ανοικτό από άριστερά με άκρα  $\alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ ):

$$(\alpha, \beta] = \{x \in R: \alpha < x \leq \beta\}.$$



**§ 8. Έπέκταση τής έννοιας του συνόλου. Σύνολα μονομελή. Τό κενό σύνολο.**—Από τόν τρόπο πού έχει χρησιμοποιηθεί μέχρι τώρα ή έννοια του συνόλου, συμπεραίνεται ότι κάθε σύνολο έχει δύο τουλάχιστο στοιχεία.

Στή Θεωρία των Συνόλων εισάγουμε καί σύνολα πού έχουν ένα μόνο στοιχείο καί τά λέμε **μονομελή σύνολα** ή με μία λέξη **μονοσύνολα**. Ένα τέτοιο σύνολο με (μοναδικό) στοιχείο τό  $\alpha$ , συμβολίζεται με  $\{\alpha\}$ . Τονίζουμε έδω τή διαφορά πού υπάρχει άνάμεσα στό  $\alpha$  καί στό  $\{\alpha\}$ : τό πρώτο συμβολίζει ένα στοιχείο κάποιου συνόλου, ένω τό δεύτερο είναι σύνολο με μοναδικό στοιχείο τό  $\alpha$ . Έτσι έχουμε:  $\alpha \in \{\alpha\}$  καί  $\alpha \neq \{\alpha\}$ .

**Τό κενό σύνολο.** Έστω ένας προτ. τύπος  $p(x)$ , ό όποιος γιά κάθε τιμή τής μεταβλητής  $x$  γίνεται ψευδής πρόταση, π.χ., ό προτασιακός τύπος:

$$p(x): x \text{ είναι φυσικός αριθμός διάφορος του } x.$$

Γεννάται τό έρώτημα: ποιό είναι τότε τό σύνολο  $\{x: p(x)\}$ ;



Είναι άμέσως φανερό ότι για κανένα  $x \in \mathbb{N}$  δέ γίνεται αληθής πρόταση  $\delta \ p(x)$ . Άρα τό  $\{x: p(x)\}$  είναι ένα «σύνολο» μέ κανένα στοιχείο (!)  
Τέτοιο επίσης είναι και τό σύνολο:  $\{x \in \mathbb{R}: x^2 + 1 \leq 0\}$ .

Άπό τά προηγούμενα παραδείγματα γίνεται φανερή ή ανάγκη νά παραδεχθούμε ένα σύνολο πού νά μήν έχει κανένα στοιχείο. Αυτό τό σύνολο αντι-στοιχεί στους προτ. τύπους  $p(x)$ , πού γίνονται ψευδείς προτάσεις για κάθε στοιχείο  $x$  του συνόλου αναφοράς τους. Έτσι φθάνουμε νά δεχθούμε την ύπαρξη ενός και μοναδικού συνόλου, πού δέν έχει στοιχεία (!) Αυτό τό λέμε, όπως ξέρουμε, «τό κενό σύνολο» και τό παριστάνουμε μέ  $\emptyset$  ή μέ  $\{\}$ .

**Σημείωση.** Δέν πρέπει νά συγχέουμε τά σύμβολα:  $\{0\}$ ,  $\{\emptyset\}$ ,  $\emptyset$ . Τά δύο πρώτα παριστάνουν άπό ένα μονομελές σύνολο μέ στοιχείο τό 0, αντίστοιχως τό  $\emptyset$ , ενώ τό τελευταίο παριστάνει τό κενό σύνολο. Επίσης σημειώνουμε ότι  $\{0\} \neq 0$  (γιατί;).

**§ 9. Συνθήκη και ταυτότητα σέ σύνολο.** — Κάθε προτασιακός τύπος  $p(x)$ , του οποίου ή μεταβλητή  $x$  λαμβάνει ως τιμές τά στοιχεία ενός συνόλου  $A$ , λέγεται **συνθήκη** στό  $A$ . Θά λέμε ότι ένα στοιχείο  $a$  του  $A$  ικανοποιεί ή συνθήκη  $p(x)$ , τότε και μόνο τότε, αν ή πρόταση  $p(x)$  είναι αληθής.

Μία συνθήκη  $p(x)$ , πού αληθεύει για κάθε  $x \in A$ , λέγεται **ταυτότητα** στό  $A$ . Έτσι, π.χ., ό προτ. τύπος  $p(x)$ : « $x^2 + 1 > 0$ » είναι ταυτότητα στό  $\mathbb{R}$ , επειδή αυτός αληθεύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , ενώ ό προτ. τύπος  $q(x)$ : « $x + 1 > 0$ » είναι συνθήκη στό  $\mathbb{R}$ , επειδή αληθεύει μόνο για  $x > -1$ .

**§ 10. Έ έννοια του υποσυνόλου. Ισότητα δύο συνόλων.** — Έστω ότι  $A$  και  $B$  είναι δύο μή κενά σύνολα. Θά λέμε ότι «τό σύνολο  $A$  είναι υποσύνολο του  $B$ », ή (άλλιώς) «τό  $A$  περιέχεται στό  $B$ », και θά τό συμβολίζουμε μέ:  $A \subseteq B$ , τότε και μόνο τότε, αν ή συνθήκη  $x \in A$  συνεπάγεται την  $x \in B$ .  
Γιά συντομία γράφουμε:

$$A \subseteq B \iff (\forall x: x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Αντί  $A \subseteq B$  γράφουμε ισοδύναμα και  $B \supseteq A$ . όπότε διαβάζουμε:  $B$  είναι υπερασύνολο του  $A$  ή τό  $B$  περιέχει τό  $A$ .

Τό  $\emptyset$  θεωρείται υποσύνολο κάθε συνόλου και υπερασύνολο μόνο του ίδιου· δηλ.  $\emptyset \subseteq B$  για κάθε σύνολο  $B$  και μόνο  $\emptyset \supseteq \emptyset$ .

Η ισότητα δύο συνόλων και ή έννοια του γνήσιου υποσυνόλου (πού συμβολίζεται μέ  $\subset$ ) ορίζονται, όπως ξέρουμε, ως εξής:

$$A = B \iff A \subseteq B \text{ και } B \subseteq A$$

$$A \subset B \iff A \subseteq B \text{ και } A \neq B.$$

**Παρατήρηση.** Πρέπει νά γίνεται διάκριση μεταξύ των συμβόλων « $\in$ », τό όποιο λέγεται σύμβολο του «ανήκει σέ...», και « $\subseteq$ », τό όποιο λέγεται σύμβολο εγκλεισμού. Γιατί τό  $\in$  συσχετίζει στοιχείο μέ σύνολο, ενώ τό  $\subseteq$  συσχετίζει σύνολο μέ σύνολο, και στη θεωρία των Συνόλων στοιχείο και σύνολο παίζουν διαφορετικούς ρόλους.

**§ 11. Δυναμοσύνολο ενός συνόλου.** — Όταν δοθεί ένα σύνολο, μπορούμε νά θεωρούμε τό σύνολο των υποσυνόλων του. Τό σύνολο των υποσυνόλων ενός συνόλου  $E$  συμβολίζεται μέ  $\mathcal{P}(E)$ . Ωστε:

$$\mathcal{P}(E) = \{X: X \subseteq E\} = \{X: x \in X \Rightarrow x \in E\}.$$

Τό  $\emptyset$  και τό  $E$  είναι προφανώς υποσύνολα του  $E$ , άρα είναι στοιχεία του  $\mathcal{P}(E)$ . Έπομένως ισχύουν:  $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$  και  $E \in \mathcal{P}(E)$ .

Έξάλλου έχουμε τίς λογικές ισοδυναμίες:

$$A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subseteq E$$

$$\{\alpha\} \in \mathcal{P}(E) \iff \alpha \in E.$$

**Σημείωση.** Ό παρακάτω πίνακας κινεί την προσοχή μας σ' έναν τύπο, ό όποιος συσχετίζει τόν αριθμό των υποσυνόλων ενός συνόλου μέ τόν αριθμό, πού εκφράζει τό πλήθος των στοιχείων του συνόλου. Τόν αριθμό, πού εκφράζει τό πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου  $E$ , όπως ξέρουμε και άπό τίς προηγούμενες τάξεις, τόν ονομάζουμε **πληθικό αριθμό** και τόν συμβολίζουμε μέ  $v(E)$ .

| σύνολο $E$                          | $v(E)$ | Υποσύνολα του $E$                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | $v(\mathcal{P}(E))$ |
|-------------------------------------|--------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| $\emptyset$                         | 0      | $\emptyset$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | $1 (= 2^0)$         |
| $\{\alpha\}$                        | 1      | $\emptyset, \{\alpha\}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | $2 (= 2^1)$         |
| $\{\alpha, \beta\}$                 | 2      | $\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\alpha, \beta\}$                                                                                                                                                                                                                                                                           | $4 (= 2^2)$         |
| $\{\alpha, \beta, \gamma\}$         | 3      | $\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\beta, \gamma\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}$                                                                                                                                                                                             | $8 (= 2^3)$         |
| $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ | 4      | $\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\delta\}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\alpha, \delta\}, \{\beta, \gamma\}, \{\beta, \delta\}, \{\gamma, \delta\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}, \{\alpha, \beta, \delta\}, \{\alpha, \gamma, \delta\}, \{\beta, \gamma, \delta\}, \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ | $16 (= 2^4)$        |

Άπό τούς αριθμούς της τελευταίας στήλης του παραπάνω πίνακα οδηγούμαστε στην είκασία ότι: ένα σύνολο μέ  $k$  στοιχεία έχει  $2^k$  υποσύνολα.

Ισοδύναμα αποδεικνύεται ότι: Αν τό σύνολο  $E$  έχει  $k$  στοιχεία ( $k \in \mathbb{N}_0$ ), τότε τό σύνολο  $\mathcal{P}(E)$  των υποσυνόλων του θά έχει  $2^k$  στοιχεία.

Δηλαδή:

$$v(E) = k \Rightarrow v(\mathcal{P}(E)) = 2^k$$

Γι' αυτό, τό σύνολο  $\mathcal{P}(E)$  λέγεται και **δυναμοσύνολο** του  $E$  και συμβολίζεται πολλές φορές στη διεθνή βιβλιογραφία μέ  $2^E$ .

**§ 12. Βασικό σύνολο ή σύνολο αναφοράς.** — Στα μαθηματικά προκειμένου νά επεξεργασθούμε ένα θέμα ξεκινάμε άπό ένα όρισμένο σύνολο, έστω  $\Omega \neq \emptyset$ , και κατόπιν μέ βάση τά στοιχεία του και τά διάφορα υποσύνολά του προχωρούμε στην ανάπτυξη του θέματος. Ένα τέτοιο σύνολο  $\Omega$ , πού τά στοιχεία του και τά υποσύνολά του εμφανίζονται αποκλειστικά κατά την επεξεργασία του θέματος λέγεται **βασικό σύνολο** ή **σύνολο αναφοράς** (επειδή σ' αυτό, κατά την επεξεργασία του θέματος, αναφέρονται όλα τά άλλα σύνολα).



Τό βασικό σύνολο γενικά διαφέρει από θέμα σέ θέμα. Πολλές φορές μάλιστα δέν αναφέρουμε ιδιαίτερα τό βασικό σύνολο, άν αυτό καθορίζεται από τό περιεχόμενο του θέματος.

**Σημείωση.** Σ' ένα διάγραμμα του Venn τό βασικό σύνολο παριστάνεται συνήθως μέ ὀρθογώνιο, ὁπότε κάθε ὑποσύνολό του πρέπει νά σχεδιάζεται μέσα σ' αυτό τό ὀρθογώνιο.

**§ 13. Καρτεσιανό γινόμενο συνόλων.** — Ὡς θεωρήσουμε δύο μή κενά σύνολα  $A$  καί  $B$  ὡς ὑποσύνολα ενός βασικοῦ συνόλου  $\Omega$ . Ἀπό αὐτά τά δύο σύνολα σχηματίζεται (ὀρίζεται) ἕνα νέο σύνολο, τό ὁποῖο λέγεται **καρτεσιανό γινόμενο μέ πρώτο παράγοντα τό  $A$  καί δεύτερο παράγοντα τό  $B$**  καί συμβολίζεται μέ  $A \times B$ . Αὐτό τό καινούργιο σύνολο ὀρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$A \times B \stackrel{\text{ορσ}}{=} \{(\alpha, \beta): \alpha \in A \text{ καί } \beta \in B\}$$

Τό στοιχείο  $(\alpha, \beta) \in A \times B$  λέγεται «διατεταγμένο ζεύγος». Τά στοιχεῖα  $\alpha$  καί  $\beta$  τοῦ ζεύγους λέγονται ἀντιστοίχως *πρώτη* καί *δεύτερη συντεταγμένη* (ἢ *προβολή*) τοῦ ζεύγους. Ἡ *βασική ἰσότητα* ὀρίζεται στό  $A \times B$  ὡς ἑξῆς:

$$(\alpha, \beta) = (\alpha', \beta') \stackrel{\text{ορσ}}{\iff} (\alpha = \alpha' \text{ καί } \beta = \beta').$$

Δεχόμαστε ἐξ ὀρισμοῦ ὅτι: άν  $A = \emptyset$  εἴτε  $B = \emptyset$ , τότε  $A \times B = \emptyset$ .

Ἔχουμε τώρα τίς ἰσοδυναμίες:

$$A \times B = \emptyset \iff (A = \emptyset \text{ εἴτε } B = \emptyset)$$

$$A \times B \neq \emptyset \iff (A \neq \emptyset \text{ καί } B \neq \emptyset).$$

Στήν περίπτωση πού εἶναι  $A = B$ , τότε τό καρτεσιανό γινόμενο  $A \times A$  συμβολίζεται μέ  $A^2$ , ὁπότε τό σύνολο τῶν ζευγῶν  $(\alpha, \alpha)$  μέ  $\alpha \in A$  συμβολίζεται μέ  $\Delta$  καί λέγεται *ἡ διαγώνιος* τοῦ  $A^2$ . Προφανῶς εἶναι:  $\Delta \subseteq A^2$ .

Ὑπενθυμίζουμε ἀκόμη ὅτι: **στό καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων δέν ἐπιτρέπεται ἡ ἀντιμετάθεση τῶν παραγόντων**, δηλαδή, γενικά, εἶναι:  $A \times B \neq B \times A$ .

**§ 14. Πράξεις μεταξύ συνόλων.**—Στά ἐπόμενα ὑποθέτουμε ὅτι τά σύνολα πού παίρνουμε εἶναι ὑποσύνολα ενός ὀρισμένου βασικοῦ συνόλου  $\Omega \neq \emptyset$ , δηλαδή στοιχεῖα τοῦ  $\mathcal{P}(\Omega)$ . Ὅπως ξέrouμε καί ἀπό τίς προηγούμενες τάξεις, μεταξύ τῶν στοιχείων τοῦ  $\mathcal{P}(\Omega)$  μπορούμε νά ὀρίσουμε μερικές **πράξεις**.

Ὑπενθυμίζουμε μέ συντομία αὐτές τίς πράξεις:

α). **Τομή δύο συνόλων.** Σέ κάθε ζεύγος  $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega) \times \mathcal{P}(\Omega)$  ἀντιστοιχεῖ ἕνα ὑποσύνολο τοῦ  $\Omega$ , πού λέγεται **τομή** τῶν  $A$  καί  $B$ , συμβολίζεται μέ  $A \cap B$  καί ὀρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$A \cap B \stackrel{\text{ορσ}}{=} \{x \in \Omega: x \in A \text{ καί } x \in B\}.$$

Δύο σύνολα  $A$  καί  $B$  λέγονται **ξένα μεταξύ τους**, τότε καί μόνο τότε, άν  $A \cap B = \emptyset$ .

Τό κενό σύνολο εἶναι ξένο μέ ὁποιοδήποτε σύνολο  $A$ , ἐπειδή ἰσχύει:

$$A \cap \emptyset = \emptyset \text{ καί } \emptyset \cap A = \emptyset.$$

β). **Ἑνωση δύο συνόλων.** Σέ κάθε ζεύγος  $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega) \times \mathcal{P}(\Omega)$  ἀντιστοιχεῖ ἕνα ὑποσύνολο τοῦ  $\Omega$ , πού λέγεται **ἑνωση** τῶν συνόλων  $A$  καί  $B$ , συμβολίζεται μέ  $A \cup B$  καί ὀρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$A \cup B \stackrel{\text{ορσ}}{=} \{x \in \Omega: x \in A \text{ εἴτε } x \in B\}.$$

Προφανῶς ἔχουμε:  $A \cup B = \emptyset \implies (A = \emptyset \text{ καί } B = \emptyset)$ .

**Σημείωση.** Ὑπενθυμίζουμε πῶς τό «εἴτε» σημαίνει ὅτι ἕνα ὁποιοδήποτε στοιχεῖο  $x$  τῆς ἑνώσεως ἀνήκει ἢ μόνο στό  $A$  ἢ μόνο στό  $B$  ἢ ἀνήκει καί στά δύο σύνολα  $A$  καί  $B$ .

γ). **Διαφορά δύο συνόλων (συνολοθεωρητική διαφορά).** Σέ κάθε ζεύγος  $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega) \times \mathcal{P}(\Omega)$  ἀντιστοιχεῖ ἕνα ὑποσύνολο τοῦ  $\Omega$ , πού λέγεται **διαφορά τοῦ συνόλου  $B$  ἀπό τό σύνολο  $A$** , συμβολίζεται μέ  $A - B$  καί ὀρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$A - B \stackrel{\text{ορσ}}{=} \{x \in \Omega: x \in A \text{ καί } x \notin B\}$$

Εἶναι προφανές ὅτι γιά ὁποιοδήποτε σύνολο  $A$  ἔχουμε:

$$A - A = \emptyset, \quad A - \emptyset = A \text{ καί } \emptyset - A = \emptyset.$$

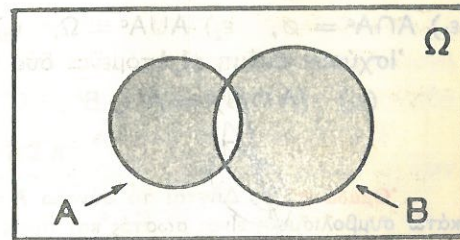
δ). **Συμμετρική διαφορά δύο συνόλων.** Σέ κάθε ζεύγος  $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega) \times \mathcal{P}(\Omega)$  ἀντιστοιχεῖ ἕνα ὑποσύνολο τοῦ  $\Omega$ , πού λέγεται **συμμετρική διαφορά** τῶν  $A$  καί  $B$ , συμβολίζεται μέ  $A + B$  καί ὀρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$A + B \stackrel{\text{ορσ}}{=} \{x \in \Omega: (x \in A \text{ καί } x \notin B) \text{ εἴτε } (x \in B \text{ καί } x \notin A)\}.$$

Ἀπό τόν πιό πάνω ὀρισμό συνάγουμε ὅτι:  $A + B = (A - B) \cup (B - A)$ .

Στό διάγραμμα τοῦ Venn, πού βρίσκεται δεξιά, παριστάνεται ἡ συμμετρική διαφορά  $A + B$  ἀπό τό σκιασμένο μέρος τῶν συνόλων  $A$  καί  $B$ .

Εἶναι φανερό ὅτι: άν  $A \cap B = \emptyset$ , τότε ἰσχύει:  $A + B = A \cup B$ .



ε). **Συμπλήρωμα συνόλου.** Ὀνομάζουμε **συμπλήρωμα** ενός συνόλου  $A$  ὡς πρὸς τό ὑπερσύνολο  $\Omega$  καί τό συμβολίζουμε μέ  $A^c$  ἢ  $A'$ , τό σύνολο πού ὀρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$A^c \stackrel{\text{ορσ}}{=} \{x \in \Omega: x \notin A\} = \Omega - A.$$

Ἀμεση συνέπεια τοῦ πιό πάνω ὀρισμοῦ εἶναι οἱ ἰσότητες:

$$\emptyset^c = \Omega \text{ καί } \Omega^c = \emptyset.$$

Ἐπίσης γιά ὁποιοδήποτε σύνολο  $A$  ἰσχύουν οἱ συνεπαγωγές:

$$\forall x, x \in A \implies x \notin A^c \text{ καί } \forall x, x \in A^c \implies x \notin A.$$



**§ 15. Ιδιότητες των πράξεων των συνόλων.**—Μεταξύ των πράξεων των συνόλων ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες (ταυτότητες στο  $\mathcal{P}(\Omega)$ ), που μᾶς είναι γνωστές και από τὰ μαθήματα των προηγούμενων τάξεων:

α) τῆς τομῆς:

$$\alpha_1) A \cap B = B \cap A$$

$$\alpha_2) A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$$

$$\alpha_3) A \cap A = A$$

$$\alpha_4) A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$$

$$\alpha_5) A \subseteq B \iff A \cap B = A$$

β) τῆς ἐνώσεως:

$$\beta_1) A \cup B = B \cup A$$

$$\beta_2) A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma$$

$$\beta_3) A \cup A = A$$

$$\beta_4) A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$$

$$\beta_5) A \subseteq B \iff A \cup B = B$$

Ισχύουν ἀκόμη οἱ ἐπόμενες δύο ἐπιμεριστικές ιδιότητες:

$$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$$

$$A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$$

**Παρατήρηση.** Οἱ ιδιότητες  $(\alpha_1), (\beta_1)$  εἶναι γνωστές ὡς νόμοι τῆς ἀντιμεταθέσεως, οἱ  $(\alpha_2), (\beta_2)$  ὡς νόμοι τῆς προσηταιριστικότητας καὶ οἱ  $(\alpha_3), (\beta_3)$  ὡς νόμοι τοῦ ἀδυνάμου των πράξεων  $\cup$  καὶ  $\cap$ . Τέλος, ἀπὸ τὶς ιδιότητες  $(\alpha_4), (\beta_4)$  προκύπτει ὅτι καθένα ἀπὸ τὰ σύνολα  $A, B$  εἶναι ὑπερσύνολο τῆς τομῆς  $A \cap B$  καὶ ὑποσύνολο τῆς ἐνώσεως  $A \cup B$ , δηλαδή:

$$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B,$$

$$A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B.$$

γ) τῆς διαφορᾶς:

$$\gamma_1) A - B = A \cap B^c$$

$$\gamma_2) A - B = (A \cup B) - B = A - (A \cap B)$$

$$\gamma_3) (A - B) \cap B = \emptyset, (A - B) \cup B = A \cup B$$

$$\gamma_4) A \subseteq B \iff A - B = \emptyset$$

δ) τῆς συμμετρικῆς διαφορᾶς:

$$\delta_1) A \dot{+} B = B \dot{+} A$$

$$\delta_2) A \dot{+} (B \dot{+} \Gamma) = (A \dot{+} B) \dot{+} \Gamma$$

$$\delta_3) A \dot{+} B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$\delta_4) A \cap (B \dot{+} \Gamma) = (A \cap B) \dot{+} (A \cap \Gamma)$$

ε) τοῦ συμπληρώματος:

$$\epsilon_1) A \cap A^c = \emptyset, \quad \epsilon_2) A \cup A^c = \Omega, \quad \epsilon_3) (A^c)^c = A, \quad \epsilon_4) A \subseteq B \iff B^c \subseteq A^c.$$

Ισχύουν ἀκόμη οἱ ἐπόμενοι δύο τύποι (**νόμοι τοῦ De Morgan**):

$$(\epsilon_5) (A \cap B)^c = A^c \cup B^c,$$

$$(\epsilon_6) (A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ (\*)

**Ὁμάδα Α'.** Δίνεται τὸ σύνολο  $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ . Νά βρεῖτε ποίος ἀπὸ τοὺς παρακάτω συμβολισμοὺς εἶναι σωστός καὶ ποίος λανθασμένος καὶ γιατί:

$$1) \{\alpha\} \in A, \quad 2) \alpha \subset A, \quad 3) \{\gamma\} \subset A, \quad 4) \{\alpha, \beta\} \in A, \quad 5) \{\emptyset, A, \{\alpha, \beta\}\} \subset A.$$

8. Τὸ δυναμοσύνολο ἑνὸς συνόλου  $E$  ἔχει 32 στοιχεῖα. Πόσα στοιχεῖα ἔχει τὸ  $E$ ;

9. \*Ἄν  $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$ , νά προσδιορίσετε τοὺς πραγμ. ἀριθμοὺς  $x, y$ , ὥστε νά ἰσχύει:

$$\{x^2 - y^2, x + y\} \subseteq \{\alpha, \beta\}.$$

10. \*Ἐστω  $A = \{x \in \mathbb{R} : -3 < x < 3\}$  καὶ  $B = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 2\}$ . Νά πάρετε ἓνα ὀρθοκανονικὸ σύστημα ἀξόνων  $xOy$  καὶ νά παραστήσετε στὸ ἐπίπεδο  $xOy$  τὰ καρτεσιανὰ γινόμενα  $A \times B, B \times A$ .

**Σημ.** Ὑπενθυμίζουμε ὅτι ἓνα σύστημα ἀξόνων λέγεται **ὀρθοκανονικό**, ἂν εἶναι ὀρθογώνιο καὶ ἂν οἱ μονάδες, πού ἔχουν ὀριστεῖ πάνω στοὺς ἀξόνες, ἔχουν ἴσα μήκη.

\* Ἀπὸ τὶς προτεινόμενες γιὰ λύση ἀσκήσεις αὐτοῦ τοῦ Κεφαλαίου νά δοθοῦν δσες κατὰ τὴν κρίση τοῦ διδάσκοντος ἀρκοῦν γιὰ τὴν ἐμπέδωση κάθε ἐνότητας.

**Ὁμάδα Β'.** 11. \*Ἄν  $A, B, \Gamma$  εἶναι ὑποσύνολα ἑνὸς βασικοῦ συνόλου  $\Omega$ , νά δείξετε ὅτι:

$$1) A \cap (A \cup B) = A = A \cup (A \cap B),$$

$$2) A - (B \cup \Gamma) = (A - B) \cap (A - \Gamma)$$

$$3) (A - B) \cup (A - B^c) = A,$$

$$4) A \dot{+} B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$$

$$5) (A - B) - (A - \Gamma) = A \cap \Gamma \cap B^c,$$

$$6) A - (B - \Gamma) = (A - B) \cup (B \cap \Gamma).$$

12. Νά δείξετε ὅτι γιὰ ὁποιαδήποτε σύνολα  $A, B, \Gamma$ , στοιχεῖα τοῦ  $\mathcal{P}(\Omega)$ , ἰσχύουν:

$$1) (A \cap B) \cap (A \cap \Gamma) = A \cap B \cap \Gamma,$$

$$2) A \dot{+} (A \cap B) = A - B$$

$$3) (A - B) \cup \Gamma = (A \cup \Gamma) \cap (B^c \cup \Gamma),$$

$$4) A - (A - B) = A \cap B$$

$$5) A \subseteq B \iff \Gamma - B \subseteq \Gamma - A,$$

$$6) A - (B \cap \Gamma) = (A - B) \cup (A - \Gamma).$$

13. \*Ἄν  $A, B, \Gamma, \Delta$  εἶναι στοιχεῖα τοῦ  $\mathcal{P}(\Omega)$ , νά δείξετε ὅτι ἰσχύουν οἱ τύποι:

$$1) A \subseteq \Gamma \wedge B \subseteq \Delta \implies A \times B \subseteq \Gamma \times \Delta,$$

$$2) A \times (B \cap \Gamma) = (A \times B) \cap (A \times \Gamma)$$

$$3) (A \times B) \cap (\Gamma \times \Delta) = (A \cap \Gamma) \times (B \cap \Delta),$$

$$4) A \times (B \cup \Gamma) = (A \times B) \cup (A \times \Gamma)$$

$$5) (A - B) \times (\Gamma - \Delta) = (A \times \Gamma) \cap (B^c \times \Delta^c),$$

$$6) (A - B) \times \Gamma = (A \times \Gamma) - (B \times \Gamma).$$

14. \*Ἄν  $A, B$  εἶναι ὑποσύνολα ἑνὸς βασικοῦ συνόλου  $\Omega$ , νά δείξετε ὅτι:

$$1) A \subseteq B \iff \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B), \quad 2) \mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B), \quad 3) \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B).$$

15. Νά δείξετε, ὅτι γιὰ ὁποιαδήποτε σύνολα  $A, B, \Gamma, \Delta$  ἰσχύουν οἱ παρακάτω τύποι:

$$1) (\Gamma \times \Delta) - (A \times B) = [(\Gamma - A) \times \Delta] \cup [\Gamma \times (\Delta - B)]$$

$$2) (A \times B)^c = (A^c \times B^c) \cup (A^c \times B) \cup (A \times B^c).$$

16. \*Ἄν  $A, B, X, Y$  εἶναι στοιχεῖα τοῦ  $\mathcal{P}(\Omega)$ , νά ἀποδείξετε τὶς συνεπαγωγές:

$$1) B \subseteq X \subseteq B \cup A \implies A \cap X = A \cap B,$$

$$2) A^c \cap B \subseteq Y \subseteq B \implies A \cup Y = A \cup B.$$

17. \*Ἄν  $A, B, \Gamma$  εἶναι δεδομένα σύνολα, νά βρεῖτε τὴν ἰκανὴ καὶ ἀναγκαίᾳ συνθήκη, ὥστε νά ὑπάρχουν σύνολα  $X$  γιὰ τὰ ὁποῖα θά εἶναι:  $A \cap X = B$  καὶ  $A \cup X = \Gamma$ . Κατόπιν νά προσδιορίσετε αὐτὰ τὰ σύνολα  $X$  συναρτήσει τῶν  $A, B, \Gamma$ .



**ΑΞΙΩΜΑΤΑ PEANO—ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ Η ΤΕΛΕΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ**

**§ 16. Εισαγωγή.**—Για τους διαφόρους κλάδους των Μαθηματικών έχουν κατασκευασθεί συστήματα από «*χαρακτηριστικές*» (θεμελιώδεις) ιδιότητες, στις οποίες στηρίζεται ολόκληρη ή θεωρία. Έτσι, για κάθε κλάδο δίνεται ένας ελάχιστος αριθμός χαρακτηριστικών ιδιοτήτων, από τις οποίες κατόπιν προκύπτει οποιαδήποτε άλλη ιδιότητα. Δηλαδή, αν θεωρήσουμε αληθείς αυτές τις (χαρακτηριστικές) ιδιότητες, μπορούμε να αποδείξουμε, με αυστηρό μαθηματικό τρόπο, οποιαδήποτε άλλη ιδιότητα. Αυτές τις «χαρακτηριστικές» ιδιότητες τις ονομάζουμε *αξιώματα*.

Στά Μαθηματικά για να είναι ένα τέτοιο σύστημα αξιωμάτων «*παραδεκτό*», πρέπει να έχει τα εξής τρία γνωρίσματα:

α). Να είναι *πλήρες*, δηλαδή πρέπει να στηρίζει και να καλύπτει ολόκληρη τη θεωρία για την οποία έχει κατασκευασθεί.

β). Να είναι *ανεξάρτητο*, δηλ. δεν πρέπει κανένα από τα αξιώματά του να είναι συνέπεια άλλων αξιωμάτων του συστήματος, και

γ). Να είναι *ελεύθερο αντιφάσεων*, δηλ. αν μία πρόταση είναι συνέπεια των αξιωμάτων του συστήματος, δεν πρέπει και η άρνησή της να είναι συνέπεια επίσης των ίδιων αξιωμάτων. Με άλλα λόγια, όταν το σύστημα αυτό δεν οδηγεί σε μία αντίφαση της μορφής: «*p είναι αληθές και p είναι ψευδές*».

Ένα τέτοιο σύστημα αξιωμάτων, με το οποίο εισάγονται στά Μαθηματικά οι φυσικοί αριθμοί είναι το εξής:

**§ 17. Αξιώματα των φυσικών αριθμών κατά Peano\*.** — Οι φυσικοί αριθμοί, που το σύνολό τους συμβολίζουμε με  $N$ , έχουν τις ακόλουθες «*χαρακτηριστικές*» ιδιότητες (αξιώματα):

$P_1$ : Υπάρχει ένας τουλάχιστο φυσικός αριθμός, ο  $1$ , δηλ.  $1 \in N$ .

$P_2$ : Κάθε φυσικός αριθμός  $n$  έχει έναν «*επόμενο*» φυσικό αριθμό, που τον συμβολίζουμε με  $n + 1$ , δηλ. αν  $n \in N$ , τότε και  $n + 1 \in N$ .

$P_3$ : Δεν υπάρχει φυσικός αριθμός που να έχει επόμενο τον  $1$ , δηλ. για κάθε  $n \in N$  είναι  $n + 1 \neq 1$ .

$P_4$ : Δεν υπάρχουν διαφορετικοί μεταξύ τους φυσικοί αριθμοί που να έχουν

\* G. Peano (1858 - 1932). Ιταλός μαθηματικός και φιλόσοφος.

τόν ίδιο επόμενο, δηλ. αν  $m \in N$ ,  $n \in N$  και  $m + 1 = n + 1$ , τότε είναι  $m = n$ .

✓  $P_5$ : Αν για ένα υποσύνολο  $S$  του  $N$ , ισχύουν:

(i)  $1 \in S$ ,

(ii) αν  $n \in S$ , τότε και  $(n + 1) \in S$ ,

τότε το σύνολο  $S$  συμπίπτει με το σύνολο  $N$  των φυσικών αριθμών, δηλ.  $S = N$ .

Οι παραπάνω πέντε ιδιότητες  $P_1 - P_5$  του συνόλου  $N$  είναι γνωστές ως: *τά αξιώματα του Peano* για το σύνολο  $N$  των φυσικών αριθμών.

Τό αξίωμα  $P_5$  λέγεται: «*η αρχή της τέλει*» (ή *μαθηματικής επαγωγής*) και διατυπώνεται συμβολικά ως εξής:

$$\left( \begin{array}{l} 1 \in S \\ n \in S \Rightarrow n + 1 \in S \end{array} \right) \Rightarrow S = N.$$

Σ' αυτή την αρχή στηρίζεται, όπως θά δούμε παρακάτω, μία γενική μέθοδος αποδείξεως που χρησιμοποιείται στά Μαθηματικά προκειμένου να αποδειχθεί ότι ένας προτ. τύπος  $p(n)$ , που εκφράζεται με τη βοήθεια κάποιου φυσικού αριθμού  $n$ , έχει ισχύ για όλες γενικά τις τιμές του φυσικού αριθμού  $n$ . Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή ως: *μέθοδος αποδείξεως με τέλεια ή μαθηματική επαγωγή* ή *άλλιως: μέθοδος της επαγωγικής αποδείξεως*.

**Σχόλια:** 1). Τό αξίωμα  $P_1$  μς εξασφαλίζει ότι το σύνολο  $N$  είναι διάφορο από το κενό, περιέχει τό φυσικό αριθμό *ένα* (συμβολικά:  $1$ ).

2). Τό αξίωμα  $P_2$  δίνει τη γενική μέθοδο της κατασκευής των φυσικών αριθμών. Έτσι με αφηρητά τό φυσικό αριθμό  $1$ , για τόν οποίο έγινε λόγος στό προηγούμενο αξίωμα, κατασκευάζεται κάθε άλλος φυσικός αριθμός. Αν τόν επόμενο του  $1$  συμβολίσουμε με  $2$ , τόν επόμενο του  $2$  με  $3$ , τόν επόμενο του  $3$  με  $4$  κ.ο.κ. θά έχουμε ότι:

$$N = \{1, 2, 3, \dots, n, n + 1, \dots\}$$

Πράγματι, αν καλέσουμε  $S$  τό σύνολο  $\{1, 2, 3, \dots, n, n + 1, \dots\}$ , έχουμε:  $S \subseteq N$ . Έξάλλου  $1 \in S$  και αν  $k \in S$ , τότε θά είναι και  $k + 1 \in S$ , επειδή έτσι κατασκευάσαμε τό σύνολο  $S$ . Τότε όμως, σύμφωνα με την αρχή της τέλει επαγωγής, θά είναι  $N = S = \{1, 2, \dots, n, n + 1, \dots\}$ .

3). Από τά αξιώματα  $P_2$  και  $P_3$  συνάγεται ότι οι φυσικοί αριθμοί  $n$  και  $n + 1$  είναι διαδοχικοί, δηλ. μεταξύ τους δεν υπάρχει άλλος φυσικός αριθμός, άρα κάθε φυσικός αριθμός έχει ακριβώς έναν «*επόμενο*» (γιατί;). Έξάλλου για τό φυσικό αριθμό  $1$  έχουμε:  $1 \leq n$  για κάθε  $n \in N$ , γι' αυτό και ο  $1$  λέγεται ο *ελάχιστος* από τούς φυσικούς αριθμούς (δηλ. *μικρότερος απ' όλους τούς φυσικούς αριθμούς*).

4). Με  $=$  συμβολίζουμε στό  $P_4$  τη «*βασική ισότητα*» στό  $N$ , δηλαδή την ισότητα που επιτρέπει να διακρίνουμε τά στοιχεία του  $N$  μεταξύ τους.

✓ **§ 18. Η μέθοδος αποδείξεως με μαθηματική ή τέλεια επαγωγή.**—Πρίν διατυπώσουμε τό θεώρημα από τό οποίο απορρέει ή μέθοδος αποδείξεως με τέλεια επαγωγή (μέθοδος της τέλει επαγωγής) θά αναφερθούμε σ' ένα παράδειγμα:

**Παράδειγμα:** Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό  $n$  ισχύει ο τύπος:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 3) + (2n - 1) = n^2 \quad (\tau)$$



Πράγματι για  $n = 1$  ο προηγούμενος τύπος γράφεται:  $1 = 1^2$ , το οποίο είναι αληθές. \*Ας δεχθούμε τώρα ότι ο τύπος αυτός ισχύει για  $n = k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), δηλ. ότι ισχύει:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k-3) + (2k-1) = k^2$$

τότε, αν προσθέσουμε και στά δύο μέλη της τό  $2k + 1$ , θά έχουμε:

$$[1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1)] + (2k+1) = k^2 + (2k+1).$$

\*Αλλά:  $[1 + 3 + \dots + (2k-1)] + (2k+1) = 1 + 3 + \dots + [2(k+1)-3] + 2(k+1) - 1$ .  
εξάλλου:  $k^2 + (2k+1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$

και επομένως:  $1 + 3 + 5 + \dots + [2(k+1)-3] + [2(k+1)-1] = (k+1)^2$ .

\*Ωστε αποδείξαμε ότι: υποθέτοντας ότι ο τύπος (τ) ισχύει για  $n = k$ , αποδεικνύεται ότι αυτός ισχύει και για  $n = k + 1$ . Επομένως, επειδή ήδη έχει διαπιστωθεί ότι ο τύπος (τ) ισχύει για  $n = 1$ , θά ισχύει για  $n = 2$ . Ομοίως αφού ισχύει για  $n = 2$ , θά ισχύει ο (τ) και για τόν επόμενο του, δηλ. για  $n = 3$  και διαδοχικά για  $n = 4, n = 5, \dots$ , δηλ. για κάθε φυσικό αριθμό  $n$ .

Τό ακόλουθο θεώρημα θεμελιώνει την αποδεικτική μέθοδο, πού ακολουθήσαμε στό προηγούμενο παράδειγμα.

✓ **§ 19. Θεώρημα (πρώτη μορφή της τέλει επαγωγής).**—\*Αν  $p(n)$  είναι ένας προτασιακός τύπος μέ σύνολο αναφοράς τό σύνολο  $N$  τών φυσικών αριθμών, τέτοιος ώστε:

α) νά είναι αληθής ή πρόταση  $p(1)$ , και

β) νά είναι αληθής ή πρόταση:  $\forall k \in N, p(k) \Rightarrow p(k+1)$ ,

τότε (δηλ. όταν συμβαίνουν τά α) και β)) ο προτασιακός τύπος  $p(n)$  είναι αληθής (ισχύει) για κάθε  $n \in N$ .

\*Απόδειξη. \*Εστω  $S$  τό σύνολο, τό οποίο περιγράφει ο προτασιακός τύπος  $p(n)$ , δηλαδή:  $S = \{n \in N: p(n)\}$ .

Γιά τήν απόδειξη του θεωρήματος αρκεί νά αποδείξουμε ότι τό σύνολο  $S$  έχει τίς ιδιότητες (i) και (ii) του αξιώματος  $P_5$  του Peano. Πράγματι,

(i)  $1 \in S$ , γιατί ή πρόταση  $p(1)$  είναι από τήν υπόθεση (α) αληθής. \*Επίσης για κάθε  $k \in S \Rightarrow p(k) \Rightarrow$  (από τή β))  $p(k+1) \Rightarrow (k+1) \in S$ , δηλαδή: (ii) αν  $n \in S$ , τότε και  $(n+1) \in S$ .

Τότε όμως, σύμφωνα μέ τό αξίωμα  $P_5$  του Peano, θά είναι  $S = N$ , δηλ. τό σύνολο τιμών αλήθειας του προτασιακού τύπου  $p(n)$  είναι τό  $N$ , πού σημαίνει ότι ο  $p(n)$  για κάθε  $n \in N$  είναι μία πρόταση αληθής.

**Σημείωση.** \*Η εφαρμογή της μεθόδου της μαθηματικής ή τέλει επαγωγής γίνεται στήν πράξη σέ τρία στάδια, ως εξής:

α). \*Επαλήθευση. \*Αποδεικνύουμε ότι ή πρόταση  $p(1)$  είναι αληθής.

β). Βήμα από τό  $k$  στό  $k+1$ . Θεωρούμε έναν (όποιοδήποτε) φυσικό αριθμό  $k$  και μέ τήν υπόθεση ότι ή πρόταση  $p(k)$  είναι αληθής, αποδεικνύουμε, τότε, ότι και ή πρόταση  $p(k+1)$  είναι αληθής.

γ). Συμπέρασμα. Συνδυάζοντας τά α) και β) συμπεραίνουμε, σύμφωνα μέ τό παραπάνω θεώρημα της τέλει επαγωγής, ότι:  $p(n)$  αληθής (ισχύει) για κάθε  $n \in N$ .

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

✓ **1η:** Νά αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό  $n$  ισχύει ο τύπος:

$$p(n): \quad 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (1)$$

\*Απόδειξη α) Για  $n = 1$  ή (1) γίνεται:  $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ , αληθές.

β) \*Ας δεχθούμε ότι ή (1) ισχύει για  $n = k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), δηλ. ότι:

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2} \quad (2)$$

Θά αποδείξουμε τώρα ότι ή (1) ισχύει και για  $n = k + 1$ , δηλ. ότι:

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad (3)$$

Πράγματι, αν προσθέσουμε και στά δύο μέλη της (2) τό  $(k+1)$  έχουμε:

$$(1 + 2 + 3 + \dots + k) + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}, \text{ δηλαδή ή}$$

(3) ισχύει.

γ) Συμπέρασμα: Στό α) αποδείξαμε ότι  $p(1)$  είναι αληθής. Στό β) αποδείξαμε ότι: αν  $p(k)$  είναι αληθής, τότε και ή πρόταση  $p(k+1)$  είναι αληθής\*. Συνεπώς, σύμφωνα μέ τό θεώρημα της τέλει επαγωγής, ή (1) ισχύει για κάθε  $n \in N$ .

✓ **2η:** \*Αν  $a$  είναι ένας πραγμ. αριθμός μέ  $a \geq -1$ , τότε για κάθε φυσικό αριθμό  $n$  ισχύει:  $q(n): \quad (1+a)^n \geq 1+na$  (ανισότητα του Bernoulli).

\*Απόδειξη. α) Για  $n = 1$ , ή παραπάνω σχέση ισχύει ως ισότητα.

β) \*Εστω ότι ισχύει για  $n = k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), δηλ. ότι:

$$(1+a)^k \geq 1+ka \quad (1)$$

Θά αποδείξουμε ότι ο  $q(n)$  ισχύει και για  $n = k + 1$ , δηλ. ότι:

$$(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a. \quad (2)$$

Πράγματι, αν πολλαπλασιάσουμε και τά δύο μέλη της (1) επί  $1+a$  (τό  $1+a$  είναι μή αρνητικός αριθμός, επειδή  $a \geq -1$ ) έχουμε:

$$(1+a)^{k+1} \geq (1+a)(1+ka) = 1+ka+a+ka^2 \geq 1+(k+1)a, \text{ γιατί: } ka^2 \geq 0.$$

\*Αρα ή (2) ισχύει. Συνεπώς, σύμφωνα μέ τό θεώρημα της τέλει επαγωγής, ή ανισότητα του Bernoulli ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό  $n$ , (μέ τήν υπόθεση φυσικά ότι  $a \geq -1$ ).

\***Ασκήση.** Νά εξετάσετε για ποιές τιμές τών  $a$  και  $n$  ο προτ. τύπος  $q(n)$  ισχύει μέ τό ίδιον;

**3η:** Νά προσδιορίσετε ένα φυσικό αριθμό  $n_0$ , ώστε νά αληθεύει ή συνεπαγωγή:

$$n \geq n_0 \Rightarrow 3^n > 100 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Λύση. \*Εφαρμόζοντας τήν ανισότητα του Bernoulli μέ  $a = 2$  έχουμε:

$$3^n = (1+2)^n \geq 1+2n.$$

Γιά νά είναι  $3^n > 100$  αρκεί:  $1+2n > 100 \Leftrightarrow 2n > 99$  και  $n \geq n_0 = 50 \Rightarrow 3^n > 100$ .

✓ **\*Αξιόλογη παρατήρηση.** Πολλές φορές συμβαίνει ένας προτασιακός τύπος  $p(n)$  νά έχει ως σύνολο αναφοράς ένα γνήσιο υποσύνολο του συνόλου  $N$ . Στήν περίπτωση αυτή τό θεώρημα της τέλει επαγωγής ισχύει (προφανώς) μέ τήν εξής όμως διατύπωση:

\*Αν  $p(n)$  είναι ένας προτασιακός τύπος μέ σύνολο αναφοράς τό  $N_{n_0} \equiv \{n \in N: n \geq n_0\}$ , όπου  $n_0 \in N$ , τέτοιος ώστε:

\* Είναι φανερό ότι στήν απόδειξη δέν έπαιξε ρόλο ποιός ήταν ο  $k$ .



α) να είναι αληθής ή πρόταση  $p(v)$ , και  
 β) να είναι αληθής ή πρόταση:  $\forall k \in N_{v_0}, p(k) \Rightarrow p(k+1)$ ,  
 τότε ο προτασιακός τύπος  $p(v)$  ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό  $v$  με  $v \geq v_0$ .

**Εφαρμογή.** Νά δείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό  $v \geq 3$  ισχύει:  $3^v > (v+1)^2$

**Απόδειξη.** α) Για  $v_0 = 3$  ή (1) γίνεται:  $3^3 > (3+1)^2$ , δηλ.  $27 > 16$ , αληθής.

β) Έστω ότι για  $v = k$  ( $k \in N, k \geq 3$ ) ή (1) ισχύει, δηλ. ότι:  $3^k > (k+1)^2$   
 Θά δείξουμε ότι ή (1) ισχύει και για  $v = k+1$ , δηλ. ότι:  $3^{k+1} > (k+2)^2$   
 Πράγματι, έπειδή από τη (2) έχουμε:

$$3 \cdot 3^k > 3(k+1)^2, \text{ δηλ. } 3^{k+1} > 3(k+1)^2$$

άρκει να δείξουμε ότι:  $3(k+1)^2 > (k+2)^2 \Leftrightarrow 3k^2 + 6k + 3 > k^2 + 4k + 4$ , δηλ.

$$2k^2 + 2k > 1 \Leftrightarrow 2k(k+1) > 1.$$

Η τελευταία όμως ανισότητα ισχύει, γιατί  $k \geq 3$ .

\*Αρα ή (3) ισχύει. Συνεπώς, σύμφωνα με την προηγούμενη παρατήρηση, ή (1) ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό  $v \geq 3$ .

**Σχόλια:** 1) Η επαλήθευση μιās προτάσεως για διάφορες διαδοχικές τιμές του φυσικού αριθμού  $v$ , π.χ. για  $v = 1, 2, 3, \dots, v_0$  δεν αρκεί για να συμπεράνουμε ότι ή πρόταση ισχύει για κάθε  $v \in N$  (άτελής επαγωγή)..

**Αντιπαράδειγμα:** \*Αν  $v$  φυσικός αριθμός, τότε ο αριθμός  $(v^2 + v + 41)$  είναι πρώτος; Έδω παρατηρούμε ότι για τις πρώτες τριάντα εννιά τιμές του  $v$  ή πρόταση αληθεύει, δηλ. για  $v = 1, 2, 3, \dots, 39$  ο αριθμός  $(v^2 + v + 41)$  είναι πρώτος (δηλ. δεν έχει άλλο διαιρέτη εκτός από τον εαυτό του και τη μονάδα). όμως για  $v = 40$  ο αριθμός:  $40^2 + 40 + 41 = 41^2$  δεν είναι πρώτος.

2) Η απόδειξη μιās προτάσεως για  $v = k+1$ , με την προϋπόθεση ότι αυτή ισχύει για  $v = k$  ( $k \in N$ ), δεν εξασφαλίζει πάντοτε την αλήθεια της προτάσεως  $\forall v \in N$ . Πρέπει όπως και να κάνουμε την επαλήθευση για  $v = 1$  (ή, αν δεν έχει νόημα για  $v = 1$ , πρέπει να κάνουμε την επαλήθευση για  $v = v_0$ , όπου  $v_0$  ο ελάχιστος φυσικός αριθμός για τον οποίο έχει νόημα ή πρόταση).

**Αντιπαράδειγμα:** \*Ας υποθέσουμε ότι ή ισότητα: « $v = v + 17$ » ισχύει για  $v = k$ , χωρίς να έχουμε προηγουμένως εξακριβώσει αν αυτή ισχύει για  $v = 1$ , δηλ. έστω ότι:  $k = k + 17$ . Μπορούμε, τότε, εύκολα να δείξουμε ότι αυτή ή ισότητα ισχύει και για  $v = k + 1$ . Πράγματι, έχουμε:

$$k = k + 17 \Leftrightarrow k + 1 = (k + 17) + 1 \Leftrightarrow k + 1 = (k + 1) + 17.$$

Αυτό όμως δεν αρκεί για να συμπεράνουμε ότι ή ισότητα:  $v = v + 17$  ισχύει για κάθε  $v \in N$  (στο παράδειγμά μας μάλιστα διαπιστώνουμε άμέσως πώς δεν υπάρχει καμιά τιμή του  $v$  για την οποία αληθεύει ή ισότητα).

**§ 20. Δεύτερη μορφή της τέλειας ή μαθηματικής επαγωγής.**— Μία άλλη μορφή αποδεικτικής μεθόδου που στηρίζεται επίσης στην αρχή της μαθηματικής επαγωγής θεμελιώνεται με τό επόμενο:

**Θεώρημα (δεύτερη μορφή της τέλειας επαγωγής).**— \*Αν  $p(v)$  είναι ένας προτασιακός τύπος με σύνολο αναφοράς τό σύνολο  $N$  των φυσικών αριθμών τέτοιος, ώστε:

α) να είναι αληθείς οι προτάσεις:  $p(1), p(2)$ , και

β) για κάθε  $k \in N$  με  $k > 2$ ,  $p(k-2) \wedge p(k-1) \Rightarrow p(k)$ ,  
 τότε ο προτασιακός τύπος  $p(v)$  είναι αληθής (ισχύει) για κάθε  $v \in N$ .

**Υπόδειξη.** Νά πάρετε τό σύνολο  $S = \{v \in N : v=1 \text{ ή } (p(v-2) \wedge p(v-1))\}$  και να αποδείξετε ότι τό  $S$  έχει τις ιδιότητες (i) και (ii) του αξιώματος  $P_5$  του Peano. \*Αρα...

Θά δώσουμε και μία άλλη απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος, στηριζόμενοι όμως στην εξής πρόταση που αποδεικνύεται στα Μαθηματικά:

**Πρόταση (αρχή του ελάχιστου φυσικού αριθμού).**— \*Αν  $S$  είναι ένα μη κενό υποσύνολο του  $N$ , τότε τό  $S$  έχει ένα ελάχιστο στοιχείο, δηλ. τότε υπάρχει ένας (ακριβώς) φυσικός αριθμός  $v_0 \in S$  με την ιδιότητα:  $v_0 \leq v$  για κάθε  $v \in S$ .

**Απόδειξη του θεωρήματος.** Έστω  $T$  τό σύνολο, τό οποίο περιγράφει ο προτ. τύπος:  $\sim p(v)$ , δηλαδή:  $T = \{v \in N : \sim p(v)\}$ . Είναι φανερό πώς για κάθε  $v \in T$  ή αντίστοιχη πρόταση  $p(v)$  δεν είναι αληθής. Προφανώς  $1 \notin T$  καθώς και  $2 \notin T$ . \*Ας δεχτούμε ότι τό  $T$  δεν είναι τό κενό σύνολο: τότε, καθώς και  $2 \notin T$ , τό  $T$  έχει ελάχιστο στοιχείο, έστω τό  $v_0 \in T$ . Τότε έχουμε:  $v_0 > 2$  και ή πρόταση  $p(v_0)$  δεν είναι αληθής, ενώ για κάθε  $v \in N$  με  $v < v_0$  ή αντίστοιχη πρόταση  $p(v)$  είναι αληθής. Είναι όμως:  $2 \leq v_0 - 1 < v_0$  και  $1 \leq v_0 - 2 < v_0$  και συνεπώς οι προτάσεις  $p(v_0 - 2)$  και  $p(v_0 - 1)$  είναι αληθείς. Τότε όμως, σύμφωνα με την υπόθεση β) του θεωρήματος, θά είναι αληθής ή  $p(v_0)$ : αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί  $v_0 \in T$ . Είναι λοιπόν  $T = \emptyset$  και συνεπώς ό  $p(v)$  είναι αληθής (ισχύει) για κάθε  $v \in N$ .

**Σημείωση.** Για να αποδείξουμε μία πρόταση της μορφής ( $\forall v \in N, p(v)$ ) στηριζόμενοι στο προηγούμενο θεώρημα, εκτελούμε τά εξής τρία βήματα:

α). \*Αποδεικνύουμε ότι καθεμία από τις προτάσεις  $p(1)$  και  $p(2)$  είναι αληθής.

β). Θεωρούμε ένα (οποιοδήποτε) φυσικό αριθμό  $k$ , ( $k > 2$ ), και με την υπόθεση ότι καθεμία από τις προτάσεις  $p(k-2)$  και  $p(k-1)$  είναι αληθής, αποδεικνύουμε ότι και ή πρόταση  $p(k)$  είναι αληθής.

γ). Συνδυάζοντας τά α) και β) συμπεραίνουμε, σύμφωνα με τό παραπάνω θεώρημα, ότι:  $p(v)$  αληθής (ισχύει) για κάθε  $v \in N$ .

**Εφαρμογή.** Νά αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό  $v$  ισχύει:

$$p(v): (3 + \sqrt{5})^v + (3 - \sqrt{5})^v = \text{πολ. } 2^v.$$

**Απόδειξη.** Θετούμε  $S_v = (3 + \sqrt{5})^v + (3 - \sqrt{5})^v$ . Για  $v = 1$  και  $v = 2$  έχουμε αντι-

$$\text{στοίχως: } S_1 = (3 + \sqrt{5}) + (3 - \sqrt{5}) = 6 = 3 \cdot 2^1 = \text{πολ. } 2^1$$

$$S_2 = (3 + \sqrt{5})^2 + (3 - \sqrt{5})^2 = 28 = 7 \cdot 2^2 = \text{πολ. } 2^2.$$

\*Αρα καθεμία από τις προτάσεις  $p(1)$  και  $p(2)$  είναι αληθής.

\*Έστω ότι καθεμία από τις προτάσεις  $p(k-2)$  και  $p(k-1)$ , όπου  $k \in N$  με  $k > 2$  είναι αληθής, δηλαδή έστω ότι:

$$S_{k-2} = (3 + \sqrt{5})^{k-2} + (3 - \sqrt{5})^{k-2} = \text{πολ. } 2^{k-2} \text{ και} \quad (1)$$

$$S_{k-1} = (3 + \sqrt{5})^{k-1} + (3 - \sqrt{5})^{k-1} = \text{πολ. } 2^{k-1} \quad (2)$$

Θά αποδείξουμε ότι και ή πρόταση  $p(k)$  είναι αληθής. Πράγματι, ας σχηματίσουμε την εξίσωση β' βαθμού που έχει ρίζες τούς αριθμούς:  $x_1 = 3 + \sqrt{5}$  και  $x_2 = 3 - \sqrt{5}$ .

$$\text{Αυτή είναι ή: } x^2 - 6x + 4 = 0$$

$$\text{*Έχουμε τότε: } (3 + \sqrt{5})^2 - 6(3 + \sqrt{5}) + 4 = 0 \quad (3)$$

$$(3 - \sqrt{5})^2 - 6(3 - \sqrt{5}) + 4 = 0 \quad (4)$$



\*Από τις (3) και (4), αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη τους με  $x_1^{k-2} = (3 + \sqrt{5})^{k-2}$ ,  $x_2^{k-2} = (3 - \sqrt{5})^{k-2}$ , αντίστοιχως, λαμβάνουμε:

$$(3 + \sqrt{5})^k - 6(3 + \sqrt{5})^{k-1} + 4(3 + \sqrt{5})^{k-2} = 0 \quad (3')$$

$$(3 - \sqrt{5})^k - 6(3 - \sqrt{5})^{k-1} + 4(3 - \sqrt{5})^{k-2} = 0 \quad (4')$$

\*Αν προσθέσουμε τις (3') και (4') κατά μέλη και λάβουμε υπόψη και τις (1) και (2), βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned} S_k - 6S_{k-1} + 4S_{k-2} &= 0 \\ S_k &= 6S_{k-1} - 4S_{k-2} \end{aligned} \quad (5)$$

\*Αρα:

\*Η (5), αν λάβουμε υπόψη τις (1) και (2), γίνεται:

$$S_k = 6 \cdot \text{πολ } 2^{k-1} - 4 \cdot \text{πολ } 2^{k-2} = 3 \cdot \text{πολ } 2^k - \text{πολ } 2^k = \text{πολ } 2^k,$$

δηλ. η  $p(k)$  είναι αληθής. Συνεπώς, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, ο  $p(v)$  ισχύει για κάθε  $v \in \mathbb{N}$ .

**Παρατήρηση.** Μερικές φορές συμβαίνει ένας προτασιακός τύπος  $p(v)$  να έχει ως σύνολο αναφοράς ένα γνήσιο υποσύνολο του  $\mathbb{N}$ . Τότε η δεύτερη μορφή της τελείας επαγωγής εφαρμόζεται ως εξής:

α). Αποδεικνύουμε την αλήθεια των προτάσεων  $p(v_0)$ ,  $p(v_0 + 1)$ , όπου  $v_0 \in \mathbb{N}$ .

β). Αποδεικνύουμε ότι η αλήθεια των  $p(k)$  και  $p(k + 1)$  συνεπάγεται την αλήθεια της  $p(k + 2)$ , όπου  $k$  ο οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός  $\geq v_0$ .

γ). Από τα (α) και (β) προκύπτει, τότε, η αλήθεια της  $p(v)$  για κάθε φυσικό αριθμό  $v \geq v_0$ .

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**\*Ομάδα Α'. 18.** Με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής να αποδείξετε ότι για κάθε  $v \in \mathbb{N}$  ισχύει:

α)  $2 + 4 + 6 + \dots + 2v = v(v + 1)$

β)  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + v^2 = \frac{1}{6} v(v + 1)(2v + 1)$

γ)  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + v^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + v)^2 = \frac{1}{4} v^2(v + 1)^2$

δ)  $2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2v)^3 = 2v^2(v + 1)^2$

ε)  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + v(v + 1) = \frac{1}{3} v(v + 1)(v + 2)$

**19.** \*Αν  $0 < \alpha_i \neq 1$  για κάθε  $i = 1, 2, \dots, v$ , να αποδείξετε με επαγωγή ότι:

$$(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_v) > 2^v \cdot \sqrt{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_v} \quad (\forall v \in \mathbb{N}).$$

**20.** Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό  $v \geq 4$  ισχύει:

(i)  $\left(\frac{3}{2}\right)^v > v + 1$ , (ii)  $3^{v-1} > v^2$ , (iii)  $\sqrt[3]{3} > \sqrt[v]{v}$ .

**21.** Με τη μέθοδο της τελείας επαγωγής να αποδείξετε ότι: αν  $\alpha \in \mathbb{R}$  με  $0 \leq \alpha \leq 1$ , τότε για κάθε φυσικό αριθμό  $v$  ισχύει:

1)  $(1 - \alpha)^v \geq 1 - v\alpha$ , 2)  $(1 - \alpha)^v \leq \frac{1}{1 + v\alpha}$ .

**22.** \*Αν  $\alpha > 1$ , να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό  $v \geq 2$  ισχύει:

$$0 < \sqrt[v]{\alpha} - 1 < \frac{1}{v} (\alpha - 1).$$

**23.** \*Αν  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v \in \mathbb{R}^+$  και  $\sigma_v = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v$ , να αποδείξετε ότι:

(1)  $(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_v) \geq 1 + \sigma_v \quad \forall v \in \mathbb{N}$

(2)  $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v) \left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_v} \right) \geq v^2 \quad \forall v \in \mathbb{N}$ .

**\*Ομάδα Β'. 24.** Να αποδείξετε, εφαρμόζοντας την αρχή της τελείας επαγωγής, ότι: αν για ένα υποσύνολο  $K$  του συνόλου  $\mathbb{N}$  των φυσικών αριθμών ισχύουν:

(i)  $1 \notin K$  και (ii) αν  $v \notin K$ , τότε και  $(v + 1) \notin K$ , τότε το  $K$  είναι το κενό σύνολο (δηλ.  $K = \emptyset$ ).

**25.** Να αποδείξετε ότι ο προτ. τύπος  $p(v)$ :  $2 + 2^2 + \dots + 2^v = 2^{v+1} - 2$  δεν είναι αληθής, αν και από την αλήθεια της  $p(k)$  συνεπάγεται η αλήθεια της  $p(k + 1)$ . Κατόπιν να αποδείξετε ότι η άρνηση του προτ. τύπου  $p(v)$  είναι πρόταση αληθής για κάθε  $v \in \mathbb{N}$ .

**26.** \*Αν  $\theta \in \mathbb{R}$  με  $\theta \geq 1$ , τότε για κάθε  $v \in \mathbb{N}$ , να αποδείξετε ότι ισχύει:

(i)  $\theta^v \geq v(\theta - 1)$ , (ii)  $\theta^{v+1} \geq (v + 1)\theta - v$ .

**27.** Με τη μέθοδο της τελείας επαγωγής να αποδείξετε ότι ο αριθμός:

$$\alpha_v = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^v - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^v \right]$$

είναι φυσικός για κάθε  $v \in \mathbb{N}$ .

**28.** \*Αν  $\alpha^2 - \beta^2 \cdot \gamma = \text{πολ.4}$ , όπου  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$  με  $\gamma \geq 0$ , τότε να αποδείξετε, εφαρμόζοντας τη δεύτερη μορφή της τελείας επαγωγής, ότι για κάθε  $v \in \mathbb{N}$  ισχύει:

$$S_v \equiv (\alpha + \beta\sqrt{\gamma})^v + (\alpha - \beta\sqrt{\gamma})^v = \text{πολ.2}.$$



## ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

### ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ

#### ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ

#### ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΚΑΙ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

##### Ι. ΟΡΙΣΜΟΙ – ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

§ 21. **Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού.**— Η έννοια της απόλυτης τιμής πραγματικού αριθμού μᾶς είναι γνωστή από την προηγούμενη τάξη. Εκεί μάθαμε ότι: **απόλυτη τιμή** (ή **μέτρο**) **ένός πραγματικού αριθμού**  $a$ , πού την είχαμε συμβολίσει με  $|a|$ , είναι ο ίδιος ο αριθμός  $a$ , αν είναι θετικός ή μηδέν και ο αντίθετός του  $-a$ , αν ο αριθμός είναι αρνητικός.

Ωστε:

$$|a| \equiv_{\text{ορσ}} \begin{cases} a, & \text{αν } a \geq 0 \\ -a, & \text{αν } a < 0 \end{cases}$$

**Παραδείγματα:**  $|+8|=8$ ,  $|-4|=-(-4)=4$ ,  $|\frac{-3}{4}|=-(-\frac{3}{4})=\frac{3}{4}$ .

Από τον προηγούμενο ορισμό συμπεραίνουμε ότι η παράσταση  $|a|$  δέ γίνεται ποτέ αρνητική· είναι, όπως λέμε, ένας **μή αρνητικός αριθμός** και μάλιστα:

$$|a| > 0 \iff a \neq 0 \quad \text{και} \quad |a| = 0 \iff a = 0.$$

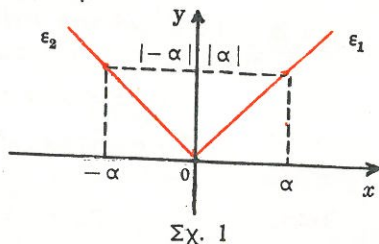
Άμεσες συνέπειες του πιο πάνω ορισμού, πού τις ξέρουμε και από την προηγούμενη τάξη, είναι και οι εξής:

1.  $|a| = a \iff a \geq 0$ , 2.  $|a| = -a \iff a \leq 0$ , 3.  $|-a| = |a|$  (βλ. και σχ. 1),
4.  $|a-b| = |b-a|$  για κάθε  $a, b \in \mathbb{R}$ , 5.  $|a| = |\beta| \iff a = \beta \vee a = -\beta (a, \beta \in \mathbb{R})$ .

**Παρατήρηση:** Από τον τρόπο πού όρίσαμε την απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού  $x$ , γίνεται φανερό ότι αυτή (δηλ. η απόλυτη τιμή) δέν είναι παρά μία μονοσήμαντη απεικόνιση του  $\mathbb{R}$  επάνω στο  $\mathbb{R}_0^+$ , ακριβέστερα ή απεικόνιση:

$$| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+ : x \rightarrow |x| \equiv_{\text{ορσ}} \begin{cases} x, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \\ -x, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της  $y = |x|$  αποδίδεται με τις δύο ημιευθείες  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  πού διχοτομούν τις γωνίες των άξόνων (βλ. σχ. 1).



#### ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΠΟΛΥΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΠΡΑΓΜ. ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 22. **Ιδιότητα I.**— Για κάθε πραγματικό αριθμό  $a$  έχουμε:

$$-|a| \leq a \leq |a|.$$

**Απόδειξη.** Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- (i)  $a \geq 0 \Rightarrow |a| = a$  και επομένως:  $-|a| \leq a = |a|$ .  
Άρα και:  $-|a| \leq a \leq |a|$ .
- (ii)  $a < 0 \Rightarrow |a| = -a$  και επομένως:  $-|a| = a < |a|$ .  
Άρα και:  $-|a| \leq a \leq |a|$ .

Ωστε:

$$\forall a \in \mathbb{R}, -|a| \leq a \leq |a|$$

**Παρατήρηση:** Από την πιο πάνω ιδιότητα έχουμε:

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι: } |x| + x \geq 0 \text{ και } |x| - x \geq 0.$$

Ποτέ όμως δέν έχουμε ταυτόχρονα τή διπλή ανισότητα:  $-|x| < x < |x|$ .

§ 23. **Ιδιότητα II.**— Για κάθε πραγματικό αριθμό  $a$  έχουμε:  $|a|^2 = a^2$ .

**Απόδειξη.** Αν  $a \geq 0$ , τότε  $|a| = a$  και άρα  $|a|^2 = a^2$ . Αν  $a < 0$ , τότε  $|a| = -a$  και συνεπώς  $|a|^2 = (-a)^2 = a^2$ .

Ωστε:

$$\forall a \in \mathbb{R}, |a|^2 = a^2$$

**Αξιόλογη παρατήρηση.** Αν  $a \notin \mathbb{R}$ , τότε  $|a|^2 \neq a^2$ , όπως θά δοῦμε αργότερα. Επομένως ή ισότητα  $|a|^2 = a^2$  συνάγεται ότι  $a \in \mathbb{R}$ .

Στήν προηγούμενη τάξη αποδείξαμε την επόμενη πιο γενική πρόταση:

§ 24. **Ιδιότητα III.**— Για κάθε  $a \in \mathbb{R}$  και κάθε  $n \in \mathbb{N}$  ισχύουν:

$$(i) |a|^{2n} = a^{2n}, \quad (ii) |a|^{2n+1} = \begin{cases} a^{2n+1}, & \text{αν } a \geq 0 \\ -a^{2n+1}, & \text{αν } a < 0. \end{cases}$$

**Πόρισμα.**— Για κάθε  $a \in \mathbb{R}$  και  $n \in \mathbb{N}$  ισχύει:  $\sqrt[n]{a^{2n}} = |a|$ .

Ετσι στήν ειδική περίπτωση για  $n = 1$  θά γράφουμε:  $\sqrt{a^2} = |a|$ .

§ 25. **Ιδιότητα IV.**— Για πραγματικούς αριθμούς  $x, \epsilon$  με  $\epsilon > 0$  ισχύουν οι λογικές ισοδυναμίες:

$$|x| \leq \epsilon \iff -\epsilon \leq x \leq \epsilon \iff x^2 \leq \epsilon^2$$

**Απόδειξη.** Έχουμε την ισοδυναμία:

$$|x| \leq \epsilon \iff -\epsilon \leq x \leq \epsilon \quad (\text{γιατί: } -\epsilon < 0)$$

Άλλά:  $-\epsilon \leq x \leq \epsilon \iff -\epsilon \leq x \leq \epsilon \quad \text{ή} \quad -\epsilon \leq -x \leq \epsilon,$

δηλαδή:  $-\epsilon \leq x \leq \epsilon \iff -\epsilon \leq x \leq \epsilon.$

Ωστε:

$$|x| \leq \epsilon \iff -\epsilon \leq x \leq \epsilon.$$



Έχουμε επίσης την ισοδυναμία:  $|x| \leq \varepsilon \iff |x|^2 \leq \varepsilon^2 \iff x^2 \leq \varepsilon^2$ .

Ωστε:  $\forall x \in \mathbb{R}$  και  $\varepsilon > 0$  ισχύει:  $|x| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon \iff x^2 \leq \varepsilon^2$ .

**Σημείωση.** Ισχύει:  $|x| \leq \varepsilon \iff x \in [-\varepsilon, +\varepsilon]$  (βλ. και § 7, β).

**Πόρισμα.** — Αν  $\varepsilon > 0$  και  $a \in \mathbb{R}$ , τότε για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε τις ισοδυναμίες:

$$|x - a| \leq \varepsilon \iff a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon \iff x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon].$$

**Παρατήρηση.** Μέ τον ίδιο τρόπο αποδεικνύονται οι (λογικές) ισοδυναμίες:

$$\begin{aligned} 1\eta: & |x| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x < \varepsilon \iff x \in (-\varepsilon, +\varepsilon) \\ 2\eta: & |x| > \varepsilon \iff (x > \varepsilon \vee x < -\varepsilon). \end{aligned} \quad (\varepsilon > 0)$$

**Εφαρμογές:** 1η: Νά αποδείξετε την ισοδυναμία:

$$2 \leq x \leq 8 \iff |x - 5| \leq 3.$$

Έχουμε:  $2 \leq x \leq 8 \iff 2 - 5 \leq x - 5 \leq 8 - 5 \iff -3 \leq x - 5 \leq 3 \iff |x - 5| \leq 3$ .

2η: Αν  $a < x < \beta$ , νά αποδείξετε ότι η παράσταση:

$$y = ||a - x| + |\beta - x||$$

δέν εξαρτάται από το  $x$ .

**Απόδειξη.** Επειδή  $a < x < \beta$  έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} a - x < 0 \\ \beta - x > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} |a - x| &= x - a \\ |\beta - x| &= \beta - x \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = |x - a + \beta - x| = |\beta - a| = \beta - a.$$

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Ομάδα Α.** 29. Νά βρείτε τις ακέραιες τιμές του  $x$ , για τις οποίες είναι:

$$1) |x| < 3,2, \quad 2) |x| > 1,8, \quad \text{και} \quad |x| \leq 5, \quad 3) \left|x - \frac{1}{2}\right| < 3.$$

30. Νά αποδείξετε ότι για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$  ισχύει:  $|x^2 - 3y + 1| = |3y - x^2 - 1|$ .

31. Αν  $x \in \mathbb{R}$  και  $|2x + 9| = 3|x + 2|$  νά αποδείξετε ότι:  $|x| = 3$ .

32. Αν  $x, y \in \mathbb{R}$  και  $y\sqrt{x^2} - x\sqrt{y^2} + x|x| - y|y| = 0$ , νά αποδείξετε ότι:  $|x| = |y|$ .

33. Αν  $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ , νά βρείτε τις εκφράσεις της παραστάσεως:

$$y = |\alpha - x| + |\beta - x| + |\gamma - x| + |\delta - x|$$

χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής, για τις διάφορες πραγματικές τιμές του  $x$ . Υπάρχουν διαστήματα που παίρνει τιμές τό  $x$ , στα όποια η παράσταση  $y$  δέν εξαρτάται από τό  $x$ ;

34. Νά κάνετε τό ίδιο για τήν:  $y = |x - 5| + |3x + 1| + |2x - 3|$ .

**Ομάδα Β.** 35. Δίνεται ή συνάρτηση  $f$  μέ τύπο:  $f(x) = \frac{|x + 1| - |x - 1|}{|x + 1| + |x - 1|}$ .

Νά αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } |x| < 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } |x| > 1. \end{cases}$$

36. Αν  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  μέ  $\alpha < \beta$ , νά γράψετε μέ τήν πιό απλή δυνατή μορφή τόν τύπο τής άπεικονίσεως  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , όπου:

$$f(x) = ||x - \alpha| - |x - \beta||.$$

37. Για ποιές πραγματικές τιμές του  $x$  έχει νόημα πραγματικού αριθμού ή παράσταση:

$$y = \sqrt{\frac{x}{|x|} - \frac{\sqrt{x^2}}{x}} + \frac{2v}{\sqrt{2 - |x| + 2x^2 - |x|^3}}, \quad (v \in \mathbb{N} - \{1\})$$

38. Αν μάς δοθούν οι πραγμ. αριθμοί  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , τότε ο πιο μεγάλος απ' αυτούς συμβολίζεται μέ:  $\max(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  \*) και ο πιο μικρός μέ:  $\min(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  \*). Έτσι, π.χ., αν  $\alpha$  και  $\beta$  είναι δύο οποιοδήποτε πραγματικοί αριθμοί, θα είναι:

$$\max(\alpha, \beta) \stackrel{\text{ορσ}}{=} \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \alpha \geq \beta \\ \beta, & \text{αν } \beta > \alpha \end{cases} \quad \text{και} \quad \min(\alpha, \beta) \stackrel{\text{ορσ}}{=} \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \alpha < \beta \\ \beta, & \text{αν } \beta \leq \alpha. \end{cases}$$

Νά αποδείξετε τώρα ότι:

$$1) \max(\alpha, \beta) = \frac{\alpha + \beta + |\beta - \alpha|}{2}, \quad 2) |\alpha| = \max(\alpha, -\alpha), \quad 3) \min(\alpha, \beta) = \frac{\alpha + \beta - |\beta - \alpha|}{2}$$

$$4) |\alpha - \beta| = \max(\alpha, \beta) - \min(\alpha, \beta), \quad 5) \max(0, 2x) - \min(0, 2x) = 2|x|.$$

39. Αφού λάβετε υπόψη τήν προηγούμενη άσκηση, νά αποδείξετε ότι ή παράσταση:  $y = 2|\beta - \gamma| + |2\alpha - \beta - \gamma - |\beta - \gamma|| + |2\alpha - \beta - \gamma + |\beta - \gamma||$ , όπου  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , είναι ίση μέ:

$$4 \cdot [\max(\alpha, \beta, \gamma) - \min(\alpha, \beta, \gamma)].$$

ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ – ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ – ΠΗΛΙΚΟΥ ΠΡΑΓΜ. ΑΡΙΘΜΩΝ

✓ § 26. **Ιδιότητα V.** — Η απόλυτη τιμή του άθροίσματος δύο πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη ή ίση μέ τό άθροισμα τών απόλυτων τιμών τών προσθετέων.

Δηλαδή:

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \quad (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \quad (1)$$

**Απόδειξη.** Αν λάβουμε υπόψη τις ιδιότητες I και IV, έχουμε τις συνεπαγωγές:

$$\left. \begin{aligned} -|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha| \\ -|\beta| \leq \beta \leq |\beta| \end{aligned} \right\} \Rightarrow -(|\alpha| + |\beta|) \leq \alpha + \beta \leq (|\alpha| + |\beta|) \Rightarrow |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|.$$

**Σημείωση:** Η σχέση:  $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$  λέγεται και **τριγωνική ανισότητα**.

**Πόρισμα 1ο.** — Η απόλυτη τιμή τής διαφορής δύο πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη ή ίση μέ τό άθροισμα τών απόλυτων τιμών τους.

Δηλαδή:

$$|\alpha - \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \quad (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \quad (2)$$

Πράγματι, έχουμε:

$$|\alpha - \beta| = |\alpha + (-\beta)| \leq |\alpha| + |-\beta| = |\alpha| + |\beta|.$$

**Πόρισμα 2ο.** — Αν  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ , τότε για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  μέ  $n \geq 2$  ισχύει:

$$|\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_n| \quad (3)$$

Η απόδειξη γίνεται εύκολα μέ τή μέθοδο τής τέλειας έπαγωγής, αφού είναι γνωστό ότι για  $n = 2$ , ισχύει, σύμφωνα μέ τήν προηγούμενη ιδιότητα.

**Σημείωση:** Για τήν πιό σύντομη γραφή ενός άθροίσματος χρησιμοποιείται διεθνώς τό ελληνικό γράμμα Σ. Έτσι γράφουμε:  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k$  (διαβάζουμε: «άθροισμα από  $k=1$  μέχρι  $n$  τών  $\alpha_k$ »). Μ' αυτό τό συμβολισμό ή σχέση (3) γράφεται πιό σύντομα ως εξής:

\*  $\max, \min$  είναι, αντίστοιχα, συντομογραφία τών λέξεων: maximum (= μέγιστο), minimum (= ελάχιστο).



$$\left| \sum_{k=1}^n \alpha_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |\alpha_k| \quad (3')$$

✓ § 27. Ίδιότητα VI.—Για κάθε  $\alpha$  και  $\beta$  του  $\mathbb{R}$  έχουμε την ανισότητα:

$$||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha \pm \beta| \quad (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \quad (4)$$

\*Απόδειξη: Πρώτα-πρώτα βλέπουμε ότι η σχέση αυτή παραμένει αμετάβλητη, αν αντιμεταθέσουμε τά  $\alpha$  και  $\beta$ . Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι  $|\alpha| \geq |\beta|$ , οπότε  $|\alpha| - |\beta| \geq 0$ . Θέτουμε  $\alpha \pm \beta = \gamma$ , οπότε:

$$\alpha = \gamma \mp \beta \Rightarrow |\alpha| = |\gamma \mp \beta| \leq |\gamma| + |\beta| \Rightarrow |\alpha| - |\beta| \leq |\gamma|$$

και έπειδή  $|\alpha| - |\beta| \geq 0$ , η τελευταία ανισότητα γίνεται:

$$||\alpha| - |\beta|| \leq |\gamma| = |\alpha \pm \beta|.$$

Οι σχέσεις (1), (2) και (4) περιέχονται στην:

$$||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \quad (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \quad (5)$$

\*Αξιόλογη παρατήρηση. Για τό πότε ισχύει η (5) μέ τό «ϊσον»: διατυπώνουμε τόν έξής μνημονικό κανόνα: «Οποιαδήποτε από τίς σχέσεις τής (5) πού έχει τά ίδια (άντιστ. διαφορετικά) πρόσημα ισχύει μέ τό ίσον, τότε και μόνο τότε, αν:  $\alpha\beta \geq 0$  (άντιστ.  $\alpha\beta \leq 0$ ). (Βλ. σχετική απόδειξη στό πρώτο παράδειγμα τής σελίδας 33).

\*Έχοντας τώρα υπόψη και τήν Ίδιότητα I, γράφουμε τήν (5) πιό γενικά:

$$||\alpha| - |\beta|| \leq ||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \quad (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \quad (6)$$

✓ § 28. Ίδιότητα VII.—Ή απόλυτη τιμή του γινομένου δύο πραγματικών αριθμών είναι ίση μέ τό γινόμενο των απόλυτων τιμών των παραγόντων.

$$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta| \quad (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \quad (7)$$

\*Απόδειξη. Είναι γνωστό (§ 24, πόρισμα) ότι ισχύει:  $\sqrt{x^2} = |x|$ . Άρα:

$$|\alpha\beta| = \sqrt{(\alpha\beta)^2} = \sqrt{\alpha^2 \cdot \beta^2} = \sqrt{\alpha^2} \cdot \sqrt{\beta^2} = |\alpha| \cdot |\beta|.$$

Πόρισμα 1ο.— Άν  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ , τότε για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  μέ  $n \geq 2$  ισχύει:

$$|\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdots \alpha_{n-1} \cdot \alpha_n| = |\alpha_1| \cdot |\alpha_2| \cdot |\alpha_3| \cdots |\alpha_{n-1}| \cdot |\alpha_n| \quad (8)$$

Ή απόδειξη γίνεται εύκολα μέ τή μέθοδο τής τέλεις έπαγωγής, αφού είναι γνωστό ότι η (8) ισχύει για  $n=2$ , σύμφωνα μέ τήν παραπάνω Ίδιότητα.

Σημείωση: Για να παραστήσουμε πιό σύντομα ένα γινόμενο χρησιμοποιούμε τό κεφαλαίο γράμμα Π. Έτσι γράφουμε:  $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdots \alpha_n = \prod_{k=1}^n \alpha_k$  (διαβάζουμε: «τό γινόμενο από  $k=1$  μέχρι  $n$  των  $\alpha_k$ »). Μ' αυτό τό συμβολισμό η σχέση (8) γράφεται πιό σύντομα ως εξής:

$$\left| \prod_{k=1}^n \alpha_k \right| = \prod_{k=1}^n |\alpha_k| \quad (8')$$

Πόρισμα 2ο.— Για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$  και κάθε  $n \in \mathbb{N}$  ισχύει:  $|\alpha^n| = |\alpha|^n$ .

Αυτό προκύπτει άμέσως, αν στην (8) θέσουμε:  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha$ .

✓ § 29. Ίδιότητα VIII.—Ή απόλυτη τιμή του ηλίίκου δύο πραγματικών αριθμών είναι ίση μέ τό ηλίίκο των απόλυτων τιμών τους.

Δηλαδή:

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \quad (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0) \quad (9)$$

\*Απόδειξη. Μέ  $\beta \neq 0$  έχουμε:

$$|\alpha| = \left| \frac{\alpha}{\beta} \cdot \beta \right| = \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| \cdot |\beta| \Rightarrow \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}.$$

Σημείωση: Ή απόδειξη τής παραπάνω Ίδιότητας μπορεί να γίνει και ως εξής:

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \sqrt{\left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^2} = \sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta^2}} = \frac{\sqrt{\alpha^2}}{\sqrt{\beta^2}} = \frac{|\alpha|}{|\beta|}, \quad (\beta \neq 0).$$

Πόρισμα.— Για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$  μέ  $\alpha \neq 0$  και  $k \in \mathbb{Z}$  ισχύει:  $|\alpha^k| = |\alpha|^k$ .

### ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Παράδειγμα 1ο: Άν  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι:

$$||\alpha| - |\beta|| = |\alpha + \beta| \iff \alpha\beta \leq 0.$$

\*Απόδειξη. Έχουμε:

$$\begin{aligned} ||\alpha| - |\beta|| = |\alpha + \beta| &\iff ||\alpha| - |\beta||^2 = |\alpha + \beta|^2 \iff (|\alpha| - |\beta|)^2 = (\alpha + \beta)^2 \iff \\ &\iff |\alpha|^2 - 2|\alpha| \cdot |\beta| + |\beta|^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \\ &\iff \alpha^2 - 2|\alpha| \cdot |\beta| + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \iff |\alpha| \cdot |\beta| = -\alpha\beta \iff \alpha\beta \leq 0. \end{aligned}$$

Σημείωση. Άν εργαστούμε μέ τόν ίδιο τρόπο, βρίσκουμε τίς Ισοδυναμίες:

$$1. \quad |\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta| \iff \alpha\beta \geq 0, \quad 2. \quad |\alpha - \beta| = |\alpha| + |\beta| \iff \alpha\beta \leq 0.$$

Παράδειγμα 2ο: Να αποδείξετε ότι:  $|x^2 + 4x - 2| \leq 23$  για  $x \in \mathbb{R}$  μέ:  $-2 \leq x \leq 3$ .

\*Απόδειξη. Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε (βλ. Πόρ. 2ο, § 26):

$$|x^2 + 4x - 2| \leq |x^2| + 4|x| + 2 = x^2 + 4|x| + 2.$$

Εξάλλου έχουμε:

$$-2 \leq x \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3 \Rightarrow |x| \leq 3 \text{ και } x^2 \leq 9.$$

Συνεπώς:  $|x^2 + 4x - 2| \leq x^2 + 4|x| + 2 \leq 9 + 12 + 2 = 23$ .

Παράδειγμα 3ο: Άν  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  μέ  $\beta(\alpha + 2\beta) \neq 0$ , να αποδείξετε ότι καθεμία από τίς επόμενες ανισότητες:

$$\left| \frac{2\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta} \right| < 1 \quad (1), \quad \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| < 1 \quad (2), \quad \left| \frac{\alpha\beta + 2\alpha^2}{\alpha\beta + 2\beta^2} \right| < 1 \quad (3)$$

συνεπάγεται τίς άλλες δύο.

\*Απόδειξη. Έχουμε:

$$\begin{aligned} (1) \quad \left| \frac{2\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta} \right| < 1 &\iff |2\alpha + \beta| < |\alpha + 2\beta| \iff (2\alpha + \beta)^2 < (\alpha + 2\beta)^2 \iff \\ &\iff 4\alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2 < \alpha^2 + 4\alpha\beta + 4\beta^2 \iff 3\alpha^2 < 3\beta^2 \\ &\iff |\alpha| < |\beta| \iff \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| < 1 \quad (2) \quad (\text{έπειδή } |\beta| > 0). \end{aligned}$$



Ωστε:

$$(1) \iff (2)$$

Επίσης έχουμε:

$$\begin{aligned} (3) \left| \frac{\alpha\beta + 2\alpha^2}{\alpha\beta + 2\beta^2} \right| < 1 &\iff |\alpha\beta + 2\alpha^2| < |\alpha\beta + 2\beta^2| \iff (\alpha\beta + 2\alpha^2)^2 < (\alpha\beta + 2\beta^2)^2 \iff \\ &\iff \alpha^2\beta^2 + 4\alpha^3\beta + 4\alpha^4 < \alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3 + 4\beta^4 \\ &\iff \alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2) + (\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2) < 0 \iff (\alpha^2 - \beta^2)(\alpha\beta + \alpha^2 + \beta^2) < 0 \\ &\iff \alpha^2 - \beta^2 < 0 \text{ (επειδή } \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + (\alpha + \beta)^2}{2} > 0, \text{ αφού } \beta^2 > 0) \\ &\iff \alpha^2 < \beta^2 \iff |\alpha| < |\beta| \iff \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| < 1 \end{aligned} \quad (2)$$

Ωστε: (3)  $\iff$  (2) και επειδή (2)  $\iff$  (1) έχουμε: (1)  $\iff$  (2)  $\iff$  (3).

### ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Ομάδα Α'. 40.** Αν  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  νά αποδείξετε τις ισοδυναμίες:

$$1. \quad ||\alpha| - |\beta|| = |\alpha - \beta| \iff \alpha\beta \geq 0$$

$$2. \quad \alpha|\beta| - \beta|\alpha| = 0 \iff |\alpha + \beta| \geq |\alpha - \beta|.$$

41. Νά αποδείξετε ότι: αν  $x \in \mathbb{R}$  και  $|x| \leq 1$ , τότε  $|2x^3 + 5x^2 - 7| \leq 14$ .

42. Αν  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  και  $|\alpha| > 1$ , νά αποδείξετε ότι η ισότητα:  $\beta = \frac{\alpha}{1 - |\alpha|}$  συνεπάγεται τις σχέσεις:  $|\beta| > 1$  και  $\alpha = \frac{\beta}{1 - |\beta|}$ .

43. Αν  $\alpha\beta \neq 0$  και  $\alpha^2 < 16\beta^2$ , νά αποδείξετε ότι:  $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| - \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| < \frac{15}{4}$ .

44. Αν  $x, y \in \mathbb{R}$  με  $xy \neq 0$ , νά αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\frac{\sqrt{x^2 y^2}}{xy} + \frac{\sqrt{(x-y)^2}}{x-y} \left[ \frac{\sqrt{x^2}}{x} - \frac{\sqrt{y^2}}{y} \right] = 1.$$

**Υπόδειξη.** Νά διακρίνετε τις περιπτώσεις: i)  $x$  και  $y$  ομόσημοι, ii)  $x$  και  $y$  ετερόσημοι.

45. Η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , όπου  $\mathbb{R}$  τό σύνολο των πραγματικών αριθμών, ορίζεται για κάθε  $x$  από τον τύπο:  $f(x) = |x + 1| \cdot |x - 2|$ .

α) Νά γράψετε τον τύπο της σέ όλες τις δυνατές μορφές (χωρίς τό σύμβολο της απόλυτης τιμής), πού καθορίζονται από τή θέση του αριθμού  $x$  ως προς τούς:  $-1, 2$ .

β) Νά εξετάσετε πώς μεταβάλλεται ή  $f$  για τις διάφορες πραγμ. τιμές του  $x$ .

γ) Νά παραστήσετε γραφικά τήν  $f$ , παίρνοντας ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων  $xOy$ .

**Υπόδειξη.** Υπενθυμίζουμε πρώτα-πρώτα ότι ένα σύστημα αξόνων λέγεται ορθοκανονικό, αν είναι ορθογώνιο και οι μονάδες, πού έχουν ορισθεί πάνω στους άξονες, έχουν ίσα μήκη.

Για νά παραστήσουμε τώρα γραφικά μία συνάρτηση της μορφής  $y = |\varphi(x)|$ , αρκεί νά χαράξουμε τή γραφική παράσταση της  $y = \varphi(x)$  και κατόπιν τά μέρη της γραμμής (πού θά προκύψει), τά όποια βρίσκονται κάτω από τον άξονα  $Ox$ , τά φέρουμε από πάνω, παίρνοντας τά συμμετρικά τους ως προς τον άξονα  $Ox$ .

46. Αν  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  νά αποδείξετε ότι:

$$2\beta(1 + |\alpha|) = 1 + \alpha + |\alpha| \iff \begin{cases} |2\beta - 1| < 1 \\ \alpha(1 - |2\beta - 1|) = 2\beta - 1. \end{cases}$$

47. Αν  $\alpha, \beta, x, y \in \mathbb{R}$  με  $\alpha\beta \neq 0$  και ισχύουν οι σχέσεις:

$$x = \alpha(|\alpha| + |\beta|) \text{ και } y = \beta(|\alpha| + |\beta|),$$

τότε θά ισχύουν και οι σχέσεις:

$$\alpha = \frac{x}{\sqrt{|x| + |y|}}, \quad \beta = \frac{y}{\sqrt{|x| + |y|}}$$

και αντίστροφως, οι δύο τελευταίες σχέσεις συνεπάγονται τις δύο πρώτες.

**\* Ομάδα Β'. 48.** Αν  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  με  $\alpha^2 \neq \beta^2$ , νά αποδείξετε ότι:

$$\frac{|\alpha| - |\beta|}{|\alpha| + |\beta|} + \frac{||\alpha| - |\beta||}{|\alpha - \beta|} + \frac{|\alpha + \beta|}{|\alpha| + |\beta|} \leq 3.$$

49. Αν  $x, y \in \mathbb{R}$  με  $2x + y + 4 = 0$ , νά αποδείξετε ότι:  $|x| + |y| \geq 2$ .

50. Νά προσδιορίσετε τούς θετικούς αριθμούς  $\theta$  και  $\varepsilon$ , ώστε νά ισχύει:

$$\theta \leq \left| \frac{x+2}{x-5} \right| \leq \varepsilon$$

για όλα τά  $x$  πού ικανοποιούν τήν ανισότητα:  $|x - 2| \leq 1$ .

51. Αν  $\eta > 1$  και  $|\xi| \geq 2\eta$ , νά αποδείξετε ότι οι ρίζες  $x_1$  και  $x_2$  της εξίσωσης:

$$x^2 + \xi x + \eta = 0 \text{ ικανοποιούν τή σχέση: } \frac{1}{|x_1|} + \frac{1}{|x_2|} \geq 2.$$

52. Αν  $x, y \in \mathbb{R}$  με  $x(3x + 2y) \neq 0$ , νά αποδείξετε ότι καθεμία από τις επόμενες σχέσεις:

$$\left| \frac{2x + 3y}{3x + 2y} \right| < 1, \quad \left| \frac{y}{x} \right| < 1, \quad \left| \frac{2xy + 3y^2}{3x^2 + 2xy} \right| < 1$$

συνεπάγεται τις άλλες δύο.

53. Αν  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , νά αποδείξετε ότι:

$$\frac{|\alpha + \beta|}{1 + |\alpha + \beta|} \leq \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha|} + \frac{|\beta|}{1 + |\beta|}.$$

Πότε ή σχέση αυτή ισχύει μέ τό ίσον;

54. Δίνεται ή εξίσωση:  $x^2 - 2\alpha x + \beta = 0$  με  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  και ρίζες  $\rho_1, \rho_2$ . Αν  $|\rho_2| \leq |\rho_1|$  νά αποδείξετε ότι:

$$|\alpha| + \sqrt{\alpha^2 + |\beta|} \leq (1 + \sqrt{2}) |\rho_1|.$$

55. Νά βρείτε τά ζεύγη των άκεραίων  $x, y$  πού επαληθεύουν τις σχέσεις:

$$y - |x^2 - 2x| + \frac{1}{2} > 0 \text{ και } y + |x - 1| < 2.$$

56. Νά βρείτε τά διαστήματα μεταβολής του  $x$  και τις αντίστοιχες τιμές του  $\lambda$ , για νά είναι ανεξάρτητη από τό  $x$  ή παράσταση:

$$y = |\lambda^2 x + 1| + |2\lambda x + 3|.$$

57. Έστω ότι οι συντελεστές του τριωνύμου:  $x^2 - 2\alpha x + \beta$  είναι αριθμοί πραγματικοί με  $\beta \neq 0$  και  $|\rho_1| \neq |\rho_2|$ , όπου  $\rho_1, \rho_2$  είναι οι ρίζες του. Ονομάζουμε:

$$M \equiv \max\left(\left|\frac{\rho_1}{\rho_2}\right|, \left|\frac{\rho_2}{\rho_1}\right|\right), \quad m \equiv \min\left(\left|\frac{\rho_1}{\rho_2}\right|, \left|\frac{\rho_2}{\rho_1}\right|\right) \text{ και } \lambda = 2 \left| \frac{2\alpha^2 - \beta}{\beta} \right|.$$

Νά αποδείξετε ότι:

α) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι αριθμοί πραγματικοί και άνισοι.

β) Ισχύουν οι σχέσεις: 1)  $\lambda - 1 < M < \lambda$ , 2)  $\lambda > 2$ , 3)  $\frac{1}{\lambda} < m < \frac{1}{\lambda - 1}$ .

58. Αν οι ρίζες της εξίσωσης:  $x^2 + \xi x + \eta = 0$  είναι πραγματικές και οι συντελεστές  $\xi$  και  $\eta$  ικανοποιούν τή σχέση:  $\xi^2 - 2\eta^2 < \xi|\eta|$ , νά αποδείξετε ότι οι ρίζες  $\rho_1, \rho_2$  της εξίσωσης:  $\eta x^2 + \xi x + 1 = 0$  επαληθεύουν τήν:  $|\rho_1| - |\rho_2| < 2$ .



**§ 30. Απόλυτη τιμή ή μέτρο μιγαδικού αριθμού.**—Η έννοια της απόλυτης τιμής μιγαδικού αριθμού μας είναι επίσης γνωστή από την προηγούμενη τάξη. Εκεί μάθαμε ότι: ονομάζεται **απόλυτη τιμή ή μέτρο** ενός μιγαδικού αριθμού  $z = \alpha + \beta i$ , ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ) και συμβολίζεται με  $|z| = |\alpha + \beta i|$ , ο **μή ἀρνητικός (πραγματικός) αριθμός**:  $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ .

Ωστε:

$$|z| = |\alpha + \beta i| \stackrel{\text{ορσ}}{=} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad (1)$$

Ορίζεται έτσι μία απεικόνιση  $|\cdot|: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_0^+ : z \rightarrow |z| \stackrel{\text{ορσ}}{=} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ .

**Παραδείγματα:**

$$|3 + 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5, \quad |1 - i| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}, \quad |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1 + 3} = 2.$$

Άμεσες συνέπειες του πιο πάνω ορισμού, που τις ξέρουμε και από την προηγούμενη τάξη, είναι:

$$1. |z| \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \text{και} \quad |z| = 0 \iff z = 0, \quad 2. |\bar{z}| = |z| = |-z| = |-\bar{z}|.$$

Παρατηρούμε ότι: αν  $z \in \mathbb{R}$ , τότε  $\beta = 0$ , τότε:  $|z| = |\alpha + 0i| = \sqrt{\alpha^2 + 0^2} = |\alpha|$ . Δηλαδή, αν  $z \in \mathbb{R}$ , τότε ο παραπάνω ορισμός της απόλυτης τιμής μιγαδικού αριθμού περιέχει ως ειδική περίπτωση τον ορισμό της απόλυτης τιμής πραγματικού αριθμού που δώσαμε στην αρχή αυτού του Κεφαλαίου.

Εξάλλου, αν  $z = \alpha + \beta i$ , τότε  $\bar{z} = \alpha - \beta i$  και συνεπώς  $z\bar{z} = \alpha^2 + \beta^2$ . Αυτό μας επιτρέπει συχνά στα επόμενα να γράφουμε:

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} \iff |z|^2 = z\bar{z} \quad (2)$$

Εστω τώρα ο μιγαδικός αριθμός  $z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ). Ο πραγμ. αριθμός  $x$  λέγεται, όπως ξέρουμε, **τό πραγματικό μέρος** του  $z$  και συμβολίζεται με:  $\text{Re}(z)$  και ο αριθμός  $y$  λέγεται **τό φανταστικό μέρος** του  $z$  και συμβολίζεται με:  $\text{Im}(z)$ . Η εισαγωγή της έννοιας του συζυγούς μιγαδικού αριθμού  $z$  μας επιτρέπει να εκφράσουμε τό  $\text{Re}(z)$  και  $\text{Im}(z)$  με τούς τύπους:

$$x = \text{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{και} \quad y = \text{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} \quad (3)$$

Εύκολα τώρα από τούς προηγούμενους τύπους έχουμε:

$$1. z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}, \quad 2. z + \bar{z} = 0 \iff (z \text{ φανταστικός αριθμός}).$$

$$\text{Εφόσον } |z|^2 = |\text{Re}(z)|^2 + |\text{Im}(z)|^2 \Rightarrow \begin{cases} \text{Re}(z) \leq |\text{Re}(z)| \leq |z| \\ \text{Im}(z) \leq |\text{Im}(z)| \leq |z| \end{cases} \quad (4)$$

\* Ο συμβολισμός αυτός προέρχεται από συντομογραφία των λέξεων Réel = πραγματικός και Imaginaire = φανταστικός. Με τό πρώτο γράμμα της λέξεως imaginaire παρίστανουμε τό σύμβολο:  $\sqrt{-1}$  ( $= i$ ).

## ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΠΟΛΥΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Οι ιδιότητες που αναφέραμε στις παραγράφους 22 και 25 αυτού του κεφαλαίου δέν διατυπώνονται για μιγαδικούς αριθμούς, επειδή καμία σχέση διατάξεως δέν έχει ορισθεί στο σύνολο  $\mathbb{C}$  των μιγαδικών αριθμών.

Επίσης ή ιδιότητα II της § 23 δέν ισχύει αν  $z \notin \mathbb{R}$ . Ακριβέστερα έχουμε:

$$|z|^2 = z^2 \iff z \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \text{συνεπώς} \quad |z|^2 \neq z^2 \iff z \in \mathbb{C} \text{ με } \text{Im}(z) \neq 0.$$

Πράγματι:  $|z|^2 = z^2 \iff z \cdot \bar{z} = z^2 \iff z(\bar{z} - z) = 0 \iff z = 0 \vee \bar{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$ .

Αντίθετα ή απόλυτη τιμή μιγαδικού αριθμού έχει ιδιότητες τελείως ανάλογες με εκείνες της απόλυτης τιμής πραγματικού αριθμού που αποδείξαμε στις παραγράφους 26 έως 29.

Διατυπώνουμε παρακάτω τις σπουδαιότερες απ' αυτές τις ιδιότητες:

**§ 31.** Αν  $z_1, z_2, \dots, z_n$  είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$1. |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad 2. |z_1 \cdot z_2 \cdots z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdots |z_n|,$$

$$3. |z^v| = |z|^v \quad \forall v \in \mathbb{N}, \quad 4. \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{μέ } z_2 \neq 0,$$

$$5. |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad 6. \left| \sum_{k=1}^v z_k \right| \leq \sum_{k=1}^v |z_k|,$$

$$7. \left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

**Απόδειξη.** 1) Έχουμε:  $|z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 z_2) \cdot \overline{(z_1 z_2)} = (z_1 z_2) (\bar{z}_1 \bar{z}_2) = (z_1 \bar{z}_1) (z_2 \bar{z}_2) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \Rightarrow |z_1 \cdot z_2|^2 = (|z_1| \cdot |z_2|)^2 \Rightarrow |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ .

2) Η απόδειξη είναι εύκολη με τή μέθοδο της Μαθηματικής επαγωγής.

3) Για  $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$  ή 2) δίνει:  $|z^v| = |z|^v \quad \forall v \in \mathbb{N}$ .

$$4) \text{ Μέ } z_2 \neq 0 \text{ έχουμε: } z_1 = \frac{z_1}{z_2} \cdot z_2 \Rightarrow |z_1| = \left| \frac{z_1}{z_2} \cdot z_2 \right| = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| \cdot |z_2| \Rightarrow \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

$$\begin{aligned} 5) \text{ Έχουμε: } |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2) (\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_2 \\ &= |z_1|^2 + 2\text{Re}(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2 \quad [\text{από τήν (3) της § 30}] \\ &\leq |z_1|^2 + 2|z_1 \bar{z}_2| + |z_2|^2 \quad [\text{από τήν (4) της § 30}] \\ &= |z_1|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| + |z_2|^2 \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2. \end{aligned}$$

Άρα:  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ .

6) Η απόδειξη είναι εύκολη με τή μέθοδο της Μαθηματικής επαγωγής.

7) Θα δείξουμε πρώτα ότι ισχύει:  $\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 - z_2|$ .



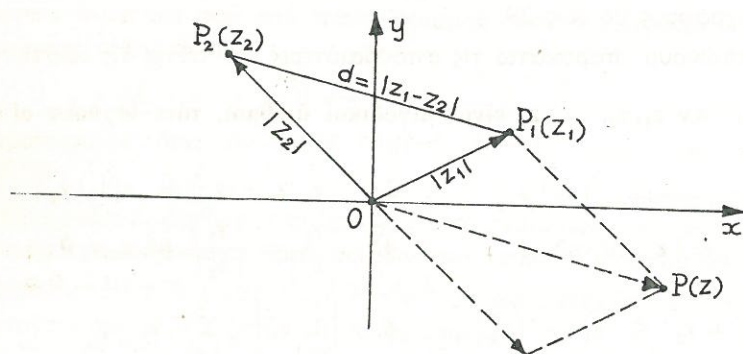
$$\begin{aligned}\text{Πράγματι, έχουμε: } |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) = (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) \\ &= z\overline{z}_1 - (z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1) + z_2\overline{z}_2 \\ &= |z_1|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2) + |z_2|^2 \\ &\geq |z_1|^2 - 2|z_1z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| - |z_2|)^2.\end{aligned}$$

$$\text{Άρα: } |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||.$$

$$\text{Τότε: } |z_1 + z_2| = |z_1 - (-z_2)| \geq ||z_1| - |-z_2|| = ||z_1| - |z_2||$$

$$\text{Έξάλλου: } |z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \leq |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2|.$$

**Άξιοσημείωτη παρατήρηση.** Άς θεωρήσουμε δύο μιγαδικούς αριθμούς



Σχ. 2

$z_1, z_2$  με αντίστοιχες εικόνες  $P_1, P_2$  στο μιγαδικό επίπεδο (βλ. σχ. 2). Τότε η εικόνα του  $z = z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$  είναι τό πέρας (άκρο)  $P$  του διανύσματος  $\overrightarrow{OP}$ . Από τό παραλληλόγραμμο  $OPP_1P_2$  του σχήματος έχουμε:

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = |\overrightarrow{OP}| = |z_1 - z_2|.$$

Δηλαδή: η απόλυτη τιμή της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών εκφράζει γεωμετρικά την απόσταση  $d$  των εικόνων των δύο αριθμών. Ωστε:

$$d(P_1, P_2) \equiv d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$

Επειδή  $|z| = |z - 0|$ , έπεται ότι η  $|z|$  εκφράζει την απόσταση του σημείου  $P$  από την άρχή  $O$  των άξόνων. Δηλαδή:

$$|z| = |z - 0| = d(z, 0) \equiv d(P, O) = |\overrightarrow{OP}|.$$

Έχοντας τώρα υπόψη την παραπάνω παρατήρηση, αντιλαμβανόμαστε ότι η σχέση:

$$||z_1| - |z_2|| < |z_1 - z_2| < |z_1| + |z_2|$$

εκφράζει τή γνωστή από τή γεωμετρία πρόταση: Κάθε πλευρά τριγώνου

είναι μικρότερη από τό άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από τή διαφορά τους (βλ. σχ. 2).

Αν τά  $z_1, z_2$  είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε οί αντίστοιχες εικόνες τους είναι σημεία του άξονα των  $x$ , όποτε ή  $|z_1 - z_2|$  παριστάνει τήν απόσταση του πραγματικού αριθμού  $z_1$  από τον πραγματικό αριθμό  $z_2$ . Είναι φανερό όμως ότι  $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$ , γι' αυτό ή  $d(z_1, z_2) \equiv |z_1 - z_2|$  λέγεται και απόσταση των  $z_1, z_2$ .

**Σημείωση.** Σύμφωνα με τον προηγούμενο όρισμό της απόστάσεως δύο μιγαδικών αριθμών, αν  $z_0 \in \mathbb{C}$  και  $\rho \in \mathbb{R}$  με  $\rho > 0$ , τό σημειοσύνολο:  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \rho\}$  αποτελείται από τά σημεία  $P(z)$  που έχουν τή χαρακτηριστική ιδιότητα: απέχουν από τό σταθερό σημείο  $K(z_0)$  σταθερή απόσταση ίση με  $\rho$ . Τά σημεία όμως αυτά, όπως ξέρουμε, βρίσκονται πάνω στον κύκλο που έχει κέντρο τό  $K(z_0)$  και ακτίνα  $\rho$ . Στην ειδική περίπτωση που ο κύκλος έχει κέντρο τήν άρχή  $O$  και ακτίνα  $\rho = 1$ , δηλαδή τό σημειοσύνολο:  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ , λέγεται μοναδιαίος κύκλος. Είναι φανερό τώρα ότι τό σημειοσύνολο:  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \rho, \rho > 0\}$ , παριστάνει τό «έσωτερικό» του κύκλου  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \rho, \rho > 0\}$ .

**Σχόλιο.** Αξίζει εδώ νά τονίσουμε τή διαφορά που υπάρχει στή σχέση  $|z| = \rho$ , αν  $z \in \mathbb{R}$  και  $|z| = \rho$ , αν  $z \in \mathbb{C}$ . Έτσι στην πρώτη περίπτωση έχουμε:  $\{z \in \mathbb{R} : |z| = \rho, \rho > 0\} = \{\rho, -\rho\}$ , ενώ στή δεύτερη περίπτωση τό σημειοσύνολο  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = \rho, \rho > 0\}$  δέν είναι διμερές, αλλά άπειροσύνολο, ακριβέστερα αποτελείται από όλους εκείνους τους μιγαδικούς αριθμούς, που οί εικόνες τους βρίσκονται πάνω στον κύκλο που έχει κέντρο τήν άρχή  $O$  και ακτίνα  $\rho$ . Συνεπώς ή γνωστή ιδιότητα που ισχύει γιά πραγματικούς αριθμούς, σύμφωνα με τήν όποία:  $|\alpha| = |\beta| \Rightarrow \alpha = \beta$  είτε  $\alpha = -\beta$ , δέν ισχύει αν  $\alpha \in \mathbb{C}$  είτε  $\beta \in \mathbb{C}$ , όπως φαίνεται έξάλλου και από τό παράδειγμα που δίνουμε άμέσως παρακάτω.

**Παράδειγμα:** Οί αριθμοί:  $4 + 3i, 4 - 3i, 3 + 4i, 3 - 4i, -5$  έχουν όλοι τήν ίδια απόλυτη τιμή, 5, και όμως αν ληφθούν ανά δύο, δέν είναι ούτε ίσοι ούτε αντίθετοι μεταξύ τους.

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**1η:** Νά αποδείξετε ότι γιά κάθε  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  ισχύουν οί ισότητες:

$$\alpha) |z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\operatorname{Re}(\overline{z}_1z_2).$$

$$\beta) |z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

**Απόδειξη:**

$$\begin{aligned}\alpha) \text{ Έχουμε: } |z_1 \pm z_2|^2 &= (z_1 \pm z_2)(\overline{z_1 \pm z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm (z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1z_2) = \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm (z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1z_2) = \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2) \quad (\text{καί έπειδή } \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(\overline{z}) = x) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\operatorname{Re}(\overline{z}_1z_2), \text{ γιατί } \overline{z}_1z_2 = \overline{z_1z_2}.\end{aligned}$$

$$\beta) \text{ Έχουμε: } |z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2)$$

$$\text{καί } |z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2)$$

$$\text{Όπότε: } |z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

**Άσκηση:** Ποιό γεωμετρικό θεώρημα εκφράζει ή τελευταία σχέση;

**2η:** Αν  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  με  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$  και  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ , νά αποδείξετε ότι τά σημεία  $P_1(z_1), P_2(z_2), P_3(z_3)$  είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου έγγεγραμμένου στο μοναδιαίο κύκλο.

**Απόδειξη.** Έστω  $z_k = \overrightarrow{OP_k}$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Αφοϋ  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$  έπεται  $|\overrightarrow{OP_1}| = |\overrightarrow{OP_2}| = |\overrightarrow{OP_3}| = 1$ , δηλ. τά σημεία  $P_1(z_1), P_2(z_2), P_3(z_3)$  βρίσκονται πάνω στον κύκλο που έχει κέντρο τό  $O$  και ακτίνα 1 (βλ. σχ. 3). Στο τρίγωνο  $P_1P_2P_3$  έχουμε:  $\overrightarrow{P_1P_2} = z_2 - z_1$ ,



$\vec{P_2P_3} = z_3 - z_2$ ,  $\vec{P_3P_1} = z_1 - z_3$ . Θα αποδείξουμε τώρα ότι:  $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_2| = |z_1 - z_3|$ .  
 \*Ας επαληθεύσουμε πρώτα την:

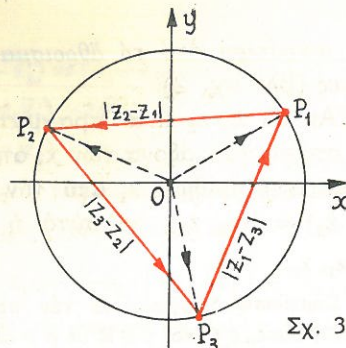
$$|z_2 - z_1| = |z_1 - z_3|.$$

Πράγματι, από την  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$  έπεται  $z_1 = -(z_2 + z_3)$ , οπότε ή  $|z_2 - z_1| = |z_1 - z_3|$  είναι ισοδύναμη με την:  $|2z_2 + z_3| = |2z_3 + z_2|$   
 $\iff (2z_2 + z_3)(2\bar{z}_2 + \bar{z}_3) = (2z_3 + z_2)(2\bar{z}_3 + \bar{z}_2)$   
 $\iff z_2\bar{z}_2 = z_3\bar{z}_3 \iff |z_2|^2 = |z_3|^2 \iff |z_2| = |z_3|.$

Τό τελευταίο όμως ισχύει, έπειδή  $|z_2| = |z_3| = 1$ .

\*Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο, αποδεικνύουμε ότι:  $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_2|$ .

\*Αρα τό τρίγωνο  $P_1P_2P_3$  είναι ισόπλευρο.



Σχ. 3

**\*Ανακεφαλαίωση.** Οί όρισμοί και οί κυριότερες ιδιότητες της απόλυτης τιμής πραγματικών και μιγαδικών αριθμών πού απορρέουν από τις προηγούμενες παραγράφους συνοψίζονται στον έπόμενο πίνακα:

| ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜ.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>α) *Όρισμός:</b><br>$ x  \stackrel{\text{ορσ}}{=} \begin{cases} x, & \text{αν } x \geq 0 \\ -x, & \text{αν } x \leq 0. \end{cases}$<br>*Ορίζεται έτσι ή ακόλουθη απεικόνιση:<br>$  : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_0^+ : x \rightarrow  x  \in \mathbf{R}_0^+$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | <b>α') *Όρισμός:</b><br>$ z  =  \alpha + \beta i  \stackrel{\text{ορσ}}{=} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$<br>*Ορίζεται έτσι ή ακόλουθη απεικόνιση:<br>$  : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{R}_0^+ : z \rightarrow  z  = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| <b>β) *Ιδιότητες:</b><br>1. $ x  \geq 0$ και $ x  = 0 \iff x = 0$<br>2. $ -x  =  x $<br>3. $ x  =  y  \iff x = y \vee x = -y$<br>4. $- x  \leq x \leq  x $<br>5. $ x  \leq \epsilon \iff -\epsilon \leq x \leq \epsilon \iff x^2 \leq \epsilon^2$<br>6. $ x ^2 = x^2$<br>7. $ x  = \sqrt{x^2}$<br>8. $  x  -  y   \leq  x \pm y  \leq  x  +  y $<br>9. $ x_1 + x_2 + \dots + x_n  \leq  x_1  + \dots +  x_n $<br>10. $ x \cdot y  =  x  \cdot  y $<br>11. $ x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n  =  x_1  \cdot  x_2  \cdot \dots \cdot  x_n $<br>12. $\left  \frac{x}{y} \right  = \frac{ x }{ y }$ μέ $y \neq 0$<br>13. $ x^k  =  x ^k$ μέ $x \neq 0$ και $k \in \mathbf{Z}$<br>14. $ x \pm y ^2 = x^2 + y^2 \pm 2xy$ | <b>β') *Ιδιότητες:</b><br>1'. $ z  \geq 0$ και $ z  = 0 \iff z = 0$<br>2'. $ -z  =  z  =  \bar{z}  =  -\bar{z} $<br>3'. <b>Προσέξτε!</b> ΔΕΝ ισχύει ανάλ. ιδ. στο $\mathbf{C}$<br>4'. » » » » » » »<br>5'. » » » » » » »<br>6'. <b>Προσέξτε!</b> $ z ^2 = z \cdot \bar{z}$<br>7'. $ z  = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{z\bar{z}}$<br>8'. $  z_1  -  z_2   \leq  z_1 \pm z_2  \leq  z_1  +  z_2 $<br>9'. $ z_1 + z_2 + \dots + z_n  \leq  z_1  + \dots +  z_n $<br>10'. $ z_1 \cdot z_2  =  z_1  \cdot  z_2 $<br>11'. $ z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n  =  z_1  \cdot  z_2  \cdot \dots \cdot  z_n $<br>12'. $\left  \frac{z_1}{z_2} \right  = \frac{ z_1 }{ z_2 }$ μέ $z_2 \neq 0$<br>13'. $ z^k  =  z ^k$ μέ $z \neq 0$ και $k \in \mathbf{Z}$<br>14'. $ z_1 \pm z_2 ^2 =  z_1 ^2 +  z_2 ^2 \pm 2\text{Re}(z_1\bar{z}_2)$ |
| <b>γ) *Απόσταση των <math>x, y</math>:</b><br>$d(x, y) \stackrel{\text{ορσ}}{=}  x - y $<br>*Ορίζεται έτσι ή ακόλουθη απεικόνιση:<br>$d : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}_0^+ : (x, y) \rightarrow d(x, y) =  x - y .$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | <b>γ') *Απόσταση των <math>z_1, z_2</math>:</b><br>$d(z_1, z_2) \stackrel{\text{ορσ}}{=}  z_1 - z_2 $<br>*Ορίζεται έτσι ή ακόλουθη απεικόνιση:<br>$d : \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{R}_0^+ : (z_1, z_2) \rightarrow d(z_1, z_2) =  z_1 - z_2 .$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**\*Ομάδα Α'. 59.** Νά βρείτε τά:  $\bar{z}$ ,  $\text{Re}(z)$ ,  $\text{Im}(z)$  και  $|z|$  αν:

α)  $z = 3 + 2i$ , β)  $z = -3i$ , γ)  $z = 2(1 - i) + 3(2 + i)$ .

60. Τί παριστάνουν γεωμετρικά τά παρακάτω υποσύνολα του  $\mathbf{C}$ :

α)  $\{z \in \mathbf{C} : |z - 1| \leq 2\}$ , β)  $\{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| > \rho, \text{ μέ } \rho > 0 \text{ και } z_0 \in \mathbf{C}\}.$

61. Νά παραστήσετε γεωμετρικά τά σημεία του μιγαδικού επιπέδου για τά όποια έχουμε:

α)  $|z| < 1$  και  $|z - i| < 1$ , β)  $|z - 1| < 1$  και  $|z - i| > 1$ .

62. \*Εστω μία απεικόνιση  $d : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  μέ τις ακόλουθες τρεις ιδιότητες:

$d_1 : d(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$  και  $d(x, y) = 0 \iff x = y$

$d_2 : d(x, y) = d(y, x) \quad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$

$d_3 : d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in \mathbf{R}.$

1) Νά δώσετε ένα παράδειγμα μις τέτοιας απεικονίσεως.

2) Θέτουμε:  $d^*(x, y) \stackrel{\text{ορσ}}{=} \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$  για κάθε  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ . \*Ορίζεται τότε ή απεικόνιση:  $d^* : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ . Νά αποδείξετε ότι ή  $d^*$  έχει επίσης τις ιδιότητες  $d_1, d_2, d_3$ .

63. Νά απεικονίσετε στό μιγαδικό επίπεδο τά παρακάτω υποσύνολα του  $\mathbf{C}$ :

$A = \{z \in \mathbf{C} : |z - i| = 1\}$ ,  $B = \{w \in \mathbf{C} : |w - 7| = 4\}$

και κατόπιν νά βρείτε την έλάχιστη και ή μέγιστη απόσταση των αντίστοιχων σημειοσυνόλων

**\* \*Ομάδα Β'. 64.** \*Εστω ότι:  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ ,  $\alpha\gamma \neq 0$  και  $|p_1| \neq |p_2|$ , όπου  $p_1, p_2$  είναι οί ρίζες της εξισώσεως:  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ . Θέτουμε  $M = \max \left\{ \left| \frac{p_1}{p_2} \right|, \left| \frac{p_2}{p_1} \right| \right\}$ . Νά αποδείξετε ότι:

i)  $2 \left| 1 - \frac{\beta^2}{2\alpha\gamma} \right| - 1 < M < 2 \left| 1 - \frac{\beta^2}{2\alpha\gamma} \right|$

ii)  $1 < \left| 1 - \frac{\beta^2}{2\alpha\gamma} \right|$

iii) Είναι δυνατό μέ τις υποθέσεις πού κάναμε νά είναι  $\beta = 0$ ;

65. \*Αν  $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$  νά αποδείξετε ότι:

$|z_1 - z_2|^2 \leq (1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2).$

66. \*Αν  $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbf{C}$  μέ  $|z_1| = |z_2| = \dots = |z_n| = 1$  νά αποδείξετε ότι:

$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| = \left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_n} \right|.$

67. Νά αποδείξετε ότι για κάθε  $z \in \mathbf{C}$  ισχύει:  $|\text{Re}(z)| + |\text{Im}(z)| \leq \sqrt{2} \cdot |z|.$

68. \*Αν  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$  νά αποδείξετε τις συνεπαγωγές:

α)  $(z_1 + z_2 + z_3 = 0 \wedge z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0) \implies |z_1| = |z_2| = |z_3|$

β)  $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 \implies |z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|.$

## 6. ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΤΟ $\mathbf{R}$ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ ΤΟΥ ΑΓΝΩΣΤΟΥ

Στίς έπόμενες παραγράφους θα έκθέσουμε σέ γενικές γραμμές τόν τρόπο μέ τόν όποιο επιλύονται, μέσα στό  $\mathbf{R}$ , μερικές άπλές μορφές εξισώσεων, στίς όποιες ό άγνωστος εμφανίζεται μέσα στό σύμβολο της απόλυτης τιμής.



✓ § 32. **Επίλυση εξισώσεων της μορφής:  $\alpha|x| + \beta = 0$  με  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  και  $\alpha \neq 0$ .**—Αν υπάρχει κάποια λύση, έστω  $x \in \mathbb{R}$ , της  $\alpha|x| + \beta = 0$  (1), τότε γι' αυτή θα ισχύει:  $\dot{x} \geq 0$  ή  $x < 0$ .

Ειδικά για να είναι τό μηδέν λύση της (1) θα πρέπει:  $\beta = 0$ . Έξάλλου παρατηρούμε ότι: αν  $\dot{x}_0$  είναι λύση της (1), τότε και  $\dot{-x}_0$  είναι επίσης λύση της, γιατί έχουμε:  $\alpha|-x_0| + \beta = \alpha|x_0| + \beta = 0$ .

\*Έστω  $x \in \mathbb{R}$  λύση της (1), τότε έχουμε:

$$\alpha|x| + \beta = 0 \iff |x| = -\frac{\beta}{\alpha} \quad (2)$$

Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις:

i) αν:  $-\frac{\beta}{\alpha} \geq 0 \iff \alpha\beta \leq 0$ , τότε από τη (2) παίρνουμε:  $x = \pm \frac{\beta}{\alpha}$ .

ii) αν:  $-\frac{\beta}{\alpha} < 0 \iff \alpha\beta > 0$ , τότε από τη (2) παίρνουμε:  $|x| < 0$ , πράγμα αδύνατο, αφού για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε πάντοτε:  $|x| \geq 0$ . Στήν περίπτωση αυτή λοιπόν ή εξίσωση (1) δεν έχει λύση στο  $\mathbb{R}$ . Είναι, όπως αλλιώς, λέμε, **αδύνατη**.

Συνοψίζουμε τώρα τά προηγούμενα συμπεράσματα στον ακόλουθο πίνακα:

| Πίνακας διερευνήσεως της: $\alpha x  + \beta = 0$ , $\alpha \neq 0$ |                                                                  |
|---------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| $\beta = 0$                                                         | $\alpha x  + \beta = 0 \Rightarrow x = 0$                        |
| $\alpha\beta < 0$                                                   | $\alpha x  + \beta = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\beta}{\alpha}$ |
| $\alpha\beta > 0$                                                   | $\alpha x  + \beta = 0$ <b>αδύνατη</b>                           |

**Εφαρμογές. 1η:** Νά επιλυθεί στο  $\mathbb{R}$  ή εξίσωση:  $2|x| - 3 = 0$ .

Λύση. \*Έχουμε:  $2|x| - 3 = 0 \iff 2|x| = 3 \iff |x| = \frac{3}{2} \iff x = \pm \frac{3}{2}$ .

**2η:** Νά επιλυθεί στο  $\mathbb{R}$  ή εξίσωση:  $4|x| + 7 = 0$ .

Λύση. \*Έχουμε:  $4|x| + 7 = 0 \iff 4|x| = -7 \iff |x| = -\frac{7}{4}$ . \*Αλλά  $|x| \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , ενώ  $-\frac{7}{4} < 0$ . \*Η εξίσωση λοιπόν  $|x| = -\frac{7}{4}$ , συνεπώς και ή αρχική  $4|x| + 7 = 0$ , είναι αδύνατη, δεν έχει λύση στο  $\mathbb{R}$ .

✓ § 33. **Επίλυση εξισώσεων της μορφής:  $\alpha|x| + \beta x + \gamma = 0$  με  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  και  $\alpha \neq 0$ .**—Παρατηρούμε, πρώτα-πρώτα, ότι: αν  $\beta = 0$ , τότε έχουμε τη μορφή  $\alpha|x| + \gamma = 0$ , πού μελετήσαμε στήν προηγούμενη παράγραφο.

\*Αν λοιπόν υπάρχει κάποια λύση, έστω  $x \in \mathbb{R}$ , της  $\alpha|x| + \beta x + \gamma = 0$  (ε) τότε γι' αυτή θα ισχύει: ή  $x \geq 0$  ή  $x < 0$ .

Ειδικά για να είναι τό μηδέν λύση της (ε), θα πρέπει:  $\gamma = 0$ .

Γιά τήν επίλυση επομένως της (ε) διακρίνουμε τίς εξής περιπτώσεις:

**A)** \*Αναζητούμε τίς μή αρνητικές λύσεις της (ε), δηλαδή  $x \geq 0$ .

Σ' αυτή τήν περίπτωση έχουμε τότε να επιλύσουμε τό σύστημα:

$$(\Sigma_1): \quad \left. \begin{array}{l} \alpha|x| + \beta x + \gamma = 0 \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} (\alpha + \beta)x = -\gamma \\ x \geq 0 \end{array} \right.$$

**a<sub>1</sub>)** \*Αν  $\alpha + \beta \neq 0$ , τότε από τήν εξίσωση του συστήματος έχουμε:

$x = -\frac{\gamma}{\alpha + \beta}$  (1). \*Η λύση αυτή θα είναι λύση του συστήματος, επομένως και της (ε), αν:

$$-\frac{\gamma}{\alpha + \beta} \geq 0 \iff \frac{\gamma}{\alpha + \beta} \leq 0 \iff \gamma(\alpha + \beta) \leq 0,$$

ενώ αν:  $-\frac{\gamma}{\alpha + \beta} < 0 \iff \frac{\gamma}{\alpha + \beta} > 0 \iff \gamma(\alpha + \beta) > 0$

ή (1) δεν είναι δεκτή για τήν (ε), δηλαδή ή (ε) δεν έχει λύση στο  $\mathbb{R}_0^+$ .

**a<sub>2</sub>)** \*Αν  $\alpha + \beta = 0$ , τότε έχουμε:  $0x = -\gamma$  και επομένως:

αν  $\gamma \neq 0$ , ή εξίσωση (ε) είναι αδύνατη στο  $\mathbb{R}_0^+$ , ενώ

αν  $\gamma = 0$ , ή εξίσωση (ε) είναι άοριστη (ταυτότητα) στο  $\mathbb{R}_0^+$ .

**B)** \*Αναζητούμε τίς αρνητικές λύσεις της (ε), δηλαδή  $x < 0$ .

Τότε έχουμε να επιλύσουμε τό σύστημα:

$$(\Sigma_2): \quad \left. \begin{array}{l} \alpha|x| + \beta x + \gamma = 0 \\ x < 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} -\alpha x + \beta x = -\gamma \\ x < 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} (\alpha - \beta)x = \gamma \\ x < 0 \end{array} \right.$$

**β<sub>1</sub>)** \*Αν  $\alpha - \beta \neq 0$ , τότε από τήν εξίσωση του συστήματος έχουμε:

$$x = \frac{\gamma}{\alpha - \beta} \quad (2)$$

\*Η λύση αυτή θα είναι λύση του συστήματος  $(\Sigma_2)$ , επομένως και της (ε),

αν:  $\frac{\gamma}{\alpha - \beta} < 0 \iff \gamma(\alpha - \beta) < 0,$

ενώ αν:  $\frac{\gamma}{\alpha - \beta} \geq 0 \iff \gamma(\alpha - \beta) \geq 0$

ή (2) δεν είναι λύση του συστήματος  $(\Sigma_2)$ , άρα τότε ή (ε) δεν έχει λύση στο  $\mathbb{R}^-$ .

**β<sub>2</sub>)** \*Αν  $\alpha - \beta = 0$ , τότε ή εξίσωση του συστήματος γίνεται:  $0x = \gamma$  και

επομένως: αν  $\gamma \neq 0$ , τότε τό σύστημα [άρα και ή (ε)] είναι αδύνατο στο  $\mathbb{R}^-$ ,

ενώ αν  $\gamma = 0$ , ή εξίσωση (ε) είναι άοριστη (ταυτότητα) στο  $\mathbb{R}^-$ .

**Παρατήρηση.** Ειδική μορφή της (ε) είναι ή εξίσωση:  $|x| = x + k$ , όπου  $k \in \mathbb{R}$ . \*Η επίλυσή της γίνεται και μέ τόν εξής τρόπο:



\*Η εξίσωση  $|x| = x + k$  είναι ισοδύναμη με την:  $|x| - x = k$ . \*Αρα  $k \geq 0$  (§ 22).

i) Για  $k = 0$  έχουμε:  $|x| - x = 0 \iff |x| = x$  και αληθεύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}_0^+$ .

ii) Για  $k > 0$  πρέπει:  $|x| > x$  και άρα  $x < 0$ . Τότε όμως η εξίσωση γίνεται:

$$-2x = k \Rightarrow x = -\frac{k}{2}.$$

**\*Εφαρμογή:** Νά επιλυθεί στο  $\mathbb{R}$  η εξίσωση:  $3|x| + 2x - 4 = 0$ .

**Λύση.** Παρατηρούμε άμέσως ότι το μηδέν δεν είναι λύση της  $3|x| + 2x - 4 = 0$  (1). Έπομένως, αν υπάρχει κάποια λύση, έστω  $x \in \mathbb{R}$ , της (1), τότε γι' αυτή θα ισχύει:

$$\text{ή } x > 0 \quad \text{ή } x < 0$$

(α) Στην πρώτη περίπτωση έχουμε να λύσουμε το σύστημα:

$$(\Sigma_1) \quad \left. \begin{array}{l} 3|x| + 2x - 4 = 0 \\ x > 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} 5x - 4 = 0 \\ x > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{4}{5}$$

Αυτή η λύση του συστήματος είναι και λύση της εξισώσεως (1).

(β) Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε να λύσουμε το σύστημα:

$$(\Sigma_2) \quad \left. \begin{array}{l} 3|x| + 2x - 4 = 0 \\ x < 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} -3x + 2x - 4 = 0 \\ x < 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} x = -4 \\ x < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = -4.$$

Αυτή η λύση του συστήματος ( $\Sigma_2$ ) είναι και λύση της (1).

\*Αρα η (1) έχει λύσεις τις:  $x_1 = \frac{4}{5}$ ,  $x_2 = -4$  και μόνο αυτές.

**§ 34. \*Επίλυση εξισώσεων της μορφής:  $\alpha x^2 + \beta|x| + \gamma = 0$  (1) με  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  και  $\alpha \neq 0$ .**— Έπειδή για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι:  $x^2 = |x|^2$ , η (1) γράφεται:  $\alpha|x|^2 + \beta|x| + \gamma = 0$ .

Θέτουμε τώρα  $|x| = y$ ,  $y \geq 0$ , και η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με το σύστημα:

$$(\Sigma): \quad \left. \begin{array}{l} \alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

\*Έπομένως για να λύσουμε την (1) αρκεί να βρούμε τις **μή αρνητικές** ρίζες της:

$$\alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0 \quad (2)$$

**\*Ασκήση.** Αφοῦ εξετάσετε το πρόσημο των ριζών της (2), να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της (1).

**\*Εφαρμογή.** Νά επιλυθεί στο  $\mathbb{R}$  η εξίσωση:  $x^2 - 5|x| + 6 = 0$ . (1)

**Λύση.** \*Η (1) γράφεται:  $|x|^2 - 5|x| + 6 = 0$ . Θέτουμε  $|x| = y \geq 0$  και η (1) είναι ισοδύναμη με το σύστημα:

$$(\Sigma) \quad \left. \begin{array}{l} y^2 - 5y + 6 = 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_1 = 2 \\ y_2 = 3 \end{array} \right.$$

Τότε έχουμε:  $|x| = 2$  και  $|x| = 3$ , από τις οποίες βρίσκουμε:  $x = \pm 2$  και  $x = \pm 3$ .

\*Αρα η (1) έχει λύσεις τις:  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = -2$ ,  $x_3 = 3$ ,  $x_4 = -3$  και μόνο αυτές.

**Παρατήρηση.** Γενικότερη μορφή της (1) είναι οι εξισώσεις της μορφής:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma|x| + \delta = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \text{ με } \alpha\beta \neq 0.$$

**Παράδειγμα.** Νά επιλυθεί στο  $\mathbb{R}$  η εξίσωση:  $x^2 - 3x + 2|x| - 6 = 0$  (1)

**Λύση.** Το μηδέν δεν είναι λύση της (1). \*Αρα αν υπάρχει κάποια λύση, έστω  $x \in \mathbb{R}$ , της (1), τότε γι' αυτή θα ισχύει: ή  $x > 0$  ή  $x < 0$ .

(α) Στην πρώτη περίπτωση έχουμε να λύσουμε το σύστημα:

$$(\Sigma_1) \quad \left. \begin{array}{l} x^2 - 3x + 2|x| - 6 = 0 \\ x > 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} x^2 - x - 6 = 0 \\ x > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 3.$$

\*Η άλλη ρίζα  $x = -2$  της εξισώσεως του συστήματος ( $\Sigma_1$ ), δεν αποτελεί \*λύση του συστήματος [άρα και της (1)], γιατί είναι:  $-2 < 0$ .

(β) Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε να λύσουμε το σύστημα:

$$(\Sigma_2) \quad \left. \begin{array}{l} x^2 - 3x + 2|x| - 6 = 0 \\ x < 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 5x - 6 = 0 \\ x < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = -1.$$

\*Αρα η (1) έχει πραγματικές λύσεις τις:  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = -1$  και μόνο αυτές.

**Επίλυση εξισώσεων της μορφής:  $|A(x)| + |B(x)| + \dots + |P(x)| + Q(x) = 0$  (1), όπου  $A(x), B(x), \dots, P(x), Q(x)$  άκέραια πολυώνυμα του  $x$  με πραγματικούς συντελεστές.**—Για να βρούμε τις πραγματικές λύσεις της (1) εξετάζουμε τά πρόσημα των  $A(x), B(x), \dots, P(x)$ , δηλαδή των πολυωνύμων που βρίσκονται μέσα στο σύμβολο της απόλυτης τιμής, για τις διάφορες πραγματικές τιμές του  $x$ . Κατόπιν, με βάση αυτά τά πρόσημα, εξαλείφουμε τά απόλυτα και έτσι βρίσκουμε σε κάθε διάστημα μεταβολής του  $x$  και μία ισοδύναμη εξίσωση με την (1) χωρίς απόλυτες τιμές. Οι λύσεις των εξισώσεων που προκύπτουν, εφόσον βρίσκονται κάθε φορά στο αντίστοιχο διάστημα μεταβολής του  $x$ , είναι και λύσεις της (1). Άλλιώς απορρίπτονται.

**Παράδειγμα.** Νά επιλυθεί η εξίσωση:  $-2x + |x| - 3|x - 2| + 5|x + 1| = -5$  (1)

**Λύση.** \*Η (1) γράφεται:  $|x| - 3|x - 2| + 5|x + 1| - 2x + 5 = 0$  (2)

Βρίσκουμε τις ρίζες των εξισώσεων:  $x = 0$ ,  $x - 2 = 0$ ,  $x + 1 = 0$ , τις οποίες αν τις διατάξουμε στον πραγματικό άξονα, θα έχουμε:



Τώρα κάνουμε την εξής σκέψη: αν υπάρχει κάποια λύση, έστω  $x \in \mathbb{R}$ , της (2), τότε γι' αυτή θα ισχύει:

$$\text{ή } x < -1 \quad \text{ή } -1 \leq x < 0 \quad \text{ή } 0 \leq x < 2 \quad \text{ή } 2 \leq x.$$

\*Έτσι έχουμε να λύσουμε τά επόμενα τέσσερα συστήματα:

$$\Sigma_1: \left\{ \begin{array}{l} |x| - 3|x - 2| + 5|x + 1| - 2x + 5 = 0 \\ x < -1 \end{array} \right\}, \quad \Sigma_2: \left\{ \begin{array}{l} |x| - 3|x - 2| + 5|x + 1| - 2x + 5 = 0 \\ -1 \leq x < 0 \end{array} \right\}$$

$$\Sigma_3: \left\{ \begin{array}{l} |x| - 3|x - 2| + 5|x + 1| - 2x + 5 = 0 \\ 0 \leq x < 2 \end{array} \right\}, \quad \Sigma_4: \left\{ \begin{array}{l} |x| - 3|x - 2| + 5|x + 1| - 2x + 5 = 0 \\ x \geq 2 \end{array} \right\}$$

\*Η επίλυση των συστημάτων αυτών γίνεται συντομότερα, αν καταρτίσουμε τον ακόλουθο πίνακα:



| x  | x-2 | x | x+1 | x -3 x-2 +5 x+1 -2x+5=0 | Συμπεράσματα                                                |
|----|-----|---|-----|-------------------------|-------------------------------------------------------------|
| -∞ | -   | - | -   | -x+3(x-2)-5(x+1)-2x+5=0 | $\Rightarrow x = -\frac{6}{5} \in (-\infty, -1)$ , δεκτή.   |
| -1 | -   | - | 0   | -x+3(x-2)+5(x+1)-2x+5=0 | $\Rightarrow x = -\frac{4}{5} \in [-1, 0)$ , δεκτή.         |
| 0  | -   | 0 | +   | -x+3(x-2)+5(x+1)-2x+5=0 | $\Rightarrow x = -\frac{4}{5} \notin [0, 2)$ , απορριπτ.    |
| 2  | -   | + | +   | -x+3(x-2)+5(x+1)-2x+5=0 | $\Rightarrow x = -\frac{4}{5} \notin [2, +\infty)$ , απορρ. |
| +∞ | +   | + | +   | x-3(x-2)+5(x+1)-2x+5=0  | $\Rightarrow x = -16 \notin [2, +\infty)$ , απορρ.          |

\*Από τον πίνακα βλέπουμε πώς η (1) έχει δύο λύσεις, τις:  $x_1 = -\frac{6}{5}$ ,  $x_2 = -\frac{4}{5}$ .

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Ομάδα Α'. 69.** Νά επιλύσετε στο  $\mathbb{R}$  τις εξισώσεις:

- $3|x| - 5 = 0$ ,
- $|3x| - 2 = |x| + 8$ ,
- $-6|x| + 5 = 0$ ,
- $-2|x| + x + 1 = 0$ ,
- $\frac{2}{3}|x| - 2x = 7$ ,
- $2|x| + 7x - 3 = 0$ ,
- $x^2 - 7|x| + 12 = 0$ ,
- $x^2 - 10|x| - 24 = 0$ ,
- $x^2 - 3|x| + 2x - 6 = 0$ ,
- $x^2 - 8|x| + 7 = 0$ ,
- $x^2 + 10|x| + 24 = 0$ ,
- $x^2 - 4x + 2|x| - 3 = 0$

70. Νά επιλύσετε τις παρακάτω εξισώσεις για διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

- $2x + 3|x| = \lambda x + 2$ ,
- $\lambda|x| + 3x = -1$ .

**\*Ομάδα Β'. 71.** Νά επιλύσετε στο  $\mathbb{R}$  τις εξισώσεις:

- $|x|^3 - 5x^2 - 17|x| + 21 = 0$ ,
- $|2x-1| - 3|x-1| = 1$ ,
- $|x^2 - 3x + 2| + |x-4| - 13 = 0$ ,
- $|x^2 - 5x + 6| - 2|x-1| + 2x - 3 = 0$ ,
- $\frac{1}{|x-1|} - \frac{2}{|x-2|} + \frac{1}{|x-3|} = 0$ .

72. Νά επιλύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις για διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

- $|2x - |2x-1|| = -\lambda^2 x$ ,
- $|x-3| - \lambda|x-1| = 2$ ,
- $|\lambda-1|x + (\lambda-1)|x| = \lambda^2 - 1$ .

73. Νά βρείτε τη σχέση που συνδέει τους συντελεστές της εξίσωσης:

$$\alpha|x|^3 + \beta x^2 + \gamma|x| + \delta = 0$$

ώστε αυτή να έχει τό μέγιστο δυνατό πλήθος πραγματικών ριζών.

74. Έστω η εξίσωση:  $x^2 + x + \lambda|x| + 1 = 0$ . Νά βρείτε τό  $\lambda$ , ώστε αυτή να έχει τέσσερις ρίζες πραγματικές και άνισες.

### \* III. ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ ΤΟΥ ΑΓΝΩΣΤΟΥ

**§ 36.** Για νά επιλύσουμε άνισώσεις με απόλυτες τιμές του άγνωστου, εργαζόμαστε κάθε φορά με τρόπο ανάλογο μ' εκείνο που ακολουθήσαμε για την επίλυση εξισώσεων της αντίστοιχης μορφής.

Όπως στις εξισώσεις με απόλυτες τιμές του άγνωστου, έτσι και στις άνισώσεις, βρίσκουμε σε κάθε διάστημα μεταβολής του άγνωστου και μία άνιση χωρίς απόλυτες τιμές που είναι ισοδύναμη μ' εκείνη που μās έχει δοθεί.

Οι τομές των διαστημάτων (λύσεων) κάθε ισοδύναμης άνισώσεως με τό αντίστοιχο διάστημα μεταβολής του άγνωστου αποτελούν τις λύσεις της άνισώσεως που μās έχει δοθεί.

Γιά νά γίνουν κατανοητά τά παραπάνω θά δώσουμε δύο παραδείγματα επίλυσεως άνισώσεων διαφόρων μορφών.

**Παράδειγμα 1ο:** Νά επιλυθεί η άνίσωση:  $\frac{|x|-5}{3} > \frac{x-8}{4}$  (1)

Λύση. Έχουμε: α) άν  $x \geq 0$ , τότε  $|x| = x$ , όπότε η (1) είναι ισοδύναμη με τό σύστημα:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x-5}{3} > \frac{x-8}{4} \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > -4 \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \geq 0 \quad (2)$$

β) άν  $x < 0$ , τότε  $|x| = -x$ , όπότε η (1) είναι ισοδύναμη με τό σύστημα:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{-x-5}{3} > \frac{x-8}{4} \\ x < 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -7x > -4 \\ x < 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < \frac{4}{7} \\ x < 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x < 0 \quad (3)$$

\*Από τις (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι η (1) επαληθεύεται από κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Παράδειγμα 2ο:** Νά επιλυθεί η άνίσωση:  $|x+1| - 2|x| + |x-1| - \frac{2x+4}{5} > 0$  (1)

Λύση. Οι τιμές του  $x$  που μηδενίζουν τις παραστάσεις που βρίσκονται μέσα στό σύμβολο της απόλυτης τιμής είναι με τή σειρά:  $x = -1$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Θέτουμε: } A \equiv x+1 \\ B \equiv x \\ \Gamma \equiv x-1 \end{array} \right\}, \text{ τότε } \begin{array}{c} \frac{x}{A} \begin{array}{c} -1 \\ + \end{array} \\ \frac{x}{B} \begin{array}{c} - \\ 0 \\ + \end{array} \\ \frac{x}{\Gamma} \begin{array}{c} - \\ - \\ + \end{array} \end{array}$$

\*Αν εργαστούμε τώρα όπως και στό παράδειγμα της § 35 καταρτίζουμε τον ακόλουθο πίνακα:

| x  | A | B | Γ | $ x+1 -2 x + x-1 -\frac{2x+4}{5} > 0$ | Συμπεράσματα                                                                                            |
|----|---|---|---|---------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| -∞ | - | - | - | $-(x+1)+2x-(x-1)-\frac{2x+4}{5} > 0$  | $\Rightarrow x < -2$ . *Αρα: $x \in (-\infty, -2) \cap (-\infty, -1) = (-\infty, -2)$                   |
| -1 | 0 | - | - | $(x+1)+2x-(x-1)-\frac{2x+4}{5} > 0$   | $\Rightarrow x > -\frac{3}{4}$ . *Αρα: $x \in (-\frac{3}{4}, +\infty) \cap [-1, 0) = (-\frac{3}{4}, 0)$ |
| 0  | + | 0 | - | $(x+1)-2x-(x-1)-\frac{2x+4}{5} > 0$   | $\Rightarrow x < \frac{1}{2}$ . *Αρα: $x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cap [0, 1) = [0, \frac{1}{2})$     |
| 1  | + | + | 0 | $(x+1)-2x+(x-1)-\frac{2x+4}{5} > 0$   | $\Rightarrow x < -2$ . *Αρα: $x \in (-\infty, -2) \cap [1, +\infty) = \emptyset$ .                      |
| +∞ | + | + | + | $(x+1)-2x+(x-1)-\frac{2x+4}{5} > 0$   |                                                                                                         |

από τον όποιο βλέπουμε πώς η (1) αληθεύει, όταν  $x < -2$  και  $-\frac{3}{4} < x < \frac{1}{2}$ .



## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Ομάδα Α'.** 75. Να επιλύσετε τις επόμενες ανισώσεις:

1.  $|3x| - 2 > |x| + 8$ ,      2.  $2|x| + x > 10$ ,      3.  $\frac{3|x|+1}{4} - \frac{4-x}{3} > 1$ ,
4.  $|x|^3 - 4x^2 + |x| + 6 > 0$ ,      5.  $3|x| + 4|x-1| > 5$ ,      6.  $|2x+1| + |6x| > 9$ .

76. Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματική τιμή του  $x$  ισχύει η σχέση:

$$|x-2| + |2x-1| \geq \frac{3}{2}$$

Πότε η σχέση αυτή ισχύει με τό «ίσον»;

77. Να επιλύσετε τις ανισώσεις:

1.  $|2x+1| - 4|x-3| - |x-4| > 3$ ,      2.  $||x| + x| - |x| - x| < |x-2|$
3.  $|x-1| + |x-2| + |x-3| < x+1$ ,      4.  $\frac{|2x^2-5|}{3|x|} > \frac{|x|+1}{2}$ .

**Ομάδα Β'.** 78. Για ποιές πραγματικές τιμές του  $x$  έχει νόημα στο  $\mathbb{R}$  καθεμία από τις επόμενες παραστάσεις:

$$A \equiv \sqrt{3x^2 - 10|x| + 3}, \quad B \equiv \sqrt{|x^2 + 8x - 9| - 24}.$$

79. "Αν  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  και  $|x| = \alpha x + \beta x + 1$ , να βρείτε για ποιές τιμές του  $x$  είναι:  $|\alpha + \beta| < 1$ .

80. "Εστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο:

$$f(x) = \left| x + \frac{3}{2} \right| + \left| x - \frac{1}{2} \right| + |x-2|.$$

- α) Να βρείτε τις εκφράσεις της χωρίς τό σύμβολο της απόλυτης τιμής για  $x \in \mathbb{R}$ .
- β) Πώς μεταβάλλεται η  $f$  στο πεδίο ορισμού της;
- γ) Να δώσετε τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως, όταν:  $-\infty < x < +\infty$ .
- δ) Να αποδείξετε ότι:  $f(x) \geq \frac{7}{2} \forall x \in \mathbb{R}$ . Για ποιές τιμές του  $x$  ισχύει τό ίσον;

81. "Εστω η απεικόνιση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο:

$$f(x) = |x-2| + |2x-1|.$$

Να δικαιολογήσετε γιατί η  $f$  δέν είναι μία άμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του  $\mathbb{R}$  πάνω στο  $\mathbb{R}$  και κατόπιν να αποδείξετε ότι: αν  $x_1 \geq 2$  και  $x_1 + x_2 = 2$ , τότε θά είναι:  $f(x_1) = f(x_2)$ .

Τέλος να δώσετε τη γραφική παράσταση της  $f$ , όταν:  $-\infty < x < +\infty$  και από τη γραφική της παράσταση να συμπεράνετε ότι:  $\min f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ .

### \* IV. ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΤΟ $\mathbb{R}$ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ ΤΩΝ ΑΓΝΩΣΤΩΝ

**§ 37.** "Επίλυση συστημάτων της μορφής:  $\begin{cases} \alpha|x| + \beta|y| = \gamma \\ \alpha'|x| + \beta'|y| = \gamma' \end{cases}$  (1)

όπου  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$  είναι πραγμ. αριθμοί ανεξάρτητοι από τά  $x, y$ .

Θέτουμε:  $|x| = x_1, |y| = y_1$  και τό σύστημα (1) παίρνει τή μορφή:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta y_1 = \gamma \\ \alpha' x_1 + \beta' y_1 = \gamma' \end{cases} \quad (2)$$

Τό σύστημα (2), όπως μās είναι γνωστό από τήν προηγούμενη τάξη, έχει τή λύση:

$$x_1 = \frac{\gamma\beta' - \gamma'\beta}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}, \quad y_1 = \frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}, \quad (\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0).$$

"Επειδή για οποιαδήποτε τιμή των  $x$  και  $y$  είναι:  $|x| \geq 0, |y| \geq 0$ , τό σύστημα (1) θά έχει λύση, όταν και μόνο, όταν:

$$\frac{\gamma\beta' - \gamma'\beta}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} \geq 0, \quad \frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} \geq 0.$$

Μ' αυτή τήν προϋπόθεση λαμβάνουμε ως λύσεις του συστήματος (1), τīs λύσεις του ζεύγους των εξισώσεων:

$$|x| = \frac{\gamma\beta' - \gamma'\beta}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}, \quad |y| = \frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta},$$

τīs όποϊες βρίσκουμε σύμφωνα μέ όσα είπαμε στην § 32.

**"Εφαρμογή.** Να επιλυθεί στο  $\mathbb{R}$  τό σύστημα:

$$\begin{cases} 3|x| - 2|y| = 10 \\ 5|x| + 3|y| = 23 \end{cases} \quad (1)$$

**Λύση.** Θέτουμε  $|x| = x_1, |y| = y_1$  και τό σύστημα (1) παίρνει τή μορφή:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2y_1 = 10 \\ 5x_1 + 3y_1 = 23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 1 \end{cases} \quad (2)$$

Τότε οί λύσεις του συστήματος (1) είναι οί λύσεις του ζεύγους των εξισώσεων:

$$\begin{cases} |x| = 4 \\ |y| = 1 \end{cases}, \quad \text{από τīs όποϊες βρίσκουμε: } x = \pm 4 \text{ και } y = \pm 1.$$

"Αρα οί λύσεις του συστήματος (1) είναι τά τέσσερα ζεύγη:

$$(x=4, y=1), (x=4, y=-1), (x=-4, y=1), (x=-4, y=-1).$$

**§ 38.** "Επίλυση συστημάτων της μορφής:  $\begin{cases} \alpha|x| + \beta|y| + \gamma x + \delta y = k \\ \alpha'|x| + \beta'|y| + \gamma'x + \delta'y = k' \end{cases}$  (1)

όπου οί συντελεστές των άγνώστων και οί σταθεροί όροι είναι πραγματικοί αριθμοί που δέν εξαρτώνται από τά  $x, y$ .

Γιά τήν επίλυση του συστήματος (1) διακρίνουμε τīs έξης τέσσερις περιπτώσεις:

α)  $x \geq 0, y \geq 0$ , όπότε  $|x| = x, |y| = y$  και τό σύστημα (1) παίρνει τή μορφή:

$$\begin{cases} (\alpha + \gamma)x + (\beta + \delta)y = k \\ (\alpha' + \gamma')x + (\beta' + \delta')y = k' \end{cases} \quad (2)$$

Τότε οί μή άρνητικές λύσεις του (2) είναι λύσεις του συστήματος (1).

Συνεχίζουμε τήν επίλυση μέ τīs ακόλουθες, άκόμη, περιπτώσεις:

$$\beta) x \geq 0, y < 0, \quad \gamma) x < 0, y \geq 0, \quad \delta) x < 0, y < 0.$$

**"Εφαρμογή.** Να επιλυθεί στο  $\mathbb{R}$  τό σύστημα:  $\begin{cases} |x| - 2y = 3 \\ x + |y| = 6 \end{cases}$  (2)



**Λύση.** \*Αν υπάρχει λύση του (Σ), έστω  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , τότε γι' αυτή θά ισχύει: ή  
α)  $x \geq 0, y \geq 0$ , όπότε  $|x| = x, |y| = y$  και τό σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ x + y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Τό ζεύγος  $(x = 5, y = 1)$  είναι λύση του (Σ), αφού  $x = 5 \geq 0, y = 1 \geq 0$ .

β)  $x \geq 0, y < 0$ , όπότε  $|x| = x, |y| = -y$  και τό σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ x - y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 3 \end{cases}.$$

Τό ζεύγος όμως  $(x = 9, y = 3)$  δέν είναι λύση του (Σ), γιατί:  $y = 3 > 0$ .

γ)  $x < 0, y \geq 0$ , όπότε  $|x| = -x, |y| = y$  και τό σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases} -x - 2y = 3 \\ x + y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = -9 \end{cases}.$$

Πάλι όμως τό ζεύγος  $(x = 15, y = -9)$  δέν είναι λύση του (Σ), γιατί  $x = 15 > 0, y = -9 < 0$ .

δ)  $x < 0, y < 0$ , όπότε  $|x| = -x, |y| = -y$  και τό σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases} -x - 2y = 3 \\ x - y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \end{cases}.$$

Τό ζεύγος όμως  $(x = 3, y = -3)$  δέν είναι λύση του (Σ), γιατί  $x = 3 > 0$ .

\*Αρα ή μοναδική λύση του συστήματος είναι τό ζεύγος:  $(x = 5, y = 1)$ .

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**\*Ομάδα Α'. 82.** Νά επιλύσετε στό  $\mathbb{R}$  τά επόμενα συστήματα:

- $\begin{cases} 2|x| + 3|y| = 11 \\ 3|x| - 5|y| = 7 \end{cases}$
- $\begin{cases} |x| + |y| = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$
- $\begin{cases} 3x - 5|y| = 1 \\ x|y| + y|x| = 4 \end{cases}$
- $\begin{cases} |2x - 3y| = 12 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$
- $\begin{cases} |x| - |y| = -2 \\ y + y|x| = 6 \end{cases}$
- $\begin{cases} |x| + |y| = \alpha \\ \alpha y = x^2 \end{cases} (\alpha \in \mathbb{R}).$

83. Τό ίδιο νά κάνετε γιά τά συστήματα:

- $\begin{cases} 4|x - 2| + |y - 1| = 5 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases}$
- $\begin{cases} |x - 2y| + |x + y - 1| = 2 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$
- $\begin{cases} |x| + |y - 1| = 3 \\ |x| + |y - 2| = 4 \end{cases}$

**\*Ομάδα Β'. 84.** Νά επιλύσετε τά παρακάτω συστήματα γιά τίς διάφορες τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

- $\begin{cases} |ax + y| = 2x \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$
- $\begin{cases} |x| + |y| = \alpha \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

85. Νά βρείτε τίς άκέραιες λύσεις του συστήματος:

$$x^2 = yz \wedge |y + z| > x^2 + 1,$$

όταν οι  $z, y$  έχουν τίς ελάχιστες απόλυτες τιμές.

86. Νά επιλύσετε στό  $\mathbb{R}$  τό σύστημα:

$$x^2 = \frac{z^2}{2|yz| - y^2} \quad (1) \quad , \quad 0 < x \leq \frac{3}{3 + |y + 2|} \quad (2)$$

87. Νά βρείτε τίς άκέραιες λύσεις του συστήματος:

$$\left\{ (x^2 + 4y^2)(z^2 + 4) = (xz + 4y)^2 \wedge 16z^2 - 56 \left| \frac{x}{y} \right| + 45 < 0 \wedge x^2 + y^2 + |xy| < 64 \right\}$$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

### ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

#### I. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ — ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

✓ **§ 39.** \*Η έννοια της ακολουθίας.— Στήν Γ' τάξη του Γυμνασίου μάθαμε ότι: κάθε συνάρτηση  $\alpha: \mathbb{N} \rightarrow E: n \xrightarrow{\alpha} \alpha(n) \in E$  μέ πεδίο ορισμού τό σύνολο  $\mathbb{N}$  των φυσικών αριθμών και τιμές σ' ένα μή κενό σύνολο  $E$ , δηλαδή ή απεικόνιση, πού ορίζεται από την αντιστοιχία:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & , & 2 & , & 3 & , & \dots, n, \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \alpha(1) & , & \alpha(2) & , & \alpha(3) & , & \dots, \alpha(n), \dots \end{array} \quad (1)$$

λέγεται ακολουθία στοιχείων του συνόλου  $E$ .

Στήν παραπάνω αντιστοιχία τά πρότυπα (άρχέτυπα), δηλ. οι φυσικοί αριθμοί, λέγονται και δείκτες, ενώ οι εικόνες τους, δηλ. οι τιμές της ακολουθίας  $\alpha: \mathbb{N} \ni n \rightarrow \alpha(n) \in E$ , λέγονται και όροι της ακολουθίας. \*Η έκφραση  $\alpha(n)$  συμβολίζεται συνήθως μέ  $\alpha_n$  και λέγεται ό νιοστός ή ό γενικός όρος της ακολουθίας. \*Έτσι έχουμε:

$$\alpha_n \underset{\text{όρος}}{=} \alpha(n) \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Στήν αντιστοιχία (1) συνήθως παραλείπεται ή πρώτη γραμμή και γράφονται μόνο οι εικόνες. Γράφουμε δηλαδή:  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$  (2)

Ειδικά ό  $\alpha_1$  λέγεται π ρ ώ τ ο ς ό ρ ο ς της ακολουθίας (2), ό  $\alpha_2$  δ ε ύ τ ε ρ ο ς ό ρ ο ς κ.ο.κ.

Συντομότερα την ακολουθία (2) θά τη συμβολίζουμε ως εξής:  $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$ , ή  $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$ , ακόμη μέ:  $(\alpha_n), n \in \mathbb{N}$  και ακόμη πιό σύντομα μέ:  $(\alpha_n)$ .

Στήν ειδική περίπτωση πού τό  $E \subset \mathbb{R}$ , ή ακολουθία  $\alpha: \mathbb{N} \rightarrow E$  λέγεται ακολουθία πραγματικών αριθμών. \*Ωστε:

✓ **\*Ορισμός.** \*Ονομάζουμε ακολουθία πραγματικών αριθμών κάθε (μονοσήμαντη) απεικόνιση του συνόλου  $\mathbb{N}$  των φυσικών αριθμών στό σύνολο  $\mathbb{R}$  των πραγματικών αριθμών.

Στά επόμενα θά ασχοληθούμε μόνο μέ ακολουθίες πραγματικών αριθμών.



\*Ετσι στο εξής με τον όρο: «*ακολουθία*» θά έννοοῦμε: «*ακολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν*», δηλαδή:  $\alpha: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}: v \rightarrow \alpha_v \in \mathbf{R}$ .

**Παραδείγματα:** 1. Ἡ ἀκολουθία τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, δηλ. ἡ ἀκολουθία: 1, 2, 3, ...,  $v$ , ... τῆς ὁποίας ὁ γενικός (νιοστός) ὁρος εἶναι ὁ ἀριθμός  $v$ , δηλ.  $\alpha_v = v$ .

2. Ἡ ἀκολουθία: 1,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ , ...,  $\frac{1}{v}$ , ... μέ γενικό ὁρο:  $\alpha_v = \frac{1}{v}$ .

3. Ἡ ἀκολουθία: -1,  $\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{1}{3}$ , ...,  $(-1)^v \frac{1}{v}$ , ... μέ γενικό ὁρο:  $\alpha_v = (-1)^v \frac{1}{v}$ .

4. Ἄν ἀπεικονίσουμε τοὺς περιττοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς στὸν ἀριθμὸ 0 καὶ τοὺς ἄρτιους φυσικοὺς στὸν ἀριθμὸ 1, θά πάρομε τὴν ἀκολουθία: 0, 1, 0, 1, ..., 0, 1, ...

Ἡ ἀκολουθία αὕτη συνήθως συμβολίζεται ὡς ἐξῆς:

$$\mathbf{N} \ni v \rightarrow \alpha_v = \begin{cases} 0, & \text{ἂν } v \text{ περιττός} \\ 1, & \text{ἂν } v \text{ ἄρτιος.} \end{cases}$$

5. Ἡ ἀκολουθία μέ γενικό ὁρο  $\alpha_v = 1 + (-1)^v$ , δηλαδή ἡ ἀκολουθία: 0, 2, 0, 2, ..., 0, 2, ...

Αὕτη ἡ ἀκολουθία μέ ἀκριβέστερη διατύπωση γράφεται:

$$\alpha_v = \begin{cases} 2, & \text{ἂν } v = 2k \text{ (} k \text{ φυσικός)} \\ 0, & \text{ἂν } v = 2k+1 \text{ (} k \text{ ἀκέραιος } \geq 0 \text{).} \end{cases}$$

6. Θεωροῦμε τὴν ἀκολουθία  $\alpha_v = \frac{2v}{v+3}$ ,  $v = 1, 2, \dots$ . Ὁρίζεται ἔτσι μία ἀπεικόνιση:

$$\alpha: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}: v \rightarrow \alpha_v \in \mathbf{R}.$$

Δίνοντας στὸ  $v$  διαδοχικά τίς θετικές ἀκέραιες τιμές, παίρουμε τοὺς ὁρους τῆς. Πιο ἀναλυτικά ἡ παραπάνω ἀκολουθία συμβολίζεται μέ τίς διαδοχικές τιμές τῆς:

$$\frac{2}{4}, \frac{4}{5}, \frac{6}{6}, \frac{8}{7}, \dots, \frac{2v}{v+3}, \dots$$

**\* Παρατηρήσεις.** 1) Ἀπὸ τὰ προηγούμενα παραδείγματα βλέπουμε ὅτι μία ἀκολουθία  $\alpha_v$ ,  $v \in \mathbf{N}$  εἶναι *τελείως ὁρισμένη*, ὅταν ἔχουμε μία συνάρτηση  $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ , ποὺ ἐκφράζει ρητὰ τὸ γενικό ὁρο  $\alpha_v$  τῆς ἀκολουθίας, δηλ. ὅταν διαθέτουμε τὸν τύπο:  $\alpha_v = f(v)$ , ὅπου  $f$  ἡ γνωστὴ συνάρτηση τοῦ  $v$ .

2) Μία ἀκολουθία εἶναι ἐπίσης γνωστὴ, ὅταν δίνονται *ἐπαρκεῖς* πρῶτοι ὁροι τῆς ἀκολουθίας καὶ ἓνας *ἀναγωγικός τύπος (ἀναδρομικὴ σχέση)* ποὺ ἐπιτρέπει νὰ βρῖσκουμε τὸν ἐπόμενο ὁρο  $\alpha_{v+1}$  κάθε ὁρου  $\alpha_v$  ἀπὸ τὸν προηγούμενὸ του ἢ γενικότερα ἀπὸ ὁρισμένους ἀπὸ τοὺς προηγούμενους του. Ἐτσι ἔχουμε ἀκολουθίες τῆς μορφῆς  $\alpha_1 = \alpha$  καὶ  $\alpha_{v+1} = f(\alpha_v)$ , ἢ γενικότερα τῆς μορφῆς:  $\alpha_1 = \alpha$ ,  $\alpha_2 = \beta$  καὶ  $\alpha_{v+1} = f(\alpha_v, \alpha_{v-1})$ .

Ἀξίζει ὅμως ἐδῶ νὰ τονίσουμε τὰ ἐξῆς: *Γιὰ νὰ ὁρίσουμε πλήρως μία ἀκολουθία  $\alpha_v$ ,  $v \in \mathbf{N}$  μέ μία ἀναδρομικὴ σχέση δὲν ἀρκεῖ μόνο ὁ ἀναγωγικός τύπος, ἀλλὰ εἶναι ἀπαραίτητο νὰ ξέρομε καὶ ἰκανὸ ἀριθμὸ πρῶτων ὁρων τῆς. Γιατί ἂν οἱ τιμές αὐτῶν τῶν πρῶτων ὁρων τῆς ἀκολουθίας ἀλλάξουν, τότε ἀλλάζει καὶ ἡ ἀκολουθία, ἂν καὶ ὁ ἀναγωγικός τῆς τύπος παραμένει ὁ ἴδιος.* Ἐπίσης πολλὰ φορὲς δὲν εἶναι ἀρκετὸ νὰ ὁρίσουμε ἀπλῶς ἰκανὸ ἀριθμὸ ἀπὸ πρῶτους ὁρους μιᾶς ἀκολουθίας. Εἶναι ἀναγκαῖο νὰ θέσουμε καὶ τίς συνθήκες ἐκεῖνες ποὺ θά μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ βρῖσκουμε, μέ τὴν ἀναδρομικὴ σχέση καὶ τίς «ἀρχικές» συνθήκες, ὅσους ὁρους τῆς ἀκολουθίας  $\alpha_v$ ,  $v \in \mathbf{N}$  θέλουμε (βλ. σχετικὰ καὶ ἄσκηση 89).

3) Μερικὲς φορὲς τὸ δείκτη  $v$  τοῦ  $\alpha_v$  τὸν παίρουμε ἔτσι, ὥστε νὰ δέχεται τίς τιμές: 0, 1, 2, ..., ὅποτε ἡ ἀκολουθία γράφεται:  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{v-1}, \dots$ . Σ' αὕτη τὴν περίπτωση ὁ νιοστός ὁρος τῆς ἀκολουθίας εἶναι ὁ  $\alpha_{v-1}$ .

4) Τὸ πλήθος τῶν ὁρων μιᾶς ἀκολουθίας  $\alpha_v$ ,  $v \in \mathbf{N}$  δὲν εἶναι πεπερασμένο, ἐνῶ τὸ σύνολο τῶν ὁρων τῆς εἶναι δυνατό νὰ εἶναι πεπερασμένο. Τὸ σύνολο αὐτὸ τὸ συμβολίζουμε μέ  $\alpha(\mathbf{N})$  καὶ τὸ ὁρίζουμε ὡς τὸ σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν  $x$ , οἱ ὁποῖοι εἶναι ἴσοι μέ κάποιο ὁρο τῆς ἀκολουθίας, δηλαδή  $\alpha(\mathbf{N}) \stackrel{\text{ορσ}}{=} \{x \in \mathbf{R} : \text{ὑπάρχει } v \in \mathbf{N} \text{ μέ } \alpha_v = x\}$ .

Στὸ παράδειγμα 4 τῆς §39, π.χ., τὸ σύνολο τῶν ὁρων τῆς ἀκολουθίας εἶναι  $\alpha(\mathbf{N}) = \{0, 1\}$ , ἐνῶ τὸ πλήθος τῶν ὁρων τῆς εἶναι ἀπειρο.

Ἐπίσης στὸ παράδειγμα 5 εἶναι  $\alpha(\mathbf{N}) = \{0, 2\}$ , ἐνῶ τὸ πλήθος τῶν ὁρων τῆς εἶναι ἀπειρο.

**Σημαντικὴ παρατήρηση.** Ὅπως ξέρομε ἀπὸ τίς προηγούμενες τάξεις, τὸ σύνολο τῶν ρητῶν (σύμμετρων) καὶ ἄρρητων (ἀσύμμετρων) ἀριθμῶν λέγεται **σύνολο  $\mathbf{R}$  τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν**. Τὸ σύνολο αὐτὸ λέγεται καὶ **εὐθεῖα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν**, ἂν θέλουμε νὰ ἐκφραστοῦμε μέ τὴ «*γλώσσα*» τῆς Γεωμετρίας: οἱ πραγμ. ἀριθμοὶ θεωροῦνται τότε ὡς σημεῖα τῆς εὐθείας, γι' αὐτὸ γιὰ τὰ σημεῖα χρησιμοποιοῦμε τὰ ἴδια σύμβολα μέ αὐτὰ ποὺ χρησιμοποιοῦμε γιὰ νὰ παραστήσουμε τοὺς πραγμ. ἀριθμοὺς. Αὕτη ἡ ταυτοποίηση τῶν πραγμ. ἀριθμῶν μέ τὰ σημεῖα ἐνός ἄξονα βασίζεται σ' ἓνα ἀξίωμα, σύμφωνα μέ τὸ ὁποῖο: *μεταξύ τῶν πραγμ. ἀριθμῶν καὶ τῶν σημείων ἐνός ἄξονα ὑπάρχει μία ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία*. Δηλαδή σὲ κάθε πραγματικὸ ἀριθμὸ ἀντιστοιχεῖ ἓνα καὶ μόνο σημεῖο τοῦ ἄξονα καὶ ἀντιστρόφως. Ἡ ἀμφιμονοσήμαντη αὕτη ἀντιστοιχία τοῦ  $\mathbf{R}$  μέ τὰ σημεῖα ἐνός ἄξονα, μᾶς ἐπιτρέπει νὰ θεωροῦμε τοὺς ὁρους μιᾶς ἀκολουθίας ὡς τετμημένες τῶν σημείων ἐνός ἄξονα (βλ. ἐναντι σχῆμα) καὶ νὰ ἀντιμετωπίζουμε ἔτσι τίς ἀκολουθίες πραγμ. ἀριθμῶν ὡς ἀκολουθίες σημείων τοῦ ἄξονα. Ἡ γεωμετρικὴ αὕτη ἐποπτεία θά μᾶς διευκολύνει πολὺ παρακάτω γιὰ νὰ κατανοήσουμε μερικές καινούργιες ἔννοιες καὶ ἀποδείξεις ὁρισμένων προτάσεων ποὺ θά διατυπώσουμε.



**§ 40. Πράξεις μεταξύ ἀκολουθιῶν.**—Ἐστω  $\mathcal{A}$  τὸ σύνολο ὅλων τῶν ἀκολουθιῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἡ *βασικὴ ἰσότητα* στὸ  $\mathcal{A}$  ὁρίζεται ὡς ἐξῆς:

$$\forall (\alpha_v), (\beta_v) \in \mathcal{A}, (\alpha_v) = (\beta_v) \stackrel{\text{ορσ}}{\iff} \alpha_v = \beta_v \text{ γιὰ κάθε } v \in \mathbf{N}.$$

Μεταξύ τῶν στοιχείων τοῦ  $\mathcal{A}$  μπορούμε νὰ ὁρίσουμε τὸ *ἄθροισμα*, τὴ *διαφορὰ*, τὸ *γινόμενο* καὶ τὸ *πηλίκο*, ὡς μία ἐπίσης ἀκολουθία πραγμ. ἀριθμῶν, δηλ. ὡς ἓνα στοιχεῖο τοῦ  $\mathcal{A}$ . Ἐτσι ἂν  $(\alpha_v)$  καὶ  $(\beta_v)$  εἶναι δύο ἀκολουθίες, τότε:

Ὁνομάζουμε **ἄθροισμα** τῶν  $(\alpha_v)$  καὶ  $(\beta_v)$  τὴν ἀκολουθία  $(\alpha_v + \beta_v)$ ,

δηλαδή τὴν:  $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_v + \beta_v, \dots$

Ὡστε:  $(\alpha_v) + (\beta_v) = (\alpha_v + \beta_v), v \in \mathbf{N}.$

Ὁνομάζουμε **διαφορὰ** τῆς  $(\alpha_v)$  μεῖον τὴ  $(\beta_v)$  τὴν ἀκολουθία  $(\alpha_v - \beta_v)$ ,

δηλαδή τὴν:  $\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, \dots, \alpha_v - \beta_v, \dots$

Ὡστε:  $(\alpha_v) - (\beta_v) = (\alpha_v - \beta_v), v \in \mathbf{N}.$

Ὁνομάζουμε **γινόμενο** ἐνός πραγμ. ἀριθμοῦ  $\lambda$  ἐπὶ τὴν  $(\alpha_v)$  τὴν ἀκολουθία



$(\lambda_{\alpha_n})$ , δηλ. τήν:  $\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_2}, \dots, \lambda_{\alpha_n}, \dots$   
 "Ωστε:  $\lambda(\alpha_n) = (\lambda_{\alpha_n}), n \in \mathbb{N}$ .  
 'Ονομάζουμε **γινόμενο** τῶν  $(\alpha_n)$  καὶ  $(\beta_n)$  τήν ἀκολουθία  $(\alpha_n \cdot \beta_n)$ , δηλαδή  
 τήν:  $\alpha_1 \beta_1, \alpha_2 \beta_2, \dots, \alpha_n \beta_n, \dots$   
 "Ωστε:  $(\alpha_n) \cdot (\beta_n) = (\alpha_n \cdot \beta_n), n \in \mathbb{N}$ .  
 'Ονομάζουμε **πηλίκο** τῆς  $(\alpha_n)$  διὰ τῆς  $(\beta_n)$  μέ  $\beta_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ , τήν ἀκολ.  
 $\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)$ , δηλ. τήν:  $\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \dots, \frac{\alpha_n}{\beta_n}, \dots$   
 "Ωστε:  $(\alpha_n) : (\beta_n) = (\alpha_n : \beta_n), n \in \mathbb{N}$ .  
 'Ονομάζουμε **ἀπόλυτη τιμή** τῆς  $(\alpha_n)$  τήν ἀκολουθία  $(|\alpha_n|)$ , δηλαδή  
 τήν:  $|\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_n|, \dots$   
 "Ωστε:  $|\alpha_n| = (|\alpha_n|), n \in \mathbb{N}$ .  
 'Ονομάζουμε **τετραγωνική ρίζα** μιᾶς ἀκολουθίας  $(\alpha_n)$  μέ  $\alpha_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ ,  
 τήν ἀκολ.  $(\sqrt{\alpha_n})$ , δηλ. τήν:  
 $\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}, \dots, \sqrt{\alpha_n}, \dots$   
 "Ωστε:  $\sqrt{(\alpha_n)} = (\sqrt{\alpha_n}), n \in \mathbb{N}$ .  
 'Ανάλογα ὀρίζουμε τή ρίζα  $k$ -τάξεως ( $k > 2$ ) μιᾶς ἀκολουθίας. "Ετσι  
 ἔχουμε:  $\sqrt[k]{(\alpha_n)} = (\sqrt[k]{\alpha_n}), n \in \mathbb{N} \quad (k > 2)$ .

**Παρατήρηση.** Οἱ παραπάνω ὁρισμοὶ μποροῦν νά γενικευθοῦν καὶ γιὰ τῖς περιπτώσεις,  
 καὶ μόνο γι' αὐτές, πού ἔχουμε πεπερασμένο πλῆθος ἀκολουθιῶν.

**§ 41. 'Η ἔννοια τῆς φραγμένης ἀκολουθίας.**— "Εστω  $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$  μία ἀ-  
 κολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν. Δίνουμε τούς ἐπόμενους ὁρισμούς:

**Ὁρισμός 1.** Θά λέμε ὅτι ἡ ἀκολουθία  $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$  εἶναι **ἄνω φραγμένη**, τότε  
 καὶ μόνο τότε, ἂν ὑπάρχει πραγματικός ἀριθμός  $s$  τέτοιος, ὥστε:  $\alpha_n \leq s$  γιὰ  
 κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

'Ο ἀριθμός  $s$ , καθὼς καὶ κάθε ἄλλος πραγμ. ἀριθμός πού εἶναι μεγαλύτερος  
 ἀπὸ τό  $s$ , λέγεται τότε **ἕνα ἄνω φράγμα** τῆς ἀκολουθίας  $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$ .

**Ὁρισμός 2.** Θά λέμε ὅτι ἡ ἀκολουθία  $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$  εἶναι **κάτω φραγμένη**, τότε  
 καὶ μόνο τότε, ἂν ὑπάρχει πραγματικός ἀριθμός  $\sigma$  τέτοιος, ὥστε:  $\sigma \leq \alpha_n$  γιὰ  
 κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

'Ο ἀριθμός  $\sigma$ , καθὼς καὶ κάθε ἄλλος πραγμ. ἀριθμός πού εἶναι μικρότερος  
 ἀπὸ τό  $\sigma$ , λέγεται τότε **ἕνα κάτω φράγμα** τῆς ἀκολουθίας  $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$ .

**Ὁρισμός 3.** Θά λέμε ὅτι ἡ ἀκολουθία  $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$  εἶναι **φραγμένη**, τότε καὶ  
 μόνο τότε, ἂν εἶναι ἄνω καὶ κάτω φραγμένη, δηλαδή ἂν ὑπάρχουν πραγμ. ἀριθ-  
 μοὶ  $\sigma, s$  ( $\sigma \leq s$ ) τέτοιοι, ὥστε:  $\sigma \leq \alpha_n \leq s$  γιὰ κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

Δηλ. μία ἀκολουθία  $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$  εἶναι φραγμένη, τότε καὶ μόνο τότε, ἂν

ὑπάρχει κλειστό διάστημα  $[\sigma, s]$  στὸ ὁποῖο ἀνήκουν ὅλοι οἱ ὅροι τῆς. "Ετσι,  
 π.χ. ἡ ἀκολουθία  $\alpha_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$  εἶναι φραγμένη, ἐπειδὴ ἰσχύει:

$$0 \leq \alpha_n = \frac{1}{n} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

δηλαδή ὅλοι οἱ ὅροι τῆς ἀνήκουν στὸ κλειστό διάστημα  $[0, 1]$ .

**Ὁρισμός 4.** Θά λέμε ὅτι ἡ ἀκολουθία  $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$  εἶναι **ἀπολύτως φραγμένη**,  
 τότε καὶ μόνο τότε, ἂν ὑπάρχει (θετικός) πραγματικός ἀριθμός  $\theta$  τέτοιος, ὥστε:  
 $|\alpha_n| \leq \theta \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Τό  $\theta$  λέγεται τότε **ἕνα ἀπόλυτο φράγμα** τῆς  $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$ . Εἶναι φανερό ὅτι,  
 ἂν  $\theta$  εἶναι ἕνα ἀπόλυτο φράγμα, τότε καὶ κάθε ἄλλος θετικός ἀριθμός  $\varphi > \theta$   
 εἶναι ἐπίσης ἕνα ἀπόλυτο φράγμα τῆς  $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$ .

Συνοψίζοντας τὰ παραπάνω ἔχουμε:

1.  $(\alpha_n)$  ἄνω φραγμένη  $\Leftrightarrow (\exists s \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n \leq s)$
2.  $(\alpha_n)$  κάτω φραγμένη  $\Leftrightarrow (\exists \sigma \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \sigma \leq \alpha_n)$
3.  $(\alpha_n)$  φραγμένη  $\Leftrightarrow (\exists \sigma \in \mathbb{R}, \exists s \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \sigma \leq \alpha_n \leq s)$
4.  $(\alpha_n)$  ἀπολ. φραγμένη  $\Leftrightarrow (\exists \theta \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, |\alpha_n| \leq \theta)$ .

'Ισχύει ἡ ἐξῆς ἰσοδυναμία:

$$(\alpha_n) \text{ φραγμένη} \Leftrightarrow (\alpha_n) \text{ ἀπολύτως φραγμένη.}$$

Πράγματι, ἀρκεῖ νά λάβουμε:  $\theta = \max(|\sigma|, |s|)$ .

**Παρατήρηση:** 'Εξαιτίας τῆς πρὶν πάντων ἰσοδυναμίας στὰ ἐπόμενα οἱ ὅροι **φραγμένη** καὶ  
**ἀπολύτως φραγμένη** θά χρησιμοποιοῦνται μέ τήν ἴδια σημασία, χωρὶς διάκριση.

**Παραδείγματα:** 1. 'Η ἀκολουθία  $\alpha_n = \frac{\eta \mu \nu}{n}, n=1, 2, \dots$  εἶναι φραγμένη, ἐπειδὴ:

$$|\alpha_n| = \left| \frac{\eta \mu \nu}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. 'Η ἀκολουθία  $\alpha_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}$  εἶναι φραγμένη, ἐπειδὴ  $|\alpha_n| = \frac{1}{n^2} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

3. 'Η ἀκολουθία  $\alpha_n = \frac{n \sin n}{n+1}, n=1, 2, \dots$  εἶναι φραγμένη, ἐπειδὴ:

$$|\alpha_n| = \frac{|n \sin n|}{|n+1|} \leq \frac{n}{n+1} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

4. 'Η ἀκολουθία  $\alpha_n = \frac{n^2 \sin(3n) + \sqrt{n} \cdot \eta \mu \nu}{5n^2 + 1}, n=1, 2, \dots$  εἶναι φραγμένη.

'Αρκεῖ νά ἀποδείξουμε ὅτι ἡ  $\alpha_n, n=1, 2, \dots$  εἶναι ἀπολύτως φραγμένη. Πράγματι,  
 γιὰ κάθε  $n \in \mathbb{N}$  ἔχουμε:

$$|\alpha_n| = \frac{|n^2 \sin(3n) + \sqrt{n} \cdot \eta \mu \nu|}{5n^2 + 1} \leq \frac{|n^2 \sin(3n)| + |\sqrt{n} \cdot \eta \mu \nu|}{5n^2 + 1} \leq \frac{n^2 + \sqrt{n}}{5n^2 + 1} \leq \frac{n^2 + n^2}{5n^2 + 1} < \frac{2n^2}{5n^2} = \frac{2}{5}$$

δηλαδή:  $|\alpha_n| < \frac{2}{5} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .



**§ 42. Η έννοια της μονότονης ακολουθίας.**— Έστω  $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$  μία ακολουθία πραγματικών αριθμών. Δίνουμε τους επόμενους ορισμούς:

**Όρισμός 1.** Θά λέμε ότι η ακολουθία  $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$  είναι **αύξουσα**, συμβολ.  $(\alpha_n) \uparrow$ , τότε και μόνο τότε, αν ισχύει:  $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

**Όρισμός 2.** Θά λέμε ότι η ακολουθία  $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$  είναι **γνησίως αύξουσα**, συμβολ.  $(\alpha_n) \uparrow$ , τότε και μόνο τότε, αν ισχύει:  $\alpha_n < \alpha_{n+1}$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

**Όρισμός 3.** Θά λέμε ότι η ακολουθία  $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$  είναι **φθίνουσα**, συμβολ.  $(\alpha_n) \downarrow$ , τότε και μόνο τότε, αν ισχύει:  $\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

**Όρισμός 4.** Θά λέμε ότι η ακολουθία  $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$  είναι **γνησίως φθίνουσα**, συμβολ.  $(\alpha_n) \downarrow$ , τότε και μόνο τότε, αν ισχύει:  $\alpha_n > \alpha_{n+1}$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

**Όρισμός 5.** Θά λέμε ότι η ακολουθία  $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$  είναι **σταθερή**, τότε και μόνο τότε, αν ισχύει:  $\alpha_{n+1} = \alpha_n$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

Μία ακολουθία  $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$  πού ανήκει σε μία από τις παραπάνω κατηγορίες λέγεται **μονότονη ακολουθία**. Ειδικότερα, αν η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα, τότε λέγεται **γνησίως μονότονη ακολουθία**.

**Παρατηρήσεις.** 1. Κάθε γνησίως μονότονη ακολουθία είναι και μονότονη, δέν ισχύει όμως και το αντίστροφο (γιατί;).

2. "Αν  $(\alpha_n) \uparrow$ , τότε  $\alpha_n \geq \alpha_1$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , δηλ. τότε η ακολουθία  $(\alpha_n)$  είναι κάτω φράγμα με ένα κάτω φράγμα τον πρώτο όρο της. "Ομοια, αν  $(\alpha_n) \downarrow$ , τότε  $\alpha_n \leq \alpha_1$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , δηλ. τότε η  $(\alpha_n)$  είναι άνω φραγμένη με ένα άνω φράγμα τον πρώτο όρο της.

3. Για να καθορίσουμε το είδος μονοτονίας μιās ακολουθίας  $(\alpha_n)$ , τίς πιο πολλές φορές, εργαζόμαστε με μία από τίς επόμενες μεθόδους:

(α) Έξετάζουμε το πρόσημο της διαφοράς:  $\Delta_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n$ .

(β) "Αν οι όροι της  $(\alpha_n)$  διατηρούν πρόσημο, τότε, συνήθως, συγκρίνουμε το λόγο  $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$  με τη μονάδα. Από τη σύγκριση αυτή εξάγουμε συμπεράσματα για τη μονοτονία της ακολουθίας.

(γ) Βρίσκουμε μεταξύ δύο ή τριών πρώτων όρων της ακολουθίας τη σχέση, από την οποία έχουμε μία ένδειξη μονοτονίας και έπειτα, με τη μέθοδο της τέλεις επαγωγής, αποδεικνύουμε την άνισοτική σχέση, ή όποια θά καθορίσει τελικά το είδος της μονοτονίας της  $(\alpha_n)$ .

**Παραδείγματα:** 1. Η ακολουθία  $\alpha_n = \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots$  είναι γνησίως φθίνουσα, έπειδή:

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = \alpha_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. Η ακολουθία  $\alpha_n = n^2, n = 1, 2, \dots$  είναι γνησίως αύξουσα, έπειδή:

$$\alpha_{n+1} = (n+1)^2 > n^2 = \alpha_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. Η ακολουθία  $\alpha_n = \frac{n}{n+1}, n = 1, 2, \dots$  είναι γνησίως αύξουσα, έπειδή αν σχηματίσουμε τη διαφορά  $\Delta_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n$  έχουμε:

$$\Delta_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

δηλαδή:  $\alpha_{n+1} > \alpha_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

\* 4. Νά εξετάσετε ως πρός τη μονοτονία την ακολουθία πού όρίζεται από την αναδρομική σχέση:

$$\alpha_{n+1} = a + \alpha_n^2 \quad \text{καί} \quad \alpha_1 = a > 0.$$

**Λύση:** Πρώτα—πρώτα με έπαγωγή αποδεικνύουμε ότι:  $\alpha_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Έξάλλου άμέσως βλέπουμε ότι:  $\alpha_1 = a < a + \alpha_1^2$ , δηλ.  $\alpha_1 < \alpha_2$ . "Αρα, αν η ακολουθία  $(\alpha_n)$  είναι μονότονη, θά πρέπει νά είναι γνησίως αύξουσα. Έστω λοιπόν ότι:  $\alpha_k < \alpha_{k+1}$ , τότε  $\alpha_k^2 < \alpha_{k+1}^2$ , όποτε  $a + \alpha_k^2 < a + \alpha_{k+1}^2$ , δηλαδή  $\alpha_{k+1} < \alpha_{k+2}$ . "Αρα  $(\alpha_n) \uparrow$

Για τίς μονότονες ακολουθίες φυσικών αριθμών ισχύει ή έξης χρήσιμη πρόταση:

**★ Πρόταση.** "Αν  $k_n, n \in \mathbb{N}$  είναι μία γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών, τότε ισχύει:  $k_n \geq n$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

**Απόδειξη.** (Μέ επαγωγή). Για  $n = 1$  ισχύει, έπειδή  $k_1 \in \mathbb{N}$ , άρα  $k_1 \geq 1$ . Έστω ότι ισχύει για  $n = \mu$  ( $\mu \in \mathbb{N}$ ), δηλ. ότι:  $k_\mu \geq \mu$ . Τότε  $k_{\mu+1} > k_\mu \geq \mu$ , άρα  $k_{\mu+1} > \mu$ . Από την τελευταία άνισότητα, έπειδή οι  $k_{\mu+1}$  και  $\mu$  είναι φυσικοί αριθμοί, έπεται ότι:  $k_{\mu+1} \geq \mu + 1$ .

"Ωστε:  $k_\mu \geq \mu \Rightarrow k_{\mu+1} \geq \mu + 1$ . "Αρα  $k_n \geq n$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

**\* § 43. Η έννοια της ύπακολουθίας.**— Έστω  $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$  μία ακολουθία πραγμ. αριθμών. Έστω άκόμη μία γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών  $(k_n)$ , δηλαδή:

$$k_1 < k_2 < \dots < k_n < k_{n+1} < \dots$$

Τότε όρίζεται μία ακολουθία  $(\beta_n)$  με τύπο:  $\beta_n = \alpha_{k_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , δηλαδή ή ακολουθία:

$$\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \dots, \alpha_{k_n}, \dots \quad (1)$$

Η ακολουθία (1) λέγεται **ύπακολουθία** της  $(\alpha_n)$ .

**Παραδείγματα:** Έστω ή ακολουθία  $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$  και ή γνησίως αύξουσα ακολουθία των άρτιων φυσικών αριθμών  $k_n = 2n, n = 1, 2, \dots$ . Τότε όρίζεται ή ακολουθία  $\alpha_{k_n} = \alpha_{2n}, n = 1, 2, \dots$ , δηλ. ή ακολουθία:  $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \dots, \alpha_{2n}, \dots$ , ή όποια αποτελείται από εκείνους τούς όρους της  $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$  πού έχουν άρτιο δείκτη. Η ακολουθία αυτή είναι μία ύπακολουθία της  $(\alpha_n)$  και λέγεται **ύπακολουθία των άρτιων δεικτών**. "Ομοια όρίζεται και ή **ύπακολουθία των περιττών δεικτών** της  $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$ , δηλαδή ή ακολουθία:

$$\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_{2n-1}, \dots$$

"Ετσι, π.χ. αν  $\alpha_n = (-1)^n \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots$ , τότε ή ύπακολουθία των άρτιων δεικτών

είναι ή:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{2n}, \dots$$

καί των περιττών δεικτών είναι ή:  $-1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, \dots, -\frac{1}{2n-1}, \dots$

"Επίσης μία άλλη ύπακολουθία της  $\alpha_n = (-1)^n \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots$  είναι ή ακολουθία:

$$\alpha_{k_n} = \alpha_{2^n} = \frac{1}{2^n}, n = 1, 2, \dots \text{ δηλ. ή } \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

Προφανώς μία ακολουθία έχει, γενικά, άπειρες ύπακολουθίες.

**Αξιόλογη παρατήρηση.** Έπειδή, σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση, ισχύει:  $k_n \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$  θά έχουμε:  $n > n_0 \Rightarrow k_n > n_0$ .

**\* § 44. Η έννοια: άκέραιο μέρος πραγματικού αριθμού.**— Έστω  $x$  ένας πραγματικός αριθμός. Δίνουμε τον έξης όρισμό:



**Όρισμός.** Ονομάζουμε **άκერαιο μέρος** του  $x$  και το συμβολίζουμε με  $[x]$ , τον πιο μεγάλο άκერαιο αριθμό που δεν υπερβαίνει το  $x$ .

Έτσι έχουμε:

$$[3,95] = 3, [-2] = -2, [0,14] = 0, [-3,2] = -4, [\sqrt{3}] = 1, \left[\frac{5}{2}\right] = 2.$$

Το άκერαιο μέρος ενός πραγμ. αριθμού  $x$  αποδεικνύεται ότι είναι μοναδικό.

Ακριβέστερα αποδεικνύεται στα Μαθηματικά ή εξής:

**Πρόταση. (Θεώρημα του άκέραιου μέρους).**—Για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$  υπάρχει ένας και μόνο ένας άκέραιος  $a$  με:  $a \leq x < a + 1$ .

Η παραπάνω πρόταση μās λέγει ότι: για κάθε  $x$  από το  $\mathbf{R}$  υπάρχει ένα και μόνο ένα διάστημα της μορφής  $[a, a + 1)$  με  $a$  άκერαιο αριθμό, στο οποίο ανήκει ο  $x$ .

Ορίζεται συνεπώς η απεικόνιση:

$$[\ ]: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z}: x \mapsto [x] = \begin{cases} n, & \text{αν } n \leq x < n + 1 \\ -n, & \text{αν } -n \leq x < -n + 1, \end{cases}$$

όπου  $n$  φυσικός αριθμός ή το μηδέν (βλ. σχ. 4).

Από τα προηγούμενα έχουμε, λοιπόν, ότι:

$$\forall x \in \mathbf{R}, [x] \leq x < [x] + 1 \quad (1)$$

Άμεσες συνέπειες της (1) είναι οι εξής ιδιότητες του άκέραιου μέρους:

α)  $x = [x] + \theta$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$  και  $0 \leq \theta < 1$ . β)  $[x + k] = [x] + k$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ ,  $\forall k \in \mathbf{Z}$ .

Πράγματι, από την (1) έχουμε:  $0 \leq x - [x] < 1$  και αν θέσουμε  $x - [x] = \theta$ , τότε είναι:  $x = [x] + \theta$  με  $0 \leq \theta < 1$ . Για να αποδείξουμε τη β) παρατηρούμε ότι: επειδή  $x = [x] + \theta$ ,  $0 \leq \theta < 1$  έχουμε:  $x + k = [x] + k + \theta$ ,  $0 \leq \theta < 1$  και συνεπώς  $[x + k] = [(x) + k] + \theta = [x] + k$ , αφού το  $([x] + k) \in \mathbf{Z}$ .

**Σημείωση.** Από την (1) έχουμε:  $\forall x \in \mathbf{R}, x - 1 < [x] \leq x$ .

**§ 45. Η έννοια: η συνθήκη  $p(n)$ ,  $n \in \mathbf{N}$  ισχύει τελικά για κάθε  $n \in \mathbf{N}$ .**— Έστω  $p(n)$  μία συνθήκη στο  $\mathbf{N}$  (βλ. σχετ. Κεφ. I, § 9). Συμφωνούμε να λέμε στα επόμενα ότι:

Η συνθήκη  $p(n)$ ,  $n \in \mathbf{N}$  ισχύει τελικά για κάθε  $n \in \mathbf{N}$ , τότε και μόνο τότε, αν υπάρχει δείκτης  $n_0 \in \mathbf{N}$ , δηλ. αν υπάρχει ένας φυσικός αριθμός  $n_0$  τέτοιος, ώστε η συνθήκη  $p(n)$  είναι μία ταυτότητα στο σύνολο:  $N_{n_0} = \{n \in \mathbf{N}: n \geq n_0\}$ . Πιο σύντομα: αν για κάθε  $n \geq n_0$  η συνθήκη  $p(n)$  είναι μία αληθής πρόταση.

Ειδικότερα θά λέμε ότι η συνθήκη ή η ιδιότητα  $p$  που αναφέρεται σε μία ακολουθία  $(\alpha_n)$ , ισχύει τελικά για όλους τους δείκτες, ισοδύναμα: τελικά όλοι οι όροι της ακολουθίας  $(\alpha_n)$  πληροῦν τη συνθήκη  $p$ , τότε και μόνο τότε, αν υπάρχει ένας φυσικός αριθμός  $n_0$  τέτοιος, ώστε η ακολουθία  $\alpha_{n_0+n}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,

δηλαδή ή:  $\alpha_{n_0}, \alpha_{n_0+1}, \dots, \alpha_{n_0+n}, \dots$  να έχει την ιδιότητα  $p$ . Έτσι, αν π.χ.  $\alpha_n = \frac{1}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  είναι μία ακολουθία πραγματικών αριθμών και  $p(n)$

ή συνθήκη:  $\alpha_n < \frac{2}{10^3}$ , τότε διαπιστώνουμε άμέσως ότι η συνθήκη  $p(n)$  ισχύει τελικά για όλους τους δείκτες, δηλαδή τελικά όλοι οι όροι της ακολουθίας  $\alpha_n = \frac{1}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  πληροῦν τη συνθήκη:  $\alpha_n < \frac{2}{10^3}$ . Πράγματι, αρκεί να λάβουμε

ως  $n_0 = 501$  (γιατί;), όποτε έχουμε: για κάθε  $n \in \mathbf{N}$  με  $n \geq n_0 = 501$ :  $\alpha_n = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} = \frac{1}{501} < \frac{1}{500} = \frac{2}{1000} = \frac{2}{10^3}$ . Η ακολουθία λοιπόν  $\alpha_{501+n}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

έχει την ιδιότητα: όλοι οι όροι της είναι μικρότεροι από το  $\frac{2}{10^3}$ . Συνεπώς

η ακολουθία  $\alpha_n = \frac{1}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  έχει τελικά όλους τους όρους της μικρότερους από το  $\frac{2}{10^3}$ . Αυτό με απλά λόγια σημαίνει ότι: αν εξαιρέσουμε ένα πεπε-

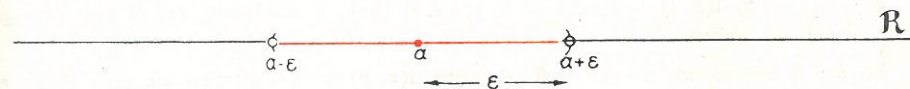
ρασμένο πλήθος όρων της ακολουθίας  $\alpha_n = \frac{1}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  από την αρχή, δηλαδή τους:  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{500}$  από εκεί και πέρα όλοι οι όροι της είναι μικρότεροι από το  $\frac{2}{10^3}$ .

**Άξιοσημείωτες παρατηρήσεις.** 1) Αν μία συνθήκη  $p(n)$ ,  $n \in \mathbf{N}$  ισχύει τελικά για κάθε  $n \in \mathbf{N}$ , τότε υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο δεικτών, στο οποίο ή  $p(n)$ ,  $n \in \mathbf{N}$  δεν ισχύει. Έτσι στο προηγούμενο παράδειγμα, αν  $n \in \{1, 2, 3, \dots, 500\}$ , τότε ή:

$$p(n): \alpha_n = \frac{1}{n} < \frac{2}{10^3} \text{ δεν ισχύει.}$$

2) Αν μία συνθήκη  $p(n)$ ,  $n \in \mathbf{N}$  είναι ταυτότητα στο  $\mathbf{N}$ , δηλ. ισχύει για κάθε  $n \in \mathbf{N}$ , τότε, προφανώς, ισχύει και τελικά για κάθε  $n \in \mathbf{N}$ . το αντίστροφο όμως δεν είναι αληθές.

**§ 46. Η έννοια της περιοχής ή γειτονιάς σημείου του  $\mathbf{R}$ .**— Έστω ένας πραγματικός αριθμός  $a$  ( $a \in \mathbf{R}$ ) και ένας θετικός αριθμός  $\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ). τότε ορίζεται το άνοικτο διάστημα \* της μορφής:  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , το οποίο λέγεται **περιοχή ή γειτονιά του σημείου  $a$  με κέντρο το  $a$  και ακτίνα  $\varepsilon$**  (βλ. άμέσως παρακάτω σχήμα):



Γενικότερα: **περιοχή ή γειτονιά ενός σημείου  $a$  ονομάζεται κάθε άνοικτο διά-**

\* Υπενθυμίζουμε (βλ. Κεφ. I, § 7) ότι **άνοικτο διάστημα**  $(\alpha, \beta)$  της ευθείας των πραγματικών αριθμών είναι το σύνολο:  $(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbf{R}: \alpha < x < \beta\}$ .



στημα  $(\gamma, \delta)$ , τό οποίο περιέχει τό σημείο  $\alpha$ , δηλαδή  $\alpha \in (\gamma, \delta)$ . Έτσι π.χ. τό διάστημα  $(1, 2)$  είναι περιοχή του  $\sqrt{2}$ , έπειδή  $\sqrt{2} \in (1, 2)$ .

Η περιοχή μέ κέντρο τό σημείο  $\alpha$  καί μέ ακτίνα  $\varepsilon$  θά συμβολίζεται μέ  $\pi(\alpha, \varepsilon)$ .

Ωστε:  $\pi(\alpha, \varepsilon) \equiv (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : \alpha - \varepsilon < x < \alpha + \varepsilon\}$ .

Αν  $\alpha = 0$ , τότε  $\pi(0, \varepsilon) \equiv (-\varepsilon, +\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : -\varepsilon < x < \varepsilon\}$  καί λέγεται περιοχή ή γειτονιά του μηδενός.

Μία πολύ χρήσιμη πρόταση είναι ή έξής:  $(\forall x) x \in \pi(\alpha, \varepsilon) \iff |x - \alpha| < \varepsilon$ .

Πράγματι:

$(\forall x) x \in \pi(\alpha, \varepsilon) \iff x \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \iff \alpha - \varepsilon < x < \alpha + \varepsilon \iff |x - \alpha| < \varepsilon$ .

**Σημ.** Κάνετε απόλυτως κτῆμα σας τίς παραπάνω ισοδυναμίες. Θά τίς χρησιμοποιούμε πολύ συχνά από έδω καί πέρα. Για νά βεβαιωθείτε προσέξτε καί τήν έπόμενη παράσταση:



Ειδικά για  $\alpha = 0$  έχουμε:  $(\forall x) x \in \pi(0, \varepsilon) \iff x \in (-\varepsilon, +\varepsilon) \iff -\varepsilon < x < \varepsilon \iff |x| < \varepsilon$ .

**Σημαντική παρατήρηση.** Έχοντας τώρα υπόψη καί τήν προηγούμενη παράγραφο, θά λέμε ότι: **τελικά όλοι οι όροι μιās ακολουθίας  $a_n, n = 1, 2, \dots$  βρίσκονται στην περιοχή  $\pi(\alpha, \varepsilon)$  ενός σημείου  $\alpha$ , τότε καί μόνο τότε, αν υπάρχει δείκτης  $n_0 \in \mathbb{N}$  τέτοιος, ώστε: για κάθε  $n \geq n_0$  ισχύει:  $a_n \in \pi(\alpha, \varepsilon)$ , δηλ.  $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ .** Αυτό, σύμφωνα μέ τήν πρώτη παρατήρηση τῆς § 45, είναι πάλι ισοδύναμο μέ: **«υπάρχει ένα πεπερασμένο πλήθος όρων τῆς ακολουθίας  $a_n, n = 1, 2, \dots$  πού βρίσκονται εκτός τῆς περιοχῆς  $\pi(\alpha, \varepsilon)$ , δηλ. εκτός του διαστήματος  $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ .**

**\* Σημείωση.** Όπως μάθαμε καί στό προηγούμενο Κεφάλαιο, αν  $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ , τότε ή  $|x - y|$  παριστάνει τήν απόσταση  $d$  του πραγματικού αριθμού  $x$  από τόν πραγμ. αριθμό  $y$ . Ορίζεται έτσι ή ακόλουθη απεικόνιση:

$$d: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \xrightarrow{d} d(x, y) \stackrel{\text{ορισ.}}{=} |x - y|$$

μέ τίς παρακάτω ιδιότητες:

$d_1: d(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$  καί  $d(x, y) = 0 \iff x = y$  (δηλ. ή απόσταση στό  $\mathbb{R}$  είναι μή άρνητική).

$d_2: d(x, y) = d(y, x) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$  (δηλ. ή απόσταση στό  $\mathbb{R}$  είναι συμμετρική).

$d_3: d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$  (δηλ. ή απόσταση στό  $\mathbb{R}$  έχει τήν τριγωνική ιδιότητα).

Τό ότι ή απεικόνιση  $d: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  μέ τύπο  $d(x, y) = |x - y|$  έχει τίς τρεις ιδιότητες  $d_1, d_2, d_3$  τῆς απόστάσεως είναι άμέσως φανερό, άρκεί νά ξαναθυμηθούμε τίς γνωστές ιδιότητες τῆς απόλυτης τιμῆς. Έτσι, π.χ., για τήν  $d_3$  έχουμε:

$$d(x, y) = |x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y).$$

Έχοντας τώρα υπόψη τήν παραπάνω σημείωση καί τήν προηγούμενη παρατήρηση διατυπώνουμε τήν έξής χρήσιμη πρόταση:

**Πρόταση.**  $a_n \in \pi(\alpha, \varepsilon) \iff d(a_n, \alpha) < \varepsilon$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  μέ  $n \geq n_0$ .

Η παραπάνω πρόταση μέ λόγια διατυπώνεται ως έξής: **τελικά όλοι οι όροι μιās ακολουθίας  $a_n, n \in \mathbb{N}$  βρίσκονται στην περιοχή  $\pi(\alpha, \varepsilon)$  ενός σημείου  $\alpha$ , τότε καί μόνο τότε, αν οι όροι της πού έχουν δείκτη  $n \geq n_0$  απέχουν από τό κέντρο  $\alpha$  απόσταση μικρότερη από τήν ακτίνα  $\varepsilon$ .**

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**\*Ομάδα Α'. 88.** Νά γράψετε τούς πέντε πρώτους όρους τών ακολουθιών:

α)  $1 + \frac{1}{v}, v = 1, 2, \dots$ , β)  $\frac{2v+1}{v^2}, v = 1, 2, \dots$ , γ)  $\frac{v}{\sqrt{1+v^2}}, v = 1, 2, \dots$ ,

δ)  $\alpha + (v-1)\omega, v = 1, 2, \dots$ , ε)  $\alpha \cdot \omega^{v-1}, v = 1, 2, \dots$ , ζ)  $\frac{(-1)^v}{v} + \frac{v}{2v+1}, v = 1, 2, \dots$

η)  $(-1)^v \cdot \frac{v+1}{v}, v = 1, 2, \dots$ , θ)  $\frac{(-1)^{v-1}}{2v-1}, v = 1, 2, \dots$

**89.** Νά γράψετε τούς δέκα πρώτους όρους τῆς ακολουθίας πού ορίζεται από τήν αναδρομική σχέση:  $a_{v+1} = 1 + \frac{1}{a_v}$  καί  $a_1 = -\frac{13}{21}$ .

Τί παρατηρείτε;

**90.** Νά αποδείξετε ότι οι ακολουθίες  $a_n, n = 1, 2, \dots$ , πού ορίζονται από τούς παρακάτω τύπους, είναι μονότονες καί φραγμένες:

1)  $a_n = \frac{1}{v^2}$ , 2)  $a_n = \frac{v+1}{v}$ , 3)  $a_n = \frac{2v}{v^2+1}$ , 4)  $a_n = \frac{2v-1}{v+1}$ .

**\*Ομάδα Β'. 91.** Ποιές από τίς έπόμενες ακολουθίες  $a_n, n = 1, 2, \dots$ , πού ορίζονται από τούς παρακάτω τύπους, είναι φραγμένες καί ποιές δέν είναι:

1)  $a_n = \frac{v \cdot \eta \mu 3v}{v^2+1}$ , 2)  $a_n = \frac{1}{v} \eta \mu \frac{\pi v}{2}$ , 3)  $a_n = \frac{v^2+1}{2v}$ , 4)  $a_n = v \cdot 3^{-v}$ ,  
5)  $a_n = \frac{2v+5}{3^v}$ , 6)  $a_n = \frac{v^2}{v + \sin^2 v}$ , 7)  $a_n = \frac{\eta \mu v + \sin^3 5v}{v^3 \cdot \sqrt{v}}$ .

**92.** Στην προηγούμενη άσκηση ποιές ακολουθίες είναι μονότονες καί ποιές δέν είναι. Για τίς μονότονες νά καθορίσετε τό είδος τῆς μονοτονίας τους.

**93.** Νά αποδείξετε ότι ή ακολουθία  $a_n = \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v, v = 1, 2, \dots$  είναι γνησίως αύξουσα, ενώ ή ακολουθία  $\beta_n = \left(1 + \frac{1}{v}\right)^{v+1}, v = 1, 2, \dots$  είναι γνησίως φθίνουσα.

**\*Υπόδειξη.** Νά αποδείξετε ότι ισχύει  $a_n > a_{n-1}$  (αντίστοιχα:  $\beta_{n-1} > \beta_n$ ) για κάθε  $n = 2, 3, \dots$ , άφου εφαρμόσετε κατάλληλα καί τή γνωστή άνίσότητα του Bernoulli (βλ. εφαρμογές, Κεφ. II).

**94.** Αν  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$  μέ  $\alpha\beta = -1$  καί  $x_n = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2v} + \frac{\beta\sqrt{3}}{2(v-1)}, v = 2, 3, \dots$  νά αποδείξετε ότι ισχύει:

$$|x_n| \leq \frac{\sqrt{3}}{40} \text{ για κάθε } n \geq 5,$$

δηλαδή ή ακολουθία  $x_n, n = 2, 3, \dots$  είναι τελικά φραγμένη.



## II. ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ — Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ

**§ 47. Ἡ έννοια τοῦ ὁρίου ἀκολουθίας.**— Ἀς θεωρήσουμε τήν ἀκολουθία

$\alpha_n, n = 1, 2, \dots$  μέ γενικό ὅρο:  $\alpha_n = \frac{n+1}{n}$ , δηλαδή τήν ἀκολουθία:

$$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots \quad (1)$$

Γιά τήν ἀκολουθία αὐτή παρατηροῦμε ὅτι ἰσχύει τό ἐξῆς:

Ἄν μᾶς δοθεῖ ἕνας θετικός ἀριθμός, π.χ. ὁ  $0,2 \left( = \frac{2}{10} \right)$  καί θεωρήσουμε τήν

ἀπόσταση τοῦ  $\alpha_n$  ἀπό τό 1, δηλ. τήν  $|\alpha_n - 1| = \left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n}$ , τότε ἔχουμε:

$$|\alpha_n - 1| < 0,2 \iff \frac{1}{n} < \frac{2}{10} \iff n > 5,$$

δηλαδή: ἡ ἀπόσταση  $d(\alpha_n, 1) \equiv |\alpha_n - 1| < 0,2$  γιά κάθε  $n = 6, 7, 8, \dots$

ἢ ἄλλιῶς:  $\alpha_n \in \left( 1 - \frac{2}{10}, 1 + \frac{2}{10} \right)$  γιά κάθε  $n \geq 6$ ,

εἴτε ἀκόμη:  $1 - \frac{2}{10} < \alpha_n < 1 + \frac{2}{10}$  γιά κάθε  $n \geq 6$ .

Ἄν τώρα μᾶς δοθεῖ ἕνας ἄλλος θετικός ἀριθμός, π.χ. ὁ  $0,05 \left( = \frac{5}{100} \right)$  καί θεωρήσουμε καί πάλι τήν ἀπόσταση τοῦ  $\alpha_n$  ἀπό τό 1, θά ἔχουμε:

$$|\alpha_n - 1| < 0,05 \iff \frac{1}{n} < \frac{5}{100} \iff n > 20$$

δηλαδή:  $1 - \frac{5}{100} < \alpha_n < 1 + \frac{5}{100}$  γιά κάθε  $n \geq 21$ .

Σέ ἀνάλογο συμπέρασμα θά καταλήξουμε ἂν λάβουμε, π.χ. 0,75, ἢ 2,25 καί γενικά ἕναν ὁποιοδήποτε θετικό ἀριθμό. Ἀκριβέστερα: ἂν ἀντί τοῦ 0,2 ἢ τοῦ 0,05 κτλ. πάρουμε ἕναν ὁποιοδήποτε ἀριθμό  $\varepsilon > 0$ , τότε θά καταλήξουμε σέ ἀνάλογο συμπέρασμα, δηλ. ἰσχύει τό ἐξῆς: «ὑπάρχει δείκτης  $n_0$  τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει:  $|\alpha_n - 1| < \varepsilon$  γιά κάθε  $n \geq n_0$ ».

Πράγματι, ἔχουμε:  $|\alpha_n - 1| = \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$ .

Ἀρκεῖ λοιπόν ὥς  $n_0$  νά λάβουμε ἕναν ὁποιοδήποτε φυσικό ἀριθμό μεγαλύτερο ἀπό τόν  $\frac{1}{\varepsilon}$  (τέτοιοι φυσικοί ἀριθμοί ὑπάρχουν,

π.χ. ὁ  $\left[ \frac{1}{\varepsilon} \right]^* + 1$ ,  $\left[ \frac{1}{\varepsilon} \right] + 2$ ,  $\left[ \frac{1}{\varepsilon} \right] + 3$ , κτλ.).

\* Ὑπενθυμίζουμε ὅτι  $[x]$  παριστάνει τό ἀκέραιο μέρος τοῦ  $x$ . Ἰσχύει:  $[x] \leq x < [x] + 1$ .

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι σέ κάθε ἐκλογή τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ  $\varepsilon$ , ὁ δείκτης  $n_0$ , ἀπό τόν ὁποῖο καί μετά οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας (1) πληροῦν τήν  $|\alpha_n - 1| < \varepsilon$  ἢ ἰσοδύναμα τήν:  $1 - \varepsilon < \alpha_n < 1 + \varepsilon$ , ἐξαρτᾶται γενικά ἀπό τό  $\varepsilon$ , γι' αὐτό στά ἐπόμενα συχνά θά γράφουμε  $n_0 = n_0(\varepsilon)$ . Ἔτσι, γιά  $\varepsilon = 0,2$  ἔχουμε, ὅπως εἶδαμε παραπάνω  $n_0 = n_0(\varepsilon) = 6$ , ἐνῶ γιά  $\varepsilon = 0,05$  ἔχουμε:  $n_0 = n_0(\varepsilon) = 21$ .

Ἀπό τά προηγούμενα βλέπουμε πῶς ἡ ἀκολουθία (1) ἔχει τήν ιδιότητα: Γιά κάθε  $\varepsilon > 0$  ὑπάρχει δείκτης  $n_0 = n_0(\varepsilon)$  (δηλ. πού ἐξαρτᾶται ἀπό τόν  $\varepsilon$ ) τέτοιος, ὥστε: ἡ ἀπόσταση  $|\alpha_n - 1|$  τοῦ ὅρου  $\alpha_n$  ἀπό τόν ἀριθμό 1 εἶναι μικρότερη ἀπό τό  $\varepsilon$  γιά κάθε δείκτη  $n \geq n_0 = n_0(\varepsilon)$ , δηλαδή **τελικά ὅλοι οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας  $\alpha_n = \frac{n+1}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  βρίσκονται σέ κάθε περιοχή τοῦ 1.**

Τήν ἀκολουθία (1) πού ἔχει τήν παραπάνω ιδιότητα τή λέμε **συγκλίνουσα ἀκολουθία** καί τόν ἀριθμό 1 στόν ὁποῖο αὐτή συγκλίνει τό λέμε **ὄριο** ἢ **ὀριακή τιμή** τῆς ἀκολουθίας  $\alpha_n = \frac{n+1}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Ἀπό τά προηγούμενα ὀδηγοῦμαστε τώρα στό νά δώσουμε τόν ἐξῆς γενικό ὀρισμό:

**Ὁρισμός.** Θά λέμε ὅτι ἡ ἀκολουθία  $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$  **συγκλίνει** στόν πραγματικό ἀριθμό  $a$  ἢ ὅτι **τείνει** στόν πραγμ. ἀριθμό  $a$  ἢ ὅτι **τό ὄριο** τῆς ἀκολουθίας ( $\alpha_n$ ) **εἶναι ὁ πραγμ. ἀριθμός  $a$**  καί αὐτό θά τό συμβολίζουμε μέ  $\alpha_n \rightarrow a$  ἢ  $\lim \alpha_n = a$ , τότε καί μόνο τότε, ἂν γιά κάθε  $\varepsilon > 0$  ὑπάρχει δείκτης  $n_0 = n_0(\varepsilon)$  (πού ἐξαρτᾶται, γενικά, ἀπό τό  $\varepsilon$ ) τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει:

$$|\alpha_n - a| < \varepsilon \text{ γιά κάθε } n \geq n_0(\varepsilon).$$

Συμβολικά ὁ παραπάνω ὀρισμός διατυπώνεται ὡς ἐξῆς:

$$\alpha_n \rightarrow a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : |\alpha_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad (1)$$

Ὁ ἀριθμός  $a$ , ὅπως εἶπαμε καί παραπάνω, λέγεται **ὄριο** ἢ **ὀριακή τιμή** τῆς ἀκολουθίας  $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$ . Σημειώνουμε: **οἱ  $\alpha_n = a$**  ἢ **πιό συχνά:  $\lim^* \alpha_n = a$**  ἢ ἀπλούστερα  $\alpha_n \rightarrow a$  καί διαβάζουμε ἀντίστοιχα: **ὄριο  $\alpha_n$  ἴσο μέ  $a$**  ἢ  $\alpha_n$  **τείνει (συγκλίνει) στό  $a$ .**

Στήν εἰδική περίπτωση πού εἶναι  $a = 0$ , δηλ.  $\lim \alpha_n = 0$ , ἡ ἀκολουθία  $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$  ὀνομάζεται **μηδενική**. Τότε ὁ παραπάνω ὀρισμός διατυπώνεται σύντομα ὡς ἐξῆς:

$$\alpha_n \rightarrow 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : |\alpha_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad (2)$$

Ἔτσι, π.χ. ἡ ἀκολουθία  $\alpha_n = \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots$  **εἶναι μηδενική**, γιατί ἂν  $\varepsilon$

\* Τό σύμβολο « $\lim$ » εἶναι συντομογραφία τῆς Λατινικῆς λέξεως: *limes* (= ὄριο) καί χρησιμοποιεῖται διεθνῶς στά Μαθηματικά.



είναι ένας οποιοσδήποτε θετικός αριθμός, τότε αν συμβολίσουμε με  $v_0$  το μικρότερο από τους φυσικούς (θετικούς άκεραίους) αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι από το  $\frac{1}{\varepsilon}$ , δηλ. αν  $v_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1 \equiv v_0(\varepsilon)$  έχουμε:

$$\text{για κάθε } v \geq v_0 \Rightarrow v > \frac{1}{\varepsilon} \iff \frac{1}{v} < \varepsilon, \text{ δηλ. } |\alpha_v| = \left| \frac{1}{v} \right| < \varepsilon.$$

$$\text{Άρα: } \alpha_v = \frac{1}{v} \rightarrow 0.$$

**Σημ.** Η ακολουθία  $\alpha_v = \frac{1}{v}$ ,  $v = 1, 2, \dots$  θυμίζει τις άναπιδήσεις που κάνει μία ελαστική σφαίρα (τόπι) πάνω σ' ένα επίπεδο. Τό ύψος στο όποιο φθάνει η σφαίρα κάθε φορά που άναπιδά είναι μικρότερο από τά προηγούμενα και τελικά η σφαίρα ίσορροπεί πάνω στο επίπεδο (ύψος άναπιδήσεως μηδέν).

Όμοίως η ακολουθία  $\alpha_v = (-1)^v \frac{1}{v}$ ,  $v = 1, 2, \dots$  είναι μηδενική.

$$\text{Πράγματι: } |\alpha_v| = \left| (-1)^v \cdot \frac{1}{v} \right| = \frac{1}{v} < \varepsilon \iff v > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Άρα:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists v_0 = v_0(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1: |\alpha_v| < \varepsilon \forall v \geq v_0(\varepsilon).$$

$$\text{Συνεπώς: } \alpha_v \rightarrow 0.$$

**Σημ.** Η ακολουθία  $\alpha_v = (-1)^v \frac{1}{v}$ ,  $v = 1, 2, \dots$ , άναλυτικά ή:  $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$  θυμίζει τις αιώρήσεις ενός έκκρεμοϋς, τών όποίων τό πλάτος συνεχώς ελαττώνεται μέχρι νά μηδενισθεί.

Επίσης η ακολουθία  $\alpha_v = \frac{1}{\sqrt{v}}$ ,  $v = 1, 2, \dots$  είναι μηδενική.

$$\text{Πράγματι: } |\alpha_v| = \frac{1}{\sqrt{v}} < \varepsilon \iff v > \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

$$\text{Άρα: } \forall \varepsilon > 0 \exists v_0 = v_0(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rceil + 1: \forall v \geq v_0 > \frac{1}{\varepsilon^2} \text{ ισχύει:}$$

$$|\alpha_v| = \frac{1}{\sqrt{v}} \leq \frac{1}{\sqrt{v_0}} < \varepsilon.$$

$$\text{Ώστε: } \alpha_v = \frac{1}{\sqrt{v}} \rightarrow 0.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι: αν  $\lim \alpha_v = \alpha$ , τότε από τή σύγκριση τών όρισμών (1) και (2) προκύπτει ότι: η ακολουθία  $\delta_v = (\alpha_v - \alpha)$ ,  $v = 1, 2, \dots$  είναι μηδενική και άντιστρόφως. Ώστε:

$$\lim \alpha_v = \alpha \iff \lim (\alpha_v - \alpha) = 0 \quad (3)$$

$$\text{Έτσι, π.χ. έχουμε: } \lim \frac{3v + 1}{v} = 3, \text{ έπειδή } \lim \left( \frac{3v + 1}{v} - 3 \right) = \lim \frac{1}{v} = 0.$$

Από τήν (3) έπεται ότι ό γενικός όρος μιās ακολουθίας  $(\alpha_v)$ , ή όποια συγκλίνει πρós τόν αριθμό  $\alpha$  μπορεί πάντοτε νά γραφεί ως εξής:  $\alpha_v = \alpha + \delta_v$ , όπου  $\delta_v$  ό γενικός όρος μιās μηδενικής ακολουθίας.

**Παρατηρήσεις. α).** Αν για μία ακολουθία  $(\alpha_v)$  ισχύει:  $\alpha_v = \alpha$ , για κάθε  $v \geq v_0 \in \mathbb{N}$ , δηλ. ή  $(\alpha_v)$  είναι τελικά σταθερή, τότε ή  $(\alpha_v)$  συγκλίνει και έχει όριο τόν  $\alpha$ . Προφανώς, αν  $\alpha_v = \alpha$ ,  $\forall v \in \mathbb{N}$ , τότε:  $\lim \alpha_v = \alpha$ .

Ειδικότερα ή σταθερή ακολουθία  $\alpha_v = 0 \forall v \in \mathbb{N}$  είναι μηδενική ακολουθία.

**Προσέξτε!** Αν  $(\alpha_v)$  είναι μηδενική ακολουθία, δέ σημαίνει ότι οι όροι της είναι ίσοι με μηδέν. Μάλιστα πολλές φορές συμβαίνει:  $\alpha_v \rightarrow 0$  και όμως  $\alpha_v \neq 0 \forall v \in \mathbb{N}$ . Π.χ., ή ακολουθία  $\alpha_v = \frac{1}{v}$ ,  $v = 1, 2, \dots$

β). Ξεκινώντας από τίσ ίσοδυναμίες:

$$|\alpha_v - \alpha| < \varepsilon \iff \alpha - \varepsilon < \alpha_v < \alpha + \varepsilon \iff \alpha_v \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \equiv \pi(\alpha, \varepsilon)$$

και έχοντας υπόψη τήν παρατήρηση τής § 46 συμπεραίνουμε από τήν (1) ότι: σέ κάθε περιοχή του όριον  $\alpha$  μιās συγκλίνουσας ακολουθίας  $(\alpha_v)$  βρίσκονται τελικά όλοι οι όροι της, ενώ πεπερασμένου πλήθους όροι της, ένδεχομένως και κανένas, βρίσκονται εκτός τής περιοχής  $\pi(\alpha, \varepsilon)$ . Έπομένως: αν ή ακολουθία  $(\alpha_v)$  συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό  $\alpha \neq 0$ , τότε από κάποιο δείκτη και πέρα όλοι οι όροι τής  $(\alpha_v)$  είναι διάφοροι του μηδένος (γιατί);.

γ). Όπως είπαμε και στήν άρχή αυτού του Κεφαλαίου κατά τή θεώρηση μιās ακολουθίας πολλές φορές επικαλούμαστε τή γεωμετρική έποπτεία. Έτσι μέχρι τώρα πολλές φορές θεωρούσαμε τούς όρους μιās ακολουθίας ως τετμημένες τών σημείων ενός άξονα και με αυτό τόν τρόπο άντιμετωπίζαμε τίσ ακολουθίες πραγματικών αριθμών ως ακολουθίες σημείων του άξονα. Έπειδή όμως ένας πραγμ. αριθμός ένδέχεται νά παρουσιάζεται περισσότερες από μία φορές ως όρος μιās ακολουθίας, έπεται ότι ένα σημείο του άξονα ένδέχεται νά παρουσιάζεται περισσότερες από μία φορές. Γι' αυτό τό λόγο, πολλές φορές παρακάτω για τή γεωμετρική παράσταση τής ακολουθίας  $(\alpha_v)$ , χρησιμοποιούμε έναν άλλο τρόπο άπεικόνισως: άπεικονίζουμε, στο καρτεσιανό επίπεδο  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , τόν όρο της  $\alpha_v$  στο σημείο  $M_v(v, \alpha_v)$ .

Η γεωμετρική παράσταση τής ακολουθίας είναι τότε ένα σύνολο από «μεμονωμένα» σημεία του επιπέδου (βλ. σχ. 5).

δ). Έστω μία μηδενική ακολουθία  $\alpha_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$ . Π.χ. ή ακολουθία που όρίζεται από τήν άπεικόνιση:

$$\alpha: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}: v \rightarrow \alpha_v = (-1)^{v-1} \cdot \frac{1}{v}.$$

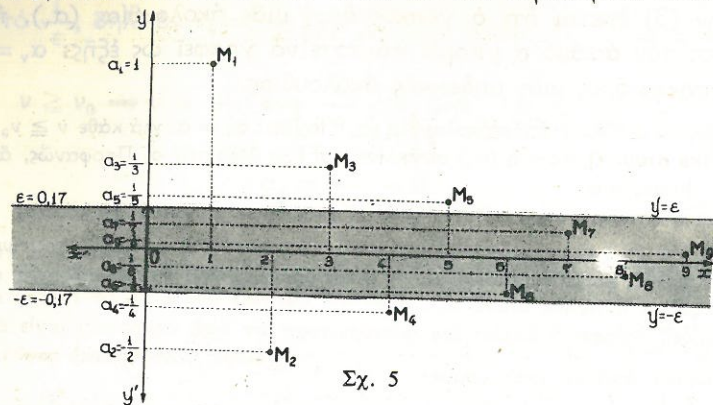
$$\text{Παρατηρούμε ότι: } \alpha(\mathbb{N}) = \left\{ 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, (-1)^{v-1} \frac{1}{v}, \dots \right\}.$$

Έχοντας τώρα υπόψη τήν προηγούμενη παρατήρηση ή γεωμετρική παράσταση αυτής τής ακολουθίας αποτελείται από «μεμονωμένα» σημεία του επιπέδου, όπως φαίνεται στο σχήμα 5 τής έπομένης σελίδας.

Ο όρισμός (2) που δώσαμε για τή μηδενική ακολουθία επιδέχεται τώρα τήν εξής γεωμετρική έρμηνεία: Άς πάρουμε ένα θετικό αριθμό  $\varepsilon$ , π.χ. τόν  $\varepsilon = 0,17$  και τίσ ευθείες με εξισώσεις  $y = \varepsilon = 0,17$  και  $y = -\varepsilon = -0,17$  που είναι παράλληλες με τόν άξονα τών  $x$  και όρίζουν στο επίπεδο μία «ταινία» (βλ. Σχ. 5).



Παρατηρούμε στο παρακάτω σχήμα ότι τα σημεία  $M_1, M_2, M_3, M_4$  και  $M_5$  βρίσκονται έξω από την ταινία, ενώ τα σημεία που έχουν δείκτη  $n \geq n_0 = 6$ , δηλ. τα σημεία  $M_6, M_7, M_8, M_9, \dots$  βρίσκονται **όλα** μέσα στην ταινία των δύο παραλλήλων. Αυτό σημαίνει πώς:



οι τεταγμένες των σημείων αυτών, δηλ. οι όροι:  $\alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \dots$  της ακολουθίας που πήραμε βρίσκονται στο άνοικτο διάστημα  $(-\epsilon, +\epsilon)$ , δηλ. σε μία περιοχή του μηδενός. Ωστε:

$$-\epsilon < \alpha_n < +\epsilon \iff |\alpha_n| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0 = 6 \quad (\epsilon = 0,17).$$

Αν τώρα πάρουμε έναν άλλο θετικό αριθμό  $\epsilon$  πιο μικρό από τον προηγούμενο π.χ. τον  $\epsilon = 0,09$  και επαναλάβουμε τα παραπάνω, τότε βλέπουμε πώς τα σημεία  $M_{12}, M_{13}, \dots, M_n, \dots$  βρίσκονται μέσα στην ταινία που ορίζουν οι ευθείες  $y = \epsilon = 0,09$  και  $y = -\epsilon = -0,09$  και αυτό σημαίνει πάλι ότι οι τεταγμένες των σημείων αυτών, δηλαδή οι όροι  $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \dots, \alpha_n, \dots$  της ακολουθίας που πήραμε βρίσκονται **όλοι** στο διάστημα  $(-\epsilon, +\epsilon)$ . Άρα ισχύει:

$$-\epsilon < \alpha_n < +\epsilon \iff |\alpha_n| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0 = 12 \quad (\epsilon = 0,09).$$

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε και αν πάρουμε ως  $\epsilon$  οποιοδήποτε θετικό αριθμό, μόνο που για κάθε  $\epsilon$  αλλάζει ο δείκτης  $n_0$  (παραπάνω είδαμε ότι για  $\epsilon = 0,17$  έχουμε ως  $n_0$  το 6, ενώ για  $\epsilon = 0,09$ , το 12).

Ωστε: *σε κάθε εκλογή του θετικού αριθμού  $\epsilon$  υπάρχει ένας δείκτης  $n_0$ , ο οποίος εξαρτάται από τον  $\epsilon$ , δηλαδή  $n_0 = n_0(\epsilon)$ .*

Στο παραπάνω σχήμα 5, παρατηρούμε ακόμη ότι: καθώς το  $n$  «αυξάνει απεριόριστα» το διάγραμμα των σημείων  $M_1(1, 1), M_2(2, \frac{1}{2}), M_3(3, \frac{1}{3}), \dots$  όλο και περισσότερο «πλησιάζει» και τελικά «τείνει να πέσει πάνω στον άξονα  $Ox$ ». Γι' αυτό την ακολουθία αυτή  $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$  με  $\alpha_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$  που ικανοποιεί τα παραπάνω, τη χαρακτηρίζουμε ως **μηδενική ακολουθία**.

Ασκησιή. Νά δώσετε αντίστοιχη γεωμετρική ερμηνεία του όρισμού (1) για τη συγκλίνουσα ακολουθία:  $\alpha_n = \frac{n+1}{n}, n = 1, 2, \dots$

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

**1ο.** Νά αποδείξετε ότι η ακολουθία  $\alpha_n = \frac{n}{n+1}, n = 1, 2, \dots$  έχει όριο τη μονάδα.

**Λύση.** Πράγματι, για κάθε  $\epsilon > 0$  έχουμε:

$$|\alpha_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \epsilon \iff n > \frac{1}{\epsilon}.$$

Άρα:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\epsilon) = \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil + 1 : \forall n \geq n_0 > \frac{1}{\epsilon} \implies |\alpha_n - 1| < \epsilon, \text{ συνεπώς } \alpha_n \rightarrow 1.$$

**2ο.** Έστω  $\alpha_n = \frac{2n-1}{3n}, n = 1, 2, \dots$  Νά αποδείξετε ότι:  $\lim \alpha_n = \frac{2}{3}$ .

**Λύση.** Πράγματι:

$$\left| \alpha_n - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{2n-1}{3n} - \frac{2}{3} \right| = \left| -\frac{1}{3n} \right| = \frac{1}{3n} < \epsilon \iff n > \frac{1}{3\epsilon}.$$

Άρα:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\epsilon) = \left\lceil \frac{1}{3\epsilon} \right\rceil + 1 : \left| \alpha_n - \frac{2}{3} \right| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0(\epsilon), \text{ συνεπώς } \lim \alpha_n = \frac{2}{3}.$$

**3ο.** Έστω  $\alpha_n = \frac{n^2-n}{n^2+1}, n = 1, 2, \dots$  Νά αποδείξετε ότι:  $\lim \alpha_n = 1$ .

$$\text{Λύση. Πράγματι: } |\alpha_n - 1| = \left| \frac{n^2-n}{n^2+1} - 1 \right| = \frac{n+1}{n^2+1} < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} < \epsilon \iff n > \frac{2}{\epsilon}.$$

Δηλαδή για οποιοδήποτε θετικό αριθμό  $\epsilon$  υπάρχει δείκτης  $n_0 = n_0(\epsilon)$  (άρκει ως  $n_0$  να λάβουμε οποιοδήποτε φυσικό αριθμό μεγαλύτερο από το  $\frac{2}{\epsilon}$  και τέτοιοι φυσικοί αριθμοί υπάρχουν, π.χ.,  $\left\lceil \frac{2}{\epsilon} \right\rceil + 1, \left\lceil \frac{2}{\epsilon} \right\rceil + 2, \left\lceil \frac{2}{\epsilon} \right\rceil + 3, \dots$  κτλ.) τέτοιος, ώστε για κάθε  $n \geq n_0(\epsilon) > \frac{2}{\epsilon}$  ισχύει:  $|\alpha_n - 1| < \epsilon$ , συνεπώς  $\lim \alpha_n = 1$ .

**4ο.** Νά αποδείξετε ότι η ακολουθία  $\alpha_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), n = 1, 2, \dots$  είναι μηδενική.

**Λύση.** Πράγματι:

$$\begin{aligned} |\alpha_n - 0| &= |\alpha_n| = |\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \\ &= \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon \iff n > \frac{1}{\epsilon^2}. \end{aligned}$$

Άρα:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\epsilon) = \left\lceil \frac{1}{\epsilon^2} \right\rceil + 1 : |\alpha_n| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0 > \frac{1}{\epsilon^2}. \text{ Ωστε } \alpha_n \rightarrow 0.$$

Θά δώσουμε τώρα και ένα παράδειγμα ακολουθίας που δέ συγκλίνει στο  $\mathbf{R}$ .

**5ο.** Νά αποδείξετε ότι η ακολουθία  $\alpha_n = (-1)^n, n = 1, 2, \dots$  δέ συγκλίνει στο  $\mathbf{R}$ .

**Απόδειξη.** Ας υποθέσουμε (άτοπος απαγωγή) ότι η ακολουθία  $(\alpha_n)$  συγκλίνει σε κάποιο πραγματικό αριθμό  $x$ . Δηλαδή έστω ότι:  $\lim \alpha_n = x$  ( $x \in \mathbf{R}$ ). Τότε για κάθε  $\epsilon > 0$ , άρα και για  $\epsilon = 1/2$ , υπάρχει δείκτης  $n_0 \in \mathbf{N}$  τέτοιος, ώστε να ισχύει:

$$|(-1)^n - x| < \frac{1}{2} \quad \forall n \geq n_0.$$

Ειδικά:

$$|(-1)^{n_0} - x| < \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad |(-1)^{n_0+1} - x| < \frac{1}{2},$$

επειδή  $n_0 \geq n_0$  και  $n_0 + 1 \geq n_0$ . Τότε όμως έχουμε:

$$|(-1)^{n_0} - (-1)^{n_0+1}| = |(-1)^{n_0} - x + x - (-1)^{n_0+1}| \leq |(-1)^{n_0} - x| + |x - (-1)^{n_0+1}| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Δηλαδή:

$$|(-1)^{n_0} - (-1)^{n_0+1}| < 1 \quad (1)$$

Αλλά:

$$|(-1)^{n_0} - (-1)^{n_0+1}| = 2 \quad (2)$$



Από τις (1) και (2) λαμβάνουμε ότι  $2 < 1$ , πράγμα που είναι άτοπο. Ωστε η υπόθεση που κάναμε για την ακολουθία  $\alpha_n = (-1)^n, n = 1, 2, \dots$  ότι συγκλίνει σε κάποιο πραγματικό αριθμό οδηγεί σε άτοπο. Άρα η ακολουθία  $(-1)^n, n = 1, 2, \dots$  δε συγκλίνει στο  $\mathbb{R}$ .

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Ομάδα Α.** 95. Για  $\varepsilon > 0$  να προσδιορίσετε δείκτη  $n_0 = n_0(\varepsilon)$ , ώστε για  $n \geq n_0(\varepsilon)$  να είναι:  $|\alpha_n| < \varepsilon$ , όπου  $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$  είναι:

1)  $\alpha_n = \frac{2}{n^2 + n}$ , 2)  $\alpha_n = \frac{3}{4n^2 - 2n}$ , 3)  $\alpha_n = \frac{\eta\mu n + \sigma\upsilon\nu^3 n}{\sqrt{n}}$ , 4)  $\alpha_n = \frac{3}{\sqrt{n^2 + 2}}$ .

96. Έστω  $\alpha_n = \frac{3n-5}{4n}, n = 1, 2, \dots$ . Να αποδείξετε ότι:  $\lim \alpha_n = \frac{3}{4}$ .

97. Για  $\varepsilon > 0$  να προσδιορίσετε δείκτη  $n_0 = n_0(\varepsilon)$ , ώστε για  $n \geq n_0(\varepsilon)$  να είναι:

$$\left| \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} - 1 \right| < \varepsilon.$$

98. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία:  $\alpha_n = \sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 + 1}, n = 1, 2, \dots$  είναι μη-δενική.

**Ομάδα Β.** 99. Για  $\varepsilon > 0$ , να προσδιορίσετε δείκτη  $n_0 = n_0(\varepsilon)$ , ώστε για  $n \geq n_0(\varepsilon)$  να είναι:  $|\alpha_n| < \varepsilon$ , όπου  $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$  είναι:

1)  $\alpha_n = \frac{1}{2n+1}$ , 2)  $\alpha_n = \frac{n-1}{n^2+1}$ , 3)  $\alpha_n = \frac{\eta\mu n + 2\sigma\upsilon\nu 5n}{\sqrt{n}}$ , 4)  $\alpha_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + n + 2}$

Εφαρμογή για  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

100. Για  $\varepsilon > 0$  να προσδιορίσετε δείκτη  $n_0 = n_0(\varepsilon)$ , ώστε για  $n \geq n_0(\varepsilon)$  να είναι:

$$\left| \alpha_n - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon,$$

όπου  $\alpha_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), n = 1, 2, \dots$

101. Να αποδείξετε ότι: αν η ακολουθία  $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$  είναι μηδενική, τότε θα είναι μηδενική και η ακολουθία:  $\beta_n = \frac{1}{\sigma\upsilon\sigma} \sqrt{|\alpha_n|}, n = 1, 2, \dots$

### III. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Σε όλες τις παρακάτω ιδιότητες οι ακολουθίες θεωρούνται πραγματικές και τα όριά τους αριθμοί πραγματικοί, κι όταν άκομη δεν τό τονίζουμε ιδιαίτερα.

**§ 48. Ιδιότητα I. (Τό μονοσήμαντο του όριου).**—Τό όριο συγκλίνουσας ακολουθίας  $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$  είναι μονοσημάντως όρισμένο.

Δηλαδή:  $\left. \begin{matrix} \alpha_n \rightarrow \alpha \\ \alpha_n \rightarrow \alpha' \end{matrix} \right\} \Rightarrow \alpha = \alpha'$

**Απόδειξη.** Έστω (άπαγωγή σε άτοπο) ότι  $\alpha_n \rightarrow \alpha$  και  $\alpha_n \rightarrow \alpha'$ , όπου  $\alpha$  και  $\alpha'$  αριθμοί πραγματικοί με  $\alpha \neq \alpha'$ . Τότε  $\frac{|\alpha - \alpha'|}{2} > 0$ . Άρα για

$\varepsilon = \frac{|\alpha - \alpha'|}{2} > 0$  υπάρχουν δείκτες  $n_0', n_0''$  τέτοιοι, ώστε:

$$|\alpha_n - \alpha| < \frac{|\alpha - \alpha'|}{2}, \forall n \geq n_0' \quad (1)$$

$$|\alpha_n - \alpha'| < \frac{|\alpha - \alpha'|}{2}, \forall n \geq n_0'' \quad (2)$$

Τότε όμως για κάθε  $n \geq n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$  ισχύουν συγχρόνως οι (1), (2) και συνεπώς, προσθέτοντας κατά μέλη, λαμβάνουμε:

$$|\alpha_n - \alpha| + |\alpha_n - \alpha'| < |\alpha - \alpha'|.$$

Ωστε για κάθε  $n \geq n_0$  έχουμε:

$$|\alpha - \alpha'| = |(\alpha_n - \alpha) - (\alpha_n - \alpha')| \leq |\alpha_n - \alpha| + |\alpha_n - \alpha'| < |\alpha - \alpha'|.$$

Αυτό όμως είναι άτοπο, επειδή δεν μπορεί να είναι  $|\alpha - \alpha'| < |\alpha - \alpha'|$ .

**§ 49. Ιδιότητα II.**—Κάθε υπακολουθία συγκλίνουσας ακολουθίας έχει τό ίδιο μ αυτή όριο.

Δηλαδή:

$$\alpha_n \rightarrow \alpha \Rightarrow \alpha_{k_n} \rightarrow \alpha$$

**Απόδειξη.** Έστω μία ακολουθία  $(\alpha_n)$  που συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό  $\alpha$  και  $(\alpha_{k_n})$  μία υπακολουθία της. Τότε έχουμε: για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει δείκτης  $n_0 = n_0(\varepsilon)$  τέτοιος, ώστε να ισχύει:  $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon \forall n \geq n_0$  (1)

Έστω τώρα ένας φυσικός αριθμός  $n \geq n_0$ , τότε σύμφωνα με την πρόταση της § 42, έχουμε  $k_n \geq n$ , όπου  $k_n, n = 1, 2, \dots$  είναι μία γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών και συνεπώς  $k_n \geq n_0$  (βλ. και παρατήρ. της § 43).

Τότε όμως από την (1) παίρνουμε:  $|\alpha_{k_n} - \alpha| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$ . Ωστε ισχύει:  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon): |\alpha_{k_n} - \alpha| < \varepsilon \forall n \geq n_0$  και για κάθε ακολουθία  $(k_n) \uparrow$  φυσικών αριθμών. Συνεπώς  $\alpha_{k_n} \rightarrow \alpha$ .

**Παρατηρήσεις α)** Τό αντίστροφο της παραπάνω προτάσεως δεν ισχύει πάντοτε, δηλ. αν  $\alpha_{k_n} \rightarrow \alpha$ , δεν έπεται κατ' ανάγκη ότι και  $\alpha_n \rightarrow \alpha$ , όπως εξάλλου φαίνεται στο παράδειγμα:  $\alpha_n = (-1)^n, n = 1, 2, \dots, \alpha_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \rightarrow 1$  και όμως η ακολουθία  $\alpha_n = (-1)^n, n = 1, 2, \dots$  δε συγκλίνει (βλ. παρδ. 5, σελ. 67).

**β)** Αν μία υπακολουθία μιās ακολουθίας  $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$  δε συγκλίνει, τότε και η ακολουθία  $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$  δε συγκλίνει (γιατί;).

**γ)** Αν υπάρχουν δυο υπακολουθίες μιās ακολουθίας  $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$  που συγκλίνουν, αλλά σε διαφορετικά όρια, τότε η  $(\alpha_n)$  δε συγκλίνει (γιατί;). Έτσι, π.χ., η ακολουθία  $\alpha_n = (-1)^n, n = 1, 2, \dots$  δε συγκλίνει, γιατί η υπακολουθία των όρων της με άρτιο δείκτη είναι:  $\alpha_{2n} = 1 \rightarrow 1$  και η υπακολουθία των όρων της με περιττό δείκτη είναι:  $\alpha_{2n+1} = -1 \rightarrow -1$ .

**§ 50. Ιδιότητα III.**—Αν  $p \in \mathbb{N}$  και  $\alpha \in \mathbb{R}$ , τότε ισχύει:

$$\alpha_n \rightarrow \alpha \iff \alpha_{n+p} \rightarrow \alpha$$

**Απόδειξη.** Η ακολουθία  $(\alpha_{n+p})$  είναι υπακολουθία της  $(\alpha_n)$ . Άρα

$$\alpha_n \rightarrow \alpha \Rightarrow \alpha_{n+p} \rightarrow \alpha.$$

Θά αποδείξουμε τώρα ότι: αν  $\alpha_{n+p} \rightarrow \alpha$ , τότε  $\alpha_n \rightarrow \alpha$ .



Πράγματι, αφού  $\alpha_{v+p} \rightarrow \alpha$  για  $\varepsilon > 0$  υπάρχει δείκτης  $v_1: |\alpha_{v+p} - \alpha| < \varepsilon$ ,  $\forall v \geq v_1$  (1). Θέτουμε:  $v_0 = p + v_1$ . Τότε για κάθε φυσικό αριθμό  $v \geq v_0 = p + v_1$  έχουμε:  $v - p \geq v_1$  και συνεπώς από την (1) παίρνουμε:  $|\alpha_{(v-p)+p} - \alpha| < \varepsilon$ , δηλαδή  $|\alpha_v - \alpha| < \varepsilon$  για κάθε  $v \geq v_0$ . Άρα:  $\alpha_v \rightarrow \alpha$ .

**Σημείωση.** Η ιδιότητα III διατυπώνεται με λόγια πιο γενικά ως εξής: 'Η «διαγραφή» ή η «προσθήκη» όρων που αντιστοιχούν σε πεπερασμένο πλήθος δεικτών δεν επηρεάζει τη συγκλίση μιας ακολουθίας. Αυτό συμβαίνει, γιατί η ιδιότητα της συγκλίσεως μιας ακολουθίας ανήκει στις ιδιότητες που ισχύουν «τελικά». Εύκολα κανείς μπορεί να διαπιστώσει ότι από μία τάξη και μετά, για την πρώτη ακολουθία, οι όροι των ακολουθιών  $(\alpha_n)$  και  $(\alpha_n + p)$  θα συμπίπτουν.

**§ 51. Ιδιότητα IV.**—Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.

Δηλαδή:  $\alpha_v \rightarrow \alpha \Rightarrow \alpha_v, v=1,2,\dots$  φραγμένη

**Απόδειξη.** Έστω μία ακολουθία  $(\alpha_v)$  με  $\alpha_v \rightarrow \alpha$  και ένας  $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$ . Τότε ισχύει:  $|\alpha_v - \alpha| < \varepsilon_0$  για κάθε  $v \geq v_0 = v_0(\varepsilon_0)$  και συνεπώς:

$$|\alpha_v| = |\alpha_v - \alpha + \alpha| \leq |\alpha_v - \alpha| + |\alpha| < \varepsilon_0 + |\alpha|, \forall v \geq v_0 \quad (1)$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

(i) 'Αν είναι  $v_0 = 1$ , τότε  $|\alpha_v| < |\alpha| + \varepsilon_0 \equiv \varphi, \forall v \in \mathbb{N}$  και συνεπώς η  $(\alpha_v)$  είναι απολύτως φραγμένη, άρα και φραγμένη.

(ii) 'Αν  $v_0 > 1$ , τότε θεωρούμε τους όρους:  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{v_0-1}$  και θέτουμε:

$$\varphi \equiv \max \{ |\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_{v_0-1}|, \varepsilon_0 + |\alpha| \} \quad (2)$$

Τότε από τις (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$|\alpha_v| \leq \varphi, \forall v \in \mathbb{N}.$$

Άρα η ακολουθία  $\alpha_v, v = 1, 2, \dots$  είναι πάλι φραγμένη.

**Σχόλιο.** Μία πιο απλή και σύντομη απόδειξη είναι και η εξής: 'Αφού  $\alpha_v \rightarrow \alpha$ , έπεται ότι: για  $\varepsilon = 1 > 0$  υπάρχει  $v_0 = v_0(1): |\alpha_v - \alpha| < 1, \forall v \geq v_0$ .

Όπότε:  $|\alpha_v| = |\alpha_v - \alpha + \alpha| \leq |\alpha_v - \alpha| + |\alpha| < 1 + |\alpha|, \forall v \geq v_0$ .

Έστω:  $\theta = |\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_{v_0-1}| + (1 + |\alpha|)$ .

Τότε:  $|\alpha_v| \leq \theta, \forall v \in \mathbb{N}$ . Άρα  $\alpha_v, v = 1, 2, \dots$  είναι φραγμένη.

**Παρατήρηση.** Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε, δηλαδή υπάρχουν φραγμένες ακολουθίες που δε συγκλίνουν. Π.χ. η ακολουθία  $\alpha_v = (-1)^v, v = 1, 2, \dots$ , αν και είναι φραγμένη, αφού  $|\alpha_v| = |(-1)^v| = 1 \leq 1, \forall v \in \mathbb{N}$ , δε συγκλίνει (βλ. πρδ. 5, § 47).

Είναι επίσης φανερό ότι: 'Αν μία ακολουθία  $(\alpha_v)$  δεν είναι φραγμένη, τότε η  $(\alpha_v)$  δε συγκλίνει (γιατί;).

**§ 52. Ιδιότητα V.**—Τό γινόμενο μηδενικής ακολουθίας επί φραγμένη είναι μηδενική ακολουθία.

Δηλαδή:  $\left. \begin{array}{l} \alpha_v \rightarrow 0 \\ (\beta_v) \text{ φραγμένη} \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_v \beta_v \rightarrow 0$

**Απόδειξη.** 'Αφού η  $(\beta_v)$  είναι φραγμένη, έπεται ότι είναι και απολύτως

φραγμένη και συνεπώς υπάρχει  $\theta > 0: |\beta_v| \leq \theta, \forall v \in \mathbb{N}$ .

Εξάλλου, αφού  $\alpha_v \rightarrow 0$ , έπεται ότι για κάθε  $\varepsilon > 0$ , άρα και για  $\frac{\varepsilon}{\theta} > 0$ , υπάρχει δείκτης  $v_0 = v_0\left(\frac{\varepsilon}{\theta}\right)$  τέτοιος, ώστε να ισχύει:

$$|\alpha_v| < \frac{\varepsilon}{\theta}, \forall v \geq v_0. \quad (2)$$

Τότε όμως, για κάθε  $v \geq v_0$  από τις (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$|\alpha_v \beta_v| = |\alpha_v| |\beta_v| < \frac{\varepsilon}{\theta} \cdot \theta = \varepsilon.$$

Άρα:  $\alpha_v \beta_v \rightarrow 0$ .

**Πόρισμα 1ο:**  $\left. \begin{array}{l} \alpha_v \rightarrow 0 \\ k \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow k \alpha_v \rightarrow 0$

**Πόρισμα 2ο:**  $\left. \begin{array}{l} \alpha_v \rightarrow \alpha \\ k \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow k \alpha_v \rightarrow k \alpha$

Τό πρώτο πόρισμα είναι άμεση συνέπεια της προηγούμενης ιδιότητας, αν θεωρήσουμε ως  $(\beta_v)$  τη σταθερή ακολουθία  $\beta_v = k, \forall v \in \mathbb{N}$ .

Τό πόρισμα 2 είναι άμεση συνέπεια του πορίσματος 1, αφού  $(\alpha_v - \alpha) \rightarrow 0$ .

**Παρατηρήσεις.** 1) 'Από τό πόρισμα 2 για  $k = -1$  έχουμε:  $\alpha_v \rightarrow \alpha \Rightarrow -\alpha_v \rightarrow -\alpha$ .

2) 'Από τό συμπέρασμα του πορίσματος 2 συνάγεται ότι:  $\lim(k \alpha_v) = k \cdot \lim \alpha_v, \forall k \in \mathbb{R}$ .

**§ 53. Ιδιότητα VI.**—'Αν η  $(\beta_v)$  είναι μηδενική ακολουθία και η  $(\alpha_v)$  ακολουθία τέτοια, ώστε: για κάθε  $v \geq v_1 \in \mathbb{N}$  να ισχύει:

$$|\alpha_v| \leq k \cdot |\beta_v|, (k > 0)$$

τότε η  $(\alpha_v)$  είναι επίσης μηδενική ακολουθία.

Δηλαδή:  $\left. \begin{array}{l} |\alpha_v| \leq k \cdot |\beta_v|, \forall v \geq v_1 \\ k > 0, \beta_v \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_v \rightarrow 0$

**Απόδειξη.** 'Αφού  $\beta_v \rightarrow 0$  έπεται: για κάθε  $\varepsilon > 0$ , άρα και για  $\frac{\varepsilon}{k} > 0$ ,

υπάρχει δείκτης  $v_2 = v_2\left(\frac{\varepsilon}{k}\right)$  τέτοιος, ώστε να ισχύει:  $|\beta_v| < \frac{\varepsilon}{k}$  για κάθε  $v \geq v_2$ .

Τότε όμως για κάθε  $v \geq v_0 = \max\{v_1, v_2\}$  θα ισχύουν συγχρόνως οι:

$$|\alpha_v| \leq k \cdot |\beta_v| \text{ και } |\beta_v| < \frac{\varepsilon}{k}$$

και συνεπώς:

$$|\alpha_v| \leq k \cdot |\beta_v| < k \cdot \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon \quad \forall v \geq v_0.$$

Άρα:  $\alpha_v \rightarrow 0$ .



**Πόρισμα.**—  $\left. \begin{array}{l} |a_n| \leq |b_n|, \forall n \in \mathbb{N} \\ b_n \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a_n \rightarrow 0.$

**Εφαρμογή.** Νά αποδείξετε ότι:  $a_n = \frac{\eta\mu 3n}{n^2+n+1} \rightarrow 0.$

**Λύση.** Έχουμε:

$$|a_n| = \left| \frac{\eta\mu 3n}{n^2+n+1} \right| \leq \frac{1}{n^2+n+1} < \frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n} \rightarrow 0. \text{ Άρα } a_n \rightarrow 0.$$

**§ 54. Ιδιότητα VII. (Ιδιότητα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών).**— Ισχύει:

$$\left. \begin{array}{l} \beta_n \leq a_n \leq \gamma_n, \forall n \geq n_1 \\ \beta_n \rightarrow a \text{ και } \gamma_n \rightarrow a \end{array} \right\} \Rightarrow a_n \rightarrow a$$

**Απόδειξη.** Αφοῦ  $\beta_n \rightarrow a$  έπεται: για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει δείκτης  $n_2 = n_2(\varepsilon)$  τέτοιος, ώστε νά ισχύει:

$$|\beta_n - a| < \varepsilon \iff a - \varepsilon < \beta_n < a + \varepsilon, \forall n \geq n_2(\varepsilon) \quad (1)$$

Επίσης, αφοῦ  $\gamma_n \rightarrow a$  έπεται ότι υπάρχει δείκτης  $n_3 = n_3(\varepsilon)$  τέτοιος, ώστε:

$$|\gamma_n - a| < \varepsilon \iff a - \varepsilon < \gamma_n < a + \varepsilon, \forall n \geq n_3(\varepsilon) \quad (2)$$

Έτσι, για κάθε  $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$  θά έχουμε:

$$a - \varepsilon < \beta_n \leq a_n \leq \gamma_n < a + \varepsilon$$

δηλαδή:  $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \iff |a_n - a| < \varepsilon, \forall n \geq n_0.$

Άρα:  $a_n \rightarrow a.$

**Παρατήρηση.** Μία ειδική περίπτωση τής παραπάνω ιδιότητας που τή συναντούμε συχνά είναι ή εξής:

αν  $\beta_n \rightarrow 0$  και  $|a_n| \leq \beta_n$ , τότε  $a_n \rightarrow 0$  (βλ. και Πορίσμα, § 53).

Πράγματι:  $|a_n| \leq \beta_n \iff -\beta_n \leq a_n \leq \beta_n$  και αφοῦ  $\beta_n \rightarrow 0 \Rightarrow -\beta_n \rightarrow 0.$

Άρα:  $a_n \rightarrow 0.$

**§ 55. Ιδιότητα VIII.**— Αν δύο ακολουθίες  $(a_n)$  και  $(\beta_n)$  συγκλίνουν και ισχύει  $a_n < \beta_n, \forall n \in \mathbb{N}$ , τότε θά έχουμε:  $\lim a_n \leq \lim \beta_n.$

$$\left. \begin{array}{l} a_n \rightarrow a, \beta_n \rightarrow \beta \\ a_n < \beta_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \Rightarrow a \leq \beta$$

**Απόδειξη.** Τήν ιδιότητα αυτή τή δείχνουμε μέ τή μέθοδο τής «εις άτοπον» απαγωγής. Έστω ότι είναι  $a > \beta$ . Τότε  $\frac{a-\beta}{2} > 0$  και έπειδή  $a_n \rightarrow a, \beta_n \rightarrow \beta$  υπάρχουν  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  μέ:

$$|a_n - a| < \frac{a-\beta}{2}, \forall n \geq n_1 \text{ και } |\beta_n - \beta| < \frac{a-\beta}{2}, \forall n \geq n_2 \quad (1)$$

$$|\beta_n - \beta| < \frac{a-\beta}{2}, \forall n \geq n_2 \quad (2)$$

Άρα, για κάθε  $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$  θά ισχύουν συγχρόνως οί (1) και (2) και συνεπώς προσθέτοντας κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$|a_n - a| + |\beta_n - \beta| < a - \beta \quad (3)$$

$$\text{Άλλά: } \beta_n - \beta \neq a_n - a \leq |\beta_n - \beta - a_n + a| \leq |\beta_n - \beta| + |a_n - a| \quad (4)$$

Έτσι, για κάθε  $n \geq n_0$  από τίσ (3) και (4) παίρνουμε:

$$\beta_n - \beta - a_n + a < a - \beta, \text{ δηλαδή: } \beta_n < a_n, \forall n \geq n_0.$$

Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί  $\beta_n > a_n, \forall n \in \mathbb{N}.$

Άρα:  $a \leq \beta.$

$$\left. \begin{array}{l} a_n \rightarrow a \\ a_n < s, \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \Rightarrow a \leq s$$

$$\left. \begin{array}{l} \beta_n \rightarrow \beta \\ \sigma < \beta_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma \leq \beta$$

**Απόδειξη.** Άμεσες συνέπειες τής προηγούμενης ιδιότητας, αρκεί νά πάρουμε τή σταθερή ακολουθία  $(\beta_n)$  μέ  $\beta_n = s$ , αντίστοιχα τή σταθερή ακολουθία  $(a_n)$  μέ  $a_n = \sigma.$

**Σημείωση.** Προσέξτε ιδιαίτερα τίσ περιπτώσεις  $s = 0$  και  $\sigma = 0.$

**§ 56. Ιδιότητα IX.**— Για κάθε ακολουθία πραγμ. αριθμών  $(a_n)$  ισχύει:

$$\left. \begin{array}{l} a_{2n} \rightarrow a \\ a_{2n-1} \rightarrow a \end{array} \right\} \iff a_n \rightarrow a$$

**Απόδειξη.** Έστω ότι  $a_{2n} \rightarrow a$  και  $a_{2n-1} \rightarrow a$ . Τότε  $\forall \varepsilon > 0$  υπάρχουν δείκτες  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  μέ:

$$|a_{2n} - a| < \varepsilon, \forall n \geq n_1 \text{ και } |a_{2n-1} - a| < \varepsilon, \forall n \geq n_2.$$

Θέτουμε:  $n_0 = \max\{2n_1, 2n_2 - 1\}$  και παρατηρούμε ότι: κάθε φυσικός αριθμός  $n$  θά είναι  $n = 2k$  (άρτιος) ή  $n = 2k - 1$  (περιττός). Οπότε:

(i) αν  $n$  είναι άρτιος ( $n = 2k$ ), τότε για  $n \geq n_0$  έχουμε:  $2k \geq 2n_1 \Rightarrow k \geq n_1 \Rightarrow |a_{2k} - a| < \varepsilon$ , δηλαδή:  $|a_n - a| < \varepsilon$

(ii) αν  $n$  είναι περιττός ( $n = 2k - 1$ ), τότε για  $n \geq n_0$  έχουμε:  $2k - 1 \geq 2n_2 - 1 \Rightarrow k \geq n_2 \Rightarrow |a_{2k-1} - a| < \varepsilon$ , δηλαδή:  $|a_n - a| < \varepsilon.$

Ωστε:  $\forall n \geq n_0$  έπεται ότι:  $|a_n - a| < \varepsilon$  και συνεπώς  $a_n \rightarrow a.$

Τό αντίστροφο είναι άμέσως φανερό από τήν ιδιότητα II τής § 49.

#### IV. ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΩΝ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ Η ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ

Αν  $(a_n)$  και  $(\beta_n)$  είναι ακολουθίες πραγματικών αριθμών, τότε, όπως μάθαμε και στήν αρχή αυτού του Κεφαλαίου, τό άθροισμα, ή διαφορά, τό γινόμενο και τό πηλίκο τους είναι αντίστοιχως οί ακολουθίες:



$$(\alpha_n + \beta_n), (\alpha_n - \beta_n), (\alpha_n \beta_n) \text{ και } \left( \frac{\alpha_n}{\beta_n} \right)$$

όπου στην τελευταία περίπτωση υποτίθεται ότι:  $\beta_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Η σύγκλιση των τελευταίων ακολουθιών και τα όριά τους εξαρτώνται από τη σύγκλιση και τα όρια των ακολουθιών  $(\alpha_n)$  και  $(\beta_n)$ .

Ακριβέστερα ισχύουν οι επόμενες προτάσεις:

**§ 57. Ιδιότητα X. (όριο άθροίσματος).**—Αν  $\lim \alpha_n = a$  και  $\lim \beta_n = b$ , τότε υπάρχει το  $\lim (\alpha_n + \beta_n)$  και ισούται με  $a + b$ .

Δηλαδή:  $\lim (\alpha_n + \beta_n) = \lim \alpha_n + \lim \beta_n$

Απόδειξη. Αφού  $\lim \alpha_n = a$  έπεται ότι: για κάθε  $\varepsilon > 0$ , έρα και για  $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ ,

υπάρχει δείκτης  $n_1 = n_1(\frac{\varepsilon}{2}) \equiv n_1(\varepsilon)$  τέτοιος, ώστε να ισχύει:

$$|\alpha_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq n_1 \quad (1)$$

Επίσης, αφού  $\lim \beta_n = b$ , υπάρχει δείκτης  $n_2 = n_2(\varepsilon)$  ώστε να ισχύει:

$$|\beta_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq n_2 \quad (2)$$

Τότε όμως, για κάθε  $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$  θα ισχύουν συγχρόνως οι (1) και (2) και συνεπώς θα έχουμε:

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ και } \forall n \geq n_0 \Rightarrow |(\alpha_n + \beta_n) - (a + b)| = |(\alpha_n - a) + (\beta_n - b)| \leq |\alpha_n - a| + |\beta_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

δηλαδή:  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon): |(\alpha_n + \beta_n) - (a + b)| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$ .

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει το  $\lim(\alpha_n + \beta_n)$  και ότι ισχύει:

$$\lim(\alpha_n + \beta_n) = a + b = \lim \alpha_n + \lim \beta_n.$$

**Σημείωση.** Μπορούμε να διατυπώσουμε και με λόγια την παραπάνω ιδιότητα ως εξής:

Τό όριο του άθροίσματος δύο συγκλινουσών ακολουθιών είναι ίσο με το άθροισμα των ορίων τους.

**Παρατηρήσεις.** 1) Η παραπάνω ιδιότητα επεκτείνεται και στην περίπτωση ενός πεπερασμένου πλήθους συγκλινουσών ακολουθιών. Δηλαδή τότε ισχύει:

$$\lim(\alpha_n + \beta_n + \dots + x_n) = \lim \alpha_n + \lim \beta_n + \dots + \lim x_n \quad (1)$$

2) Προσέξτε! Η (1) δεν ισχύει αν τό πλήθος των προσθετέων δεν είναι πεπερασμένο. Αυτό φαίνεται και από τό ακόλουθο αντιπαράδειγμα\*: Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα AB μέ μήκος ίσο μέ τό μονάδα, τό οποίο διαιρούμε σε  $n$  ίσα μέρη ( $n \in \mathbb{N}$ ). Τότε έχουμε:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = 1 \quad (2)$$

Αν αλήθευε ή (1) για όποιοδήποτε πλήθος προσθετέων θα παίρναμε από τό (2):

$$1 = \lim \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} \right) = \lim \frac{1}{n} + \lim \frac{1}{n} + \dots + \lim \frac{1}{n} = 0 \text{ (ψευδές)}.$$

\* Ένα παράδειγμα μέ τό όποιο αποδεικνύεται ότι μία πρόταση  $p$  είναι ψευδής, ονομάζεται **αντιπαράδειγμα** της  $p$ .

3) Τό αντίστροφο της ιδιότητας X δεν αληθεύει πάντοτε, δηλαδή αν τό άθροισμα δύο ακολουθιών είναι συγκλίνουσα ακολουθία, αυτό δέ συνεπάγεται κατ' ανάγκη ότι καθεμία απ' αυτές είναι συγκλίνουσα ακολουθία. Είναι δυνατό μάλιστα να μη συγκλίνει ούτε ή μία ούτε ή άλλη. Π.χ. για τίς ακολουθίες:  $\alpha_n = (-1)^n, n = 1, 2, \dots$  και  $\beta_n = (-1)^{n+1}, n = 1, 2, \dots$  ισχύει:

$$\alpha_n + \beta_n = (-1)^n + (-1)^{n+1} = (-1)^n [1 + (-1)] = 0 \rightarrow 0 \text{ και όμως καμία δέ συγκλίνει.}$$

Έχοντας τώρα υπόψη και τήν παρατήρηση 1 της § 52 ισχύει:

**§ 58. Ιδιότητα XI. (όριο διαφοράς).**—Αν  $\lim \alpha_n = a$  και  $\lim \beta_n = b$ , τότε υπάρχει τό  $\lim (\alpha_n - \beta_n)$  και ισούται μέ  $a - b$ .

Δηλαδή:  $\lim (\alpha_n - \beta_n) = \lim \alpha_n - \lim \beta_n$

Απόδειξη. Έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_n \rightarrow a \\ \beta_n \rightarrow b \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha_n \rightarrow a \\ -\beta_n \rightarrow -b \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_n + (-\beta_n) \rightarrow a + (-b), \text{ δηλ. } \alpha_n - \beta_n \rightarrow a - b.$$

**§ 59. Πρόρισμα.**—Γιά κάθε  $\xi, \eta \in \mathbb{R}$  ισχύει:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_n \rightarrow a \\ \beta_n \rightarrow b \end{array} \right\} \Rightarrow (\xi \alpha_n + \eta \beta_n) \rightarrow \xi a + \eta b.$$

Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια της ιδιότητας X και του πορίσματος 2 της § 52. Ειδικά για  $\xi = 1$  και  $\eta = -1$  παίρνουμε τήν ιδιότητα XI.

**§ 60. Ιδιότητα XII. (όριο γινομένου).**—Αν  $\lim \alpha_n = a$  και  $\lim \beta_n = b$ , τότε υπάρχει τό  $\lim (\alpha_n \cdot \beta_n)$  και ισούται μέ  $ab$ .

Δηλαδή:  $\lim(\alpha_n \cdot \beta_n) = (\lim \alpha_n) \cdot (\lim \beta_n).$

Απόδειξη. Έχουμε:

$$\alpha_n \beta_n - ab = \alpha_n \beta_n - \alpha_n b + \alpha_n b - ab = \alpha_n (\beta_n - b) + b (\alpha_n - a). \quad (1)$$

Οί ακολουθίες  $(\beta_n - b)$  και  $(\alpha_n - a)$  είναι μηδενικές και ή  $(\alpha_n)$  είναι φραγμένη (γιατί είναι συγκλίνουσα). Τότε όμως έχουμε:

$$(\S 52, \text{ιδ. V}): \left. \begin{array}{l} \beta_n - b \rightarrow 0 \\ (\alpha_n) \text{ φραγμένη} \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_n (\beta_n - b) \rightarrow 0$$

$$(\S 52, \text{Πόρ. 1}): \left. \begin{array}{l} \alpha_n - a \rightarrow 0 \\ b \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow b (\alpha_n - a) \rightarrow 0.$$

Έρα, από τήν ιδιότητα X:  $\alpha_n (\beta_n - b) + b (\alpha_n - a) \rightarrow 0$ . Δηλ.  $\alpha_n \beta_n - ab \rightarrow 0$  και συνεπώς:

$$\lim(\alpha_n \cdot \beta_n) = a \cdot b = (\lim \alpha_n) \cdot (\lim \beta_n).$$

**Σημείωση:** Μέ λόγια ή παραπάνω ιδιότητα διατυπώνεται ως εξής: Τό όριο του γινομένου δύο συγκλινουσών ακολουθιών είναι ίσο μέ τό γινόμενο των ορίων τους.

$$|a_n| \leq \varepsilon$$

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < \varepsilon + |a|, \text{ για } \varepsilon = 1$$



**Παρατηρήσεις.** 1) 'Η παραπάνω ιδιότητα επεκτείνεται και στην περίπτωση ενός πεπερασμένου πλήθους συγκλινουσών ακολουθιών. Δηλαδή τότε ισχύει:

$$\lim(\alpha_n \cdot \beta_n \cdot \gamma_n \dots x_n) = \lim \alpha_n \cdot \lim \beta_n \cdot \lim \gamma_n \dots \lim x_n \quad (1)$$

Ειδικότερα, αν  $k$  ακολουθίες είναι ίσες, τότε ισχύει:

$$\alpha_n \rightarrow \alpha \Rightarrow \lim(\alpha_n)^k = (\lim \alpha_n)^k = \alpha^k \quad (k \in \mathbb{N}). \quad (2)$$

2) Προσέξτε! η (1) δεν ισχύει αν το πλήθος των παραγόντων δεν είναι πεπερασμένο. 'Επίσης το αντίστροφο της παραπάνω ιδιότητας γενικά δεν ισχύει (παράδειγμα;).

**§ 51. 'Ιδιότητα XIII (δριο πηλίκου).**—'Αν  $\lim \alpha_n = \alpha$  και  $\lim \beta_n = \beta \neq 0$  και άκόμη αν  $\beta_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , τότε υπάρχει το  $\lim \left( \frac{\alpha_n}{\beta_n} \right)$  και ισούται με  $\frac{\alpha}{\beta}$ .

Δηλαδή:

$$\lim \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{\lim \alpha_n}{\lim \beta_n}$$

**'Απόδειξη.** 'Εστω ότι  $0 \neq \beta_n \rightarrow \beta \neq 0$ . Παρατηρούμε πρώτα-πρώτα ότι:  $\frac{\alpha_n}{\beta_n} = \alpha_n \cdot \frac{1}{\beta_n}$ . 'Αρα αρκεί να αποδείξουμε ότι:  $\frac{1}{\beta_n} \rightarrow \frac{1}{\beta}$ , δηλαδή ότι:

$$\frac{1}{\beta_n} - \frac{1}{\beta} \rightarrow 0.$$

Πράγματι, για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  έχουμε:

$$\left| \frac{1}{\beta_n} - \frac{1}{\beta} \right| = \frac{|\beta - \beta_n|}{|\beta_n| \cdot |\beta|} = \frac{|\beta_n - \beta|}{|\beta_n| \cdot |\beta|} = \frac{1}{|\beta_n| \cdot |\beta|} \cdot |\beta_n - \beta| \quad (1)$$

'Εξάλλου, αφού  $\beta_n \rightarrow \beta \neq 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ , άρα και για  $\varepsilon = \frac{|\beta|}{2} > 0$ , υπάρχει δείκτης  $n_0 = n_0(\varepsilon)$  τέτοιος, ώστε να ισχύει:  $|\beta_n - \beta| < \frac{|\beta|}{2}, \forall n \geq n_0$ .

'Αλλά:  $||\beta| - |\beta_n|| \leq |\beta - \beta_n| = |\beta_n - \beta|$  (§ 27)

όποτε:  $|\beta| - |\beta_n| < \frac{|\beta|}{2}$ , δηλαδή:  $|\beta_n| > |\beta| - \frac{|\beta|}{2} = \frac{|\beta|}{2}, \forall n \geq n_0$

και συνεπώς:  $\frac{1}{|\beta_n|} < \frac{2}{|\beta|}, \forall n \geq n_0$

'Αρα:  $\frac{1}{|\beta_n| \cdot |\beta|} < \frac{2}{|\beta|^2} = \frac{2}{\beta^2}, \forall n \geq n_0 \quad (2)$

'Επομένως, από τις (1) και (2), τελικά είναι:

$$\left| \frac{1}{\beta_n} - \frac{1}{\beta} \right| < \frac{2}{\beta^2} \cdot |\beta_n - \beta|, \forall n \geq n_0 \quad (3)$$

'Αλλά  $\beta_n - \beta \rightarrow 0$  (γιατί  $\beta_n \rightarrow \beta$ ) και  $\frac{2}{\beta^2} \equiv k > 0$ . Συνεπώς (βλ. § 53)

$$\frac{1}{\beta_n} - \frac{1}{\beta} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{\beta_n} \rightarrow \frac{1}{\beta}, \text{ δηλ. } \lim \frac{1}{\beta_n} = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\lim \beta_n}.$$

Τότε όμως έχουμε:

$$\lim \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \lim \left( \alpha_n \cdot \frac{1}{\beta_n} \right) = (\lim \alpha_n) \cdot \left( \lim \frac{1}{\beta_n} \right) = (\lim \alpha_n) \cdot \frac{1}{\lim \beta_n} = \frac{\lim \alpha_n}{\lim \beta_n}.$$

**Παρατηρήσεις.** 1) Τό αντίστροφο της παραπάνω προτάσεως γενικά δεν αληθεύει.

Δηλαδή η ύπαρξη του  $\lim \left( \frac{\alpha_n}{\beta_n} \right)$  δε συνεπάγεται πάντοτε την ύπαρξη καθενός από τα  $\lim \alpha_n, \lim \beta_n$ . **Παράδειγμα:** 'Ας πάρουμε ως  $\alpha_n = (-1)^n, n = 1, 2, \dots$  και  $\beta_n = (-1)^{n+1}, n = 1, 2, \dots$ , τότε  $\lim \left( \frac{\alpha_n}{\beta_n} \right) = -1$ , ενώ καμία απ' αυτές τις ακολουθίες δε συγκλίνει.

2) Προσέξτε! στις εφαρμογές για να κάνουμε χρήση της παραπάνω ιδιότητας πρέπει προηγουμένως να έχουμε εξασφαλίσει την ύπαρξη των όριων των ακολουθιών του αριθμητή και παρονομαστή και άκόμη ότι το όριο της ακολουθίας του παρονομαστή είναι διάφορο από το μηδέν (βλ. πρώτο παράδειγμα στη σελίδα 78).

3) Για κάθε άκεραιο αριθμό  $k$  ισχύει:

$$0 \neq \beta_n \rightarrow \beta \neq 0 \Rightarrow \lim(\beta_n)^k = (\lim \beta_n)^k = \beta^k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

'Η παραπάνω συνεπαγωγή αποτελεί γενίκευση της (2) που διατυπώνουμε στην πρώτη παρατήρηση της § 60.

**§ 62. 'Ιδιότητα XIV.**—'Αν  $\lim \alpha_n = \alpha$ , τότε υπάρχει το  $\lim |\alpha_n|$  και ισούται με  $|\alpha|$ .

Δηλαδή:

$$\alpha_n \rightarrow \alpha \Rightarrow |\alpha_n| \rightarrow |\alpha|$$

**'Απόδειξη.** Ξέρουμε από τό προηγούμενο Κεφάλαιο ότι:  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  ισχύει:

$$||x| - |y|| \leq |x - y|, \text{ όποτε έχουμε:}$$

$$||\alpha_n| - |\alpha|| \leq |\alpha_n - \alpha|, \forall n \in \mathbb{N} \text{ και } (\alpha_n - \alpha) \rightarrow 0, \text{ άφού } \alpha_n \rightarrow \alpha.$$

'Αρα (§ 53, Πόρισμα):  $(|\alpha_n| - |\alpha|) \rightarrow 0$  και συνεπώς  $|\alpha_n| \rightarrow |\alpha|$ .

'Ωστε:

$$\lim |\alpha_n| = |\alpha| = |\lim \alpha_n|.$$

**Σημείωση.** Μέ λόγια η παραπάνω ιδιότητα διατυπώνεται ως εξής: Τό όριο της απόλυτης τιμής μιάς ακολουθίας είναι ίσο με την απόλυτη τιμή του όριου της.

**Παρατηρήσεις.** 1) Τό αντίστροφο της παραπάνω προτάσεως δεν ισχύει, εκτός αν  $\alpha = 0$ , δηλαδή αν  $\lim |\alpha_n| = |\alpha| \neq 0$ , δεν έπεται και  $\lim \alpha_n = \alpha$ , και αυτό γιατί είναι δυνατό μία ακολουθία να συγκλίνει απόλυτως, χωρίς όμως ή ίδια να συγκλίνει, όπως άμέσως φαίνεται από τό ακόλουθο αντιπαράδειγμα: 'Εστω  $\alpha_n = (-1)^n, n = 1, 2, \dots$  'Εχουμε:

$$|\alpha_n| = |(-1)^n| = 1 \rightarrow 1 \text{ και όμως ή } \alpha_n = (-1)^n, n = 1, 2, \dots \text{ δε συγκλίνει.}$$

2) Ειδικά για  $\alpha = 0$  ισχύει ή ακόλουθη ισοδυναμία:

$$\alpha_n \rightarrow 0 \iff -\alpha_n \rightarrow 0 \iff |\alpha_n| \rightarrow 0.$$

'Η απόδειξή της είναι άμέσως φανερή άρκεί να θυμηθούμε ότι:  $|\alpha_n| = |-\alpha_n| = ||\alpha_n||$ .

**§ 63. 'Ιδιότητα XV (δριο ρίζας).**—'Αν  $\lim \alpha_n = \alpha$ , τότε ισχύει:

$$\lim \sqrt[k]{\alpha_n} = \sqrt[k]{\alpha} = \sqrt[k]{\lim \alpha_n}$$

**'Απόδειξη.** (i) 'Αν  $\alpha = 0$ , ζητάμε να δείξουμε ότι  $\sqrt[k]{|\alpha_n|} \rightarrow 0$ . Πράγματι, άφού  $\alpha_n \rightarrow 0$  έπεται ότι:  $\forall \varepsilon > 0$ , άρα και για  $\varepsilon^2 > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon): |\alpha_n| < \varepsilon^2$



$\forall v \geq v_0$ . Από την:  $|\alpha_v| < \varepsilon^2 \Rightarrow \sqrt{|\alpha_v|} < \varepsilon, \forall v \geq v_0$ . Άρα  $\sqrt{|\alpha_v|} \rightarrow 0$ .  
(ii) Έστω τώρα  $\alpha \neq 0$ . Αφού  $\alpha_v \rightarrow \alpha$  έχουμε:  $|\alpha_v| \rightarrow |\alpha|$ , οπότε:  
 $|\alpha_v| - |\alpha| \rightarrow 0$ .

Εξάλλου ισχύει:

$$|\sqrt{|\alpha_v|} - \sqrt{|\alpha|}| = \frac{||\alpha_v| - |\alpha||}{\sqrt{|\alpha_v|} + \sqrt{|\alpha|}} < \frac{1}{\sqrt{|\alpha|}} \cdot (||\alpha_v| - |\alpha||) \rightarrow 0 \quad (\S 52)$$

Τότε όμως (§ 53) είναι:  $\sqrt{|\alpha_v|} - \sqrt{|\alpha|} \rightarrow 0$  και συνεπώς  $\sqrt{|\alpha_v|} \rightarrow \sqrt{|\alpha|}$ .

**Παρατηρήσεις.** 1) Από την παραπάνω ιδιότητα συμπεραίνουμε ότι: τα σύμβολα  $\lim$  και  $\sqrt{\quad}$  επιτρέπεται να εναλλάσσονται άριστερά από την ακολουθία  $\alpha_v, v = 1, 2, \dots$

2) Πιο γενικά ισχύει: αν  $\alpha_v \geq 0, \forall v \in \mathbb{N}$  και  $\lim \alpha_v = \alpha$ , τότε:

$$\lim \sqrt[k]{\alpha_v} = \sqrt[k]{\lim \alpha_v} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

• Οι ιδιότητες που αποδείξαμε στις προηγούμενες παραγράφους μας επιτρέπουν να βρίσκουμε τις όριακές τιμές ορισμένων ακολουθιών όχι βάσει του ορισμού, αλλά υπολογιστικά αναλύοντας το γενικό τους όρο, όπως φαίνεται στα επόμενα παραδείγματα:

**Παράδειγμα 1ο.** Νά αποδείξετε ότι:  $\lim \frac{2v^2 + 4v - 7}{3v^2 + 1} = \frac{2}{3}$ .

Λύση. Έχουμε:

$$\frac{2v^2 + 4v - 7}{3v^2 + 1} = \frac{v^2 \left( 2 + \frac{4}{v} - \frac{7}{v^2} \right)}{v^2 \left( 3 + \frac{1}{v^2} \right)} = \frac{2 + \frac{4}{v} - \frac{7}{v^2}}{3 + \frac{1}{v^2}}.$$

Οι ακολουθίες όμως  $\frac{4}{v} = 4 \cdot \frac{1}{v}, v = 1, 2, \dots, \frac{1}{v^2} = \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{v}, v = 1, 2, \dots$  και  $\frac{7}{v^2} = 7 \cdot \frac{1}{v^2}, v = 1, 2, \dots$  είναι όλες μηδενικές ακολουθίες. Συνεπώς έχουμε:

$$\lim \left( 2 + \frac{4}{v} - \frac{7}{v^2} \right) = 2 + 0 - 0 = 2 \text{ και } \lim \left( 3 + \frac{1}{v^2} \right) = 3 + 0 = 3 \neq 0.$$

Τότε όμως, σύμφωνα με την ιδιότητα XIII της § 61, έχουμε:

$$\lim \frac{2v^2 + 4v - 7}{3v^2 + 1} = \lim \frac{2 + \frac{4}{v} - \frac{7}{v^2}}{3 + \frac{1}{v^2}} = \frac{\lim \left( 2 + \frac{4}{v} - \frac{7}{v^2} \right)}{\lim \left( 3 + \frac{1}{v^2} \right)} = \frac{2}{3}.$$

Τί παρατηρείτε;

**Παράδειγμα 2ο.** Νά αποδείξετε ότι:  $\lim \frac{v^3 - v^2 + 1}{v^5 + 2v^4 - 3} = 0$ .

Λύση. Έχουμε:

$$\frac{v^3 - v^2 + 1}{v^5 + 2v^4 - 3} = \frac{v^3 \left( 1 - \frac{1}{v} + \frac{1}{v^3} \right)}{v^5 \left( 1 + \frac{2}{v} - \frac{3}{v^5} \right)} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{v} + \frac{1}{v^3}}{1 + \frac{2}{v} - \frac{3}{v^5}}.$$

$$\text{Άλλά: } \lim \frac{1}{v^2} = 0 \text{ και } \lim \frac{1 - \frac{1}{v} + \frac{1}{v^3}}{1 + \frac{2}{v} - \frac{3}{v^5}} = \frac{1 - 0 + 0}{1 + 0 - 0} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$\text{Άρα: } \lim \frac{v^3 - v^2 + 1}{v^5 + 2v^4 - 3} = \lim \frac{1}{v^2} \cdot \lim \frac{1 - \frac{1}{v} + \frac{1}{v^3}}{1 + \frac{2}{v} - \frac{3}{v^5}} = 0 \cdot 1 = 0.$$

**Σημείωση.** Από τα δύο προηγούμενα παραδείγματα παρατηρούμε κάτι που ισχύει γενικά στις συγκλίνουσες ακολουθίες: "Όταν ο βαθμός του αριθμητή είναι ίσος με το βαθμό του παρονομαστή, τότε το κλάσμα έχει όριο έναν αριθμό που είναι ο λόγος των συντελεστών των μεγιστοβάθμιων όρων αριθμητή και παρονομαστή, ενώ όταν ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος από το βαθμό του παρονομαστή, τότε το κλάσμα έχει όριο το μηδέν.

**§ 64. Μερικές αξιοσημείωτες και χρήσιμες εφαρμογές.**—Σ' αυτή την παράγραφο μελετάμε μερικές ακολουθίες που θα μας είναι πολύ χρήσιμες στα επόμενα, γι' αυτό συνιστούμε στον αναγνώστη να δώσει ιδιαίτερη προσοχή.

**1η.** Νά αποδείξετε ότι η ακολουθία  $\alpha_v = \omega^v, v = 1, 2, \dots$ , όπου  $\omega$  αριθμός πραγματικός με  $|\omega| < 1$ , είναι μηδενική.

Δηλαδή:

$$|\omega| < 1 \Rightarrow \alpha_v \equiv \omega^v \rightarrow 0$$

Απόδειξη. α) Αν  $\omega = 0$ , τότε  $\alpha_v = \omega^v = 0, \forall v \in \mathbb{N}$  και συνεπώς  $\alpha_v \rightarrow 0$ .

β) Αν  $\omega \neq 0$ , τότε  $0 < |\omega| < 1$ , οπότε  $\frac{1}{|\omega|} > 1$ , δηλαδή  $\frac{1}{|\omega|} - 1 > 0$ . Θέτουμε:

$\frac{1}{|\omega|} - 1 = \theta$ , όπου  $\theta > 0$ . Τότε, από τη γνωστή ανισότητα του Bernoulli, έχουμε:

$$\frac{1}{|\omega|} = 1 + \theta \Rightarrow \frac{1}{|\omega|^v} = (1 + \theta)^v \geq 1 + v\theta > v\theta \Rightarrow |\omega|^v = |\omega^v| < \frac{1}{v\theta} = \frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{v}$$

$$\text{Ώστε: } |\alpha_v| = |\omega^v| < \frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{v}, \forall v \in \mathbb{N}.$$

Άρα, επειδή  $\frac{1}{v} \rightarrow 0$ , από την ιδιότητα VI προκύπτει ότι και η ακολουθία  $\alpha_v = \omega^v$ ,

$v = 1, 2, \dots$  ( $0 < |\omega| < 1$ ) είναι μηδενική.

Ώστε:  $\forall \omega \in \mathbb{R}$  με  $-1 < \omega < 1$  ισχύει:  $\lim \omega^v = 0$ .

**\* 2η.** Έστω μία ακολουθία  $\alpha_v, v = 1, 2, \dots$  με  $\alpha_v \neq 0 \forall v \in \mathbb{N}$ . Νά αποδείξετε ότι:

$$\lim \left| \frac{\alpha_{v+1}}{\alpha_v} \right| = k < 1 \Rightarrow \alpha_v \rightarrow 0$$

Απόδειξη. Αφού  $\left| \frac{\alpha_{v+1}}{\alpha_v} \right| \rightarrow k, (0 \leq k < 1)$  έπεται ότι:  $\forall \varepsilon > 0$ , άρα και για  $0 < \varepsilon < 1 - k$ ,

υπάρχει δείκτης  $v_0 = v_0(\varepsilon)$ :  $\left| \frac{\alpha_{v+1}}{\alpha_v} - k \right| < \varepsilon \forall v \geq v_0$ .

Έτσι για κάθε  $v \geq v_0$  έχουμε:

$$\left| \frac{\alpha_{v+1}}{\alpha_v} \right| = \left| \frac{\alpha_{v+1}}{\alpha_v} - k + k \right| \leq \left| \frac{\alpha_{v+1}}{\alpha_v} - k \right| + k < \varepsilon + k \equiv \omega, \text{ όπου } 0 < \omega < 1$$

Άρα:  $|\alpha_{v+1}| \leq \omega \cdot |\alpha_v|, \forall v \geq v_0 \quad (0 < \omega < 1).$



\*Αν τώρα στην τελευταία σχέση θέσουμε  $v = v_0, v_0 + 1, \dots, v_0 + p - 1, p \in \mathbb{N}$  και πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη τις σχέσεις που θα προκύψουν, βρίσκουμε, ύστερα από τις σχετικές απλοποιήσεις, ότι:

$$|\alpha_{v_0+p}| \leq \omega^p \cdot |\alpha_{v_0}| \quad (p \in \mathbb{N})$$

\*Επειδή  $0 < \omega < 1$ , είναι  $\omega^p \rightarrow 0$  (σύμφωνα με την εφαρμογή 1) και συνεπώς:  $\lim_{p \rightarrow \infty} \omega^p = 0$ . Τότε όμως θα είναι και  $\alpha_{v_0+p} \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha_v \rightarrow 0$  (βλ. § 50).

**\* 3η. Νά αποδείξετε ότι: αν  $\omega \in \mathbb{R}$  και  $|\omega| < 1$ , τότε:  $\alpha_v = v^k \cdot \omega^v \rightarrow 0, (k \in \mathbb{Z})$ .**

\*Απόδειξη. \*Αν  $\omega = 0$ , τότε  $v^k \cdot \omega^v = 0 \rightarrow 0$ . \*Εστω ότι  $\omega \neq 0$ , τότε  $\alpha_v \neq 0 \quad \forall v \in \mathbb{N}$ .

\*Εφαρμόζοντας τώρα τη 2 έχουμε:

$$\left| \frac{\alpha_{v+1}}{\alpha_v} \right| = \left| \frac{(v+1)^k \cdot \omega^{v+1}}{v^k \cdot \omega^v} \right| = \left( \frac{v+1}{v} \right)^k \cdot |\omega| = \left( 1 + \frac{1}{v} \right)^k \cdot |\omega| \rightarrow 1 \cdot |\omega| = |\omega| < 1.$$

\*Αρα  $\alpha_v \rightarrow 0$ , δηλαδή:  $v^k \cdot \omega^v \rightarrow 0$ .

**Σημείωση.** Για  $k = 0$  έχουμε:  $\alpha_v = \omega^v \rightarrow 0$  (βλ. \*Εφαρμογή 1).

**\* 4η. Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  νά αποδείξετε ότι:  $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{x^v}{v!} = 0$ .**

**Σημείωση.** Το σύμβολο  $v!$  διαβάζεται *ν παραγοντικό* και ορίζεται ως εξής:

$1! = 1$  και  $v! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot v$  (για  $v > 1$ ). Προφανώς  $(v+1)! = v!(v+1)$ .

\*Απόδειξη. \*Αν  $x = 0$ , τότε  $\frac{x^v}{v!} = 0 \rightarrow 0$ . \*Εστω ότι  $x \neq 0$ . Θέτουμε  $\alpha_v = \frac{x^v}{v!}$  και έχουμε:

$$\left| \frac{\alpha_{v+1}}{\alpha_v} \right| = \frac{|x|^{v+1}}{(v+1)!} : \frac{|x|^v}{v!} = \frac{|x|^{v+1} \cdot v!}{|x|^v \cdot (v+1)!} = \frac{|x|}{v+1} \rightarrow 0 < 1.$$

\*Αρα:  $\alpha_v \rightarrow 0$ , δηλαδή  $\frac{x^v}{v!} \rightarrow 0$ .

**\* 5η. Νά αποδείξετε ότι: αν  $a \in \mathbb{R}^+$ , τότε  $\alpha_v = \sqrt[v]{a} \rightarrow 1$ .**

\*Απόδειξη. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις: (i)  $\alpha = 1$ , (ii)  $\alpha > 1$  και (iii)  $0 < \alpha < 1$

(i)  $\alpha = 1$ , τότε  $\alpha_v = \sqrt[v]{1} = 1 \rightarrow 1$ .

(ii)  $\alpha > 1$ , τότε  $\alpha_v = \sqrt[v]{\alpha} > 1, \quad \forall v \in \mathbb{N}$ . Θέτουμε  $\alpha_v = \sqrt[v]{\alpha} = 1 + \delta_v$ , όπου  $\delta_v > 0, \quad \forall v \in \mathbb{N}$ .

\*Αρκεί λοιπόν νά αποδείξουμε ότι:  $\delta_v \rightarrow 0$ , τότε  $\alpha_v = \sqrt[v]{\alpha} \rightarrow 1$ .

Πράγματι, έχουμε:

$$\sqrt[v]{\alpha} = 1 + \delta_v \Rightarrow \alpha = (1 + \delta_v)^v \geq 1 + v \cdot \delta_v > v \cdot \delta_v \Rightarrow \delta_v < \alpha \cdot \frac{1}{v}, \quad \forall v \in \mathbb{N}.$$

\*Ωστε:  $0 < \delta_v < \alpha \cdot \frac{1}{v}, \quad \forall v \in \mathbb{N}$  και επειδή  $\alpha \cdot \frac{1}{v} \rightarrow 0$ , έπεται:  $\delta_v \rightarrow 0$ .

(iii)  $0 < \alpha < 1$ , τότε  $\frac{1}{\alpha} > 1$  και σύμφωνα με την (ii) έχουμε:

$$\sqrt[v]{\frac{1}{\alpha}} \rightarrow 1, \text{ δηλαδή } \frac{1}{\sqrt[v]{\alpha}} \rightarrow 1, \text{ τότε και } \sqrt[v]{\alpha} \rightarrow 1.$$

\*Ωστε:

$$\alpha_v = \sqrt[v]{a} \rightarrow 1, \quad \forall a > 0$$

**\* 6η. Νά αποδείξετε ότι:  $\lim_{v \rightarrow \infty} \sqrt[v]{v} = 1$ .**

\*Απόδειξη. Για κάθε  $v \in \mathbb{N}$  έχουμε:  $v \geq 1 \Rightarrow \sqrt[v]{v} \geq 1$ , άρα  $\sqrt[v]{v} - 1 \geq 0$ .

Θέτουμε:  $\delta_v = \sqrt[v]{v} - 1, \quad v = 1, 2, \dots$ , τότε  $\delta_v \geq 0, \quad \forall v \in \mathbb{N}$  και

$$\sqrt[v]{v} = 1 + \delta_v \Rightarrow \sqrt[v]{v} = (1 + \delta_v)^v \geq 1 + v \cdot \delta_v > v \cdot \delta_v \Rightarrow \delta_v < \frac{1}{v} = \frac{1}{\sqrt[v]{v}}, \quad \forall v \in \mathbb{N}.$$

\*Ωστε:  $0 \leq \delta_v < \frac{1}{\sqrt[v]{v}}, \quad \forall v \in \mathbb{N}$  και επειδή  $\frac{1}{\sqrt[v]{v}} \rightarrow 0$ , έπεται:  $\delta_v \rightarrow 0$ .

\*Έχουμε όμως:  $\sqrt[v]{v} = 1 + \delta_v \Rightarrow \sqrt[v]{v} = (1 + \delta_v)^2$ .

\*Αρα:  $\sqrt[v]{v} = (1 + \delta_v)^2 \rightarrow (1 + 0)^2 = 1$ .

\*Ωστε:  $\lim_{v \rightarrow \infty} \sqrt[v]{v} = 1$ .

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**\*Ομάδα Α'. 102.** Νά αποδείξετε ότι οι επόμενες ακολουθίες είναι μηδενικές:

$$1) \frac{v}{v^3 + v + 1}, \quad 2) \frac{(-1)^v}{(v+1)^2}, \quad 3) \frac{1 + \sqrt{v}}{v^3}, \quad 4) \sqrt{v^2 + 3} - \sqrt{v^2 + 1}.$$

**103.** Νά βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια των ακολουθιών με γενικό όρο:

$$1) \alpha_v = \frac{v^2 + 3}{2v^2 - 5v + 7}, \quad 2) \alpha_v = \sqrt{1 + \frac{4}{v}}, \quad 3) \alpha_v = \frac{v}{v^2 + 3},$$

$$4) \alpha_v = \left( 2 + \frac{1}{v} \right)^2, \quad 5) \alpha_v = \frac{2v^3 - 3v + 2}{5v^3 + 7}, \quad 6) \alpha_v = \sqrt[3]{\frac{8v^2 + 5}{64v^2 + v + 1}}.$$

**104.** Νά αποδείξετε ότι:

$$1) \lim_{v \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{9v^2}{v^2 + 3}} = 3, \quad 2) \lim_{v \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{v^2 + v - 1}{27v^2 - 4}} = \frac{1}{3}, \quad 3) \lim_{v \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{3v^2 + 2}{4v^2 + v + 1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**105.** Νά αποδείξετε ότι: αν η ακολουθία  $\alpha_v, v = 1, 2, \dots$  είναι φραγμένη, τότε και η ακολουθία  $\beta_v = \frac{1}{v} \cdot \alpha_v, \quad v = 1, 2, \dots$  είναι φραγμένη και ισχύει:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \beta_v = \lim_{v \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{v} \cdot \alpha_v \right) = 0.$$

**106.** Νά αποδείξετε ότι:  $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{v^4 - 4v^3 + v + 6}{2v^4 + 7v^2 + 2v - 1} = \frac{1}{2}$ .

**107.** Νά αποδείξετε ότι οι ακολουθίες με γενικούς όρους:

$$\alpha_v = \frac{2v^2 - 1}{3v^2 + 2}, \quad \beta_v = \frac{2v + 3}{3v - 2}, \quad \gamma_v = \sqrt{\frac{4v - 3}{9v + 5}},$$

έχουν τό ίδιο όριο, τό οποίο και θά βρείτε.

**108.** Νά βρείτε ποῦ μεταβάλλεται ὁ πραγματικός ἀριθμός  $x$ , αν:

$$\left| \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{v^2 + 3}{2v^2 - 1} + x \right| < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



109. \*Αν  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ , νά αποδείξετε ότι:

$$\lim(\sqrt[n]{(v+\alpha)(v+\beta)} - v) = \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

110. \*Αν  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq -1$  νά μελετήσετε ως προς τη σύγκλιση την ακολουθία  $\alpha_n = \frac{x^n - 1}{x^n + 1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  καί κατόπιν νά κάνετε τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως  $f$  με τύπο:

$$f(x) = \lim \alpha_n \equiv \lim \frac{x^n - 1}{x^n + 1}$$

\*Υπόδειξη. Νά διακρίνετε τρεις περιπτώσεις: (i)  $|x| < 1$ , (ii)  $x = 1$  καί (iii)  $|x| > 1$ .

24 \*Ομάδα Β. 111. Νά αποδείξετε ότι οι ακολουθίες, με τους επόμενους γενικούς όρους, είναι μηδενικές:

1)  $\frac{\eta \mu \nu + \sin^2 \nu}{\sqrt{\nu}}$ , 2)  $\nu^{3/2} \cdot (\sqrt{\nu^4 + 4} - \nu^2)$ , 3)  $\sqrt[3]{\nu + 1} - \sqrt[3]{\nu}$ , 4)  $\nu \cdot (\sqrt{\nu^4 + 4} - \nu^2)$ .

112. Νά υπολογίσετε τα όρια των ακολουθιών με τους επόμενους γενικούς όρους:

1)  $\alpha_n = \frac{1+2+\dots+n}{n^2}$ , 2)  $\beta_n = \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3}$ , 3)  $\gamma_n = \frac{1^3+2^3+\dots+n^3}{n^4}$ .

\*Υπόδειξη. \*Υπενθυμίζουμε τους τύπους:  $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ ,

$$1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad 1^3+2^3+\dots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

26 113. Νά υπολογίσετε τα όρια των ακολουθιών με τους επόμενους γενικούς όρους:

1)  $\alpha_n = \frac{2n^2+3n-1}{5n^3-n+7}$ , 2)  $\alpha_n = \frac{n^4+2}{n^2-4} - \frac{2n^5-3n^3}{2n^3+1}$ , 3)  $\alpha_n = \sqrt[n]{(n+2)(n+3)} - n$

4)  $\alpha_n = (\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}) \cdot \sqrt[n]{n + \frac{1}{2}}$ , 5)  $\alpha_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}$ .

\*Υπόδειξη. Στις 3, 4 καί 5 πολλαπλασιάζουμε καί διαιρούμε καθένα απ' αυτούς τους γενικούς όρους με κατάλληλη παράσταση.

24 114. Νά αποδείξετε ότι:

$$\lim \left[ \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right] = 1.$$

\*Υπόδειξη. Νά προσθέσετε κατά μέλη τις προφανείς ανισότητες:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

καί νά εφαρμόσετε την ιδιότητα VII, § 54.

28 115. Νά αποδείξετε ότι οι ακολουθίες, με τους επόμενους γενικούς όρους, είναι μηδενικές:

1)  $\alpha_n = \frac{2^n}{n!}$ , 2)  $\alpha_n = \frac{n!}{n^n}$ , 3)  $\alpha_n = \frac{2^n \cdot n!}{(3n)^n}$ ,

όπου τό σύμβολο  $n!$  ( $n$  παραγοντικό) παριστάνει τό γινόμενο:  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \equiv n!$

\*Υπόδειξη. Μπορείτε νά στηριχτείτε καί στή 2η εφαρμογή τής § 64.

116. \*Αν θεωρηθεί γνωστό ότι  $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ , νά υπολογίσετε τά όρια των ακολουθιών με τους επόμενους γενικούς όρους:

1)  $\alpha_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$ , 2)  $\alpha_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$ , 3)  $\alpha_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ , 4)  $\alpha_n = \left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^n$

117. Νά αποδείξετε ότι:  $\lim \sqrt[n]{n^2 + n} = 1$ .

\*Υπόδειξη. Βλ. § 64, 5η καί 6η εφαρμογή καί επιπλέον μπορεί νά χρησιμεύσει καί ή ιδιότητα VII τής § 54.

118. \*Αν γιά μία ακολουθία  $\alpha_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  ισχύει  $\lim \alpha_n = \alpha$ , τότε νά αποδείξετε ότι:

$$\lim \beta_n = \alpha, \quad \text{όπου} \quad \beta_n = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

\*Ισχύει τό αντίστροφο;

\*Υπόδειξη. \*Έχουμε  $\alpha_n \rightarrow \alpha \iff \forall \epsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\epsilon): |\alpha_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq n_0$ .

Κατόπιν νά σχηματίσετε τη διαφορά:  $\beta_n - \alpha$  καί νά αποδείξετε ότι τελικά ισχύει:

$$|\beta_n - \alpha| < \frac{A}{n} + \frac{n - n_0 + 1}{n} \cdot \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{όπου} \quad A \equiv |(\alpha_1 - \alpha) + (\alpha_2 - \alpha) + \dots + (\alpha_{n_0-1} - \alpha)|. \quad \text{*Αρα...}$$

Γιά νά εξετάσετε αν ισχύει τό αντίστροφο νά πάρετε ως  $\alpha_n = (-1)^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$

119. Νά αποδείξετε ότι: αν  $\lim(\alpha_n - \alpha_{n-1}) = \alpha$ , τότε  $\lim \frac{\alpha_n}{n} = \alpha$ .

\*Υπόδειξη. Νά εφαρμόσετε τό συμπέρασμα τής προηγούμενης άσκήσεως.

## V. MONOTONES KAI ΦΡΑΓΜΕΝΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

§ 65. Τό μονότονο καί ή σύγκλιση ακολουθίας.—Στήν άρχή αυτού του Κεφαλαίου (§ 42) όρίσαμε την έννοια τής μονότονης ακολουθίας. \*Επαναλαμβάνοντας με συντομία τά όσα αναπτύξαμε στήν § 42 γιά τίς μονότονες ακολουθίες έχουμε:

1.  $(\alpha_n) \uparrow$  (αύξουσα)  $\iff (\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n \leq \alpha_{n+1})$   
 $\iff (\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n \leq \alpha_{n+1} \leq \dots)$
2.  $(\alpha_n) \uparrow$  (γνησίως αύξουσα)  $\iff (\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n < \alpha_{n+1})$   
 $\iff (\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha_{n+1} < \dots)$
3.  $(\alpha_n) \downarrow$  (φθίνουσα)  $\iff (\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n \geq \alpha_{n+1})$   
 $\iff (\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n \geq \alpha_{n+1} \geq \dots)$
4.  $(\alpha_n) \downarrow$  (γνησίως φθίνουσα)  $\iff (\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n > \alpha_{n+1})$   
 $\iff (\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n > \alpha_{n+1} > \dots)$ .

\*Υπενθυμίζουμε (βλ. παρατήρηση 2 τής § 42) ότι γιά μία αύξουσα ή γνησίως αύξουσα ακολουθία οι εκφράσεις: «ή ακολουθία είναι φραγμένη» καί «ή ακολουθία είναι φραγμένη άνω» είναι ισοδύναμες· γιατί βέβαια, άφοῦ είναι αύξουσα ή γνησίως αύξουσα είναι κάτω φραγμένη. \*Ένα κάτω φράγμα της είναι ό πρώτος όρος της. \*Ανάλογα έχουμε ότι γιά μία φθίνουσα ή γνησίως φθίνουσα ακολουθία οι εκφράσεις: «ή ακολουθία είναι φραγμένη» καί «ή ακολουθία είναι φραγμένη κάτω» είναι ισοδύναμες.



\*Εστω τώρα ή ακολουθία  $\alpha_n = n^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , δηλαδή ή:  $1, 4, 9, \dots$ ,  $n^2, \dots$ . Επίσης έστω ή ακολουθία  $\beta_n = \frac{n}{n+1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , δηλαδή ή:  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$ . Παρατηρούμε ότι και οί δύο είναι αύξουσες και μάλιστα γνησίως αύξουσες ακολουθίες. 'Απ' αυτές ή πρώτη δέν είναι φραγμένη ούτε και συγκλίνει σέ πραγματικό αριθμό (βλ. παρατήρ. τής § 51). 'Αντίθετα ή δεύτερη είναι φραγμένη, αφού  $|\beta_n| = \left| \frac{n}{n+1} \right| = \frac{n}{n+1} \leq 1$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . 'Ακόμη παρατηρούμε ότι ή ακολουθία  $\beta_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  συγκλίνει και μάλιστα είναι  $\lim \beta_n = \lim \frac{n}{n+1} = 1$ .

Τό γεγονός ότι ή αύξουσα και φραγμένη ακολουθία  $\beta_n = \frac{n}{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  συγκλίνει σέ πραγματικό αριθμό τό δεχόμαστε ότι ισχύει γενικότερα για κάθε αύξουσα και φραγμένη ακολουθία.

'Ακριβέστερα δεχόμαστε τό ακόλουθο αξίωμα:

**§ 56. 'Αξίωμα.**—Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών συγκλίνει σέ κάποιο πραγματικό αριθμό.

**Σημείωση.** Τό παραπάνω αξίωμα τό συναντάμε στά 'Ανώτερα Μαθηματικά ως θεώρημα. 'Η απόδειξή του όμως εκεί στηρίζεται σέ κάποιο άλλο αξίωμα.

**Σχόλια:** α). Τό παραπάνω αξίωμα, αν και αφορά μόνο τίς μονότονες ακολουθίες, δίνει μία **ικανή** συνθήκη «υπόρξεως» όρίου ακολουθίας. Φυσικά, πληροφορίες για τή σύγκλιση ακολουθίας και για τό όριό της, αν υπάρχει, μās δίνουν πολλές από τίς προτάσεις πού αποδείξαμε στίς προηγούμενες παραγράφους και κυρίως οί προτάσεις πού αναφέρονται στήν ένότητα: "Αλγεβρα των ορίων". Παρατηρούμε ότι τό αξίωμα αυτό εξασφαλίζει τήν ύπαρξη στό  $\mathbb{R}$  του όριου μιάς ακολουθίας μέ όρισμένες υποθέσεις, αλλά δέ μās δίνει καμιά ένδειξη για τό πώς βρίσκουμε τό όριο· όπωσδήποτε όμως είναι σημαντικό νά ξέρουμε ότι μία ακολουθία συγκλίνει στό  $\mathbb{R}$ , γιατί τότε δέν αποκλείεται ή «υπαρξη» τής όριακής της τιμής νά όδηγήσει και στήν «εύρεσή» της. Αυτό φαίνεται καλύτερα στίς εφαρμογές πού διαπραγματευόμαστε στήν επόμενη παράγραφο.

β). Έχοντας υπόψη τό παραπάνω αξίωμα και τίς προτάσεις πού αποδείξαμε στίς προηγούμενες παραγράφους, συμπεραίνουμε άμέσως ότι:

'Αν  $M = \{(a_n): (a_n) \text{ μονότονη ακολουθία}\}$ ,  $\Phi = \{(a_n): (a_n) \text{ φραγμένη ακολουθία}\}$   
 $\Sigma = \{(a_n): (a_n) \text{ συγκλίνουσα ακολουθία}\}$  και  $\Sigma_0 = \{(a_n): (a_n) \text{ μηδενική ακολουθία}\}$ ,  
 τότε ισχύουν οί έξής σχέσεις έγκλεισμού:

$$\text{i) } \Sigma_0 \subset \Sigma \subset \Phi, \quad \text{ii) } M \cap \Phi \subset \Sigma.$$

• 'Άμεσες τώρα συνέπειες του παραπάνω αξιώματος και των πορισμάτων 1 και 2 τής § 55 είναι οί επόμενες δύο προτάσεις:

α). 'Αν μία ακολουθία  $a_n$ ,  $n=1, 2, \dots$  είναι αύξουσα και έχει ως ένα άνω φράγμα τον αριθμό  $s$ , τότε είναι συγκλίνουσα και ισχύει:  $\lim a_n \leq s$ .



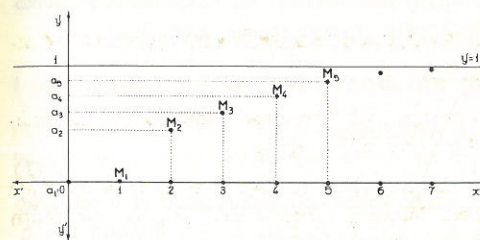
β). 'Αν μια ακολουθία  $a_n$ ,  $n=1, 2, \dots$  είναι φθίνουσα και έχει ως ένα κάτω φράγμα τον αριθμό  $\sigma$ , τότε είναι συγκλίνουσα και ισχύει:  $\sigma \leq \lim a_n$ .

Δηλαδή:

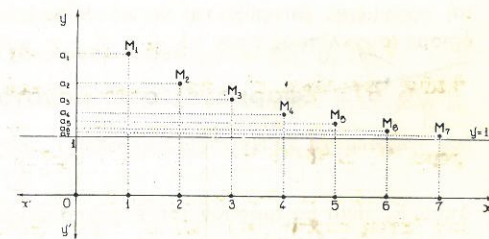
$$\left. \begin{matrix} (a_n) \uparrow \\ a_n < s \end{matrix} \right\} \Rightarrow a_n \rightarrow \alpha \leq s$$

$$\left. \begin{matrix} (a_n) \downarrow \\ a_n > \sigma \end{matrix} \right\} \Rightarrow a_n \rightarrow \alpha \geq \sigma$$

\*Έτσι, π.χ., ή ακολουθία  $a_n = \frac{n-1}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  ή όποία, όπως εύκολα διαπιστώνουμε, είναι αύξουσα και έχει ως ένα άνω φράγμα τον αριθμό 1 (γιατί:  $a_n = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ) συγκλίνει σ'έναν αριθμό πού είναι μικρότερος ή ίσος μέ τό 1. Στο παρακάτω σχήμα δίνουμε τούς πέντε πρώτους όρους τής ακολουθίας  $a_n = \frac{n-1}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .



Σχ. 6



Σχ. 7

'Επίσης ή ακολουθία:  $1 + \frac{1}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  ή όποία είναι φθίνουσα και φραγμένη μέ ένα κάτω φράγμα τον αριθμό 1 (γιατί:  $1 < 1 + \frac{1}{n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ) συγκλίνει σ'έναν αριθμό πού είναι μεγαλύτερος ή ίσος μέ τό 1. Στο σχήμα 7 δίνουμε τούς έφτά πρώτους όρους τής ακολουθίας  $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

**Σημαντική παρατήρηση.** Ξέρουμε (βλ. παρατήρηση τής § 51) ότι μία ακολουθία  $a_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  πού δέν είναι φραγμένη, δέ συγκλίνει σέ πραγματικό αριθμό, γιατί άλλιώς, δηλαδή αν αυτή συνέκλινε σέ πραγματικό αριθμό, τότε, σύμφωνα μέ τήν ιδιότητα IV των συγκλινουσών ακολουθιών, θά ήταν φραγμένη, πράγμα πού είναι άτοπο. Στήν περίπτωση, όπου ή μη φραγμένη ακολουθία  $a_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  είναι και αύξουσα, όπως π.χ. ή  $n^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$  λέμε ότι αυτή «άπειρίζεται θετικά» ή άλλιώς «συγκλίνει στό  $+\infty$ » ή άκόμη «τείνει στό  $+\infty$ » (τό σύμβολο  $+\infty$  τό διαβάζουμε «σύν άπειρο»). Γράφουμε συμ-



βολικά:  $\lim a_n = +\infty$  ή πιο απλά  $a_n \rightarrow +\infty$  και διαβάζουμε: όριο  $a_n$  ίσο με  $+\infty$  ή  $a_n$  τείνει στο  $+\infty$ .

Στήν περίπτωση, όπου η μη φραγμένη ακολουθία  $a_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  είναι και φθίνουσα, όπως π.χ. η ακολουθία:  $-n^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$  λέμε ότι αυτή «*απειρίζεται αρνητικά*» ή αλλιώς «*συγκλίνει στο  $-\infty$* » ή ακόμη «*τείνει στο  $-\infty$* » και γράφουμε συμβολικά:  $\lim a_n = -\infty$  ή πιο απλά  $a_n \rightarrow -\infty$  (τό σύμβολο  $-\infty$  τό διαβάζουμε «*πλήν άπειρο*»).

Άξίζει να παρατηρήσουμε εδώ ότι η αντίθετη ακολουθία της  $a_n = -n^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$  δηλαδή η:  $-(-n^2) = n^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$  απειρίζεται θετικά. Αυτό όμως ισχύει για κάθε ακολουθία που απειρίζεται θετικά ή αρνητικά. Ακριβέστερα ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim a_n = -\infty \iff \lim (-a_n) = +\infty$$

**Σημείωση.** Όταν μία ακολουθία απειρίζεται θετικά ή αρνητικά δέ λέγεται συγκλίνουσα. Προσέξτε! μόνο όταν τό όριο της είναι αριθμός πραγματικός, τότε η ακολουθία λέγεται συγκλίνουσα.

Στήν άλλη τάξη θά μάθουμε πώς και άλλες ακολουθίες, εκτός από τις μονότονες και μη φραγμένες, απειρίζονται θετικά αντίστοιχως αρνητικά και εκεί θά δώσουμε ένα γενικό όρισμό συγκλίσεως προς τό  $+\infty$  ή  $-\infty$  μίς ακολουθίας πραγματικών αριθμών.

### § 67. Εφαρμογές στις μονότονες και φραγμένες ακολουθίες.

**Εφαρμογή 1η:** (Εμβαδόν κύκλου). Έστω η ακολουθία:

$$E_3, E_4, E_5, \dots, E_n, \dots \quad (1)$$

όπου  $E_n$  είναι τό εμβαδόν του έγγεγραμμένου σέ κύκλο κανονικού πολυγώνου με  $n$  πλευρές.

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι:  $E_3 < E_4 < E_5 < \dots < E_n < E_{n+1} < \dots$ , δηλαδή ότι η ακολουθία  $E_n$ ,  $n = 3, 4, \dots$  είναι αύξουσα (και μάλιστα γνησίως).

Εξάλλου η ακολουθία αυτή είναι και προς τά άνω φραγμένη. Ένα άνω φράγμα της είναι ο αριθμός που παριστάνει τό εμβαδόν ενός οποιουδήποτε περιγεγραμμένου στόν κύκλο κυρτού πολυγώνου. Η ακολουθία λοιπόν  $E_n$ ,  $n = 3, 4, \dots$  είναι (γνησίως) αύξουσα και φραγμένη, επομένως (§ 66) η ακολουθία (1) συγκλίνει σ' έναν πραγματικό αριθμό. Όπως είναι γνωστό από τή Γεωμετρία αυτόν τόν πραγματικό αριθμό —δηλαδή τό όριο της ακολουθίας  $E_n$ ,  $n = 3, 4, \dots$  — τό λέμε εμβαδόν του κύκλου.

**Εφαρμογή 2η:** Έστω η ακολουθία  $a_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  για τήν οποία έχουμε:

$$a_1 = \sqrt{2} \text{ και } a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Νά αποδείξετε ότι η  $(a_n)$  είναι μονότονη και φραγμένη και ότι  $\lim a_n = 2$ .

**Απόδειξη.** Πρώτα-πρώτα γεννάται τό έρώτημα, αν η ακολουθία που μάς δόθηκε όρίστηκε καλά, δηλαδή αν για κάθε φυσικό αριθμό  $n$  είναι  $2 + a_n \geq 0$ . Αυτό όμως συμβαίνει, γιατί, όπως πολύ εύκολα προκύπτει με τέλεια επαγωγή, ισχύει:  $a_n > 0$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Πράγματι:  $a_1 = \sqrt{2} > 0$  και αν για κάποιο φυσικό αριθμό  $n$  είναι  $a_n > 0$ , τότε και  $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} > \sqrt{2} > 0$ .

Εξετάζουμε τώρα τήν  $(a_n)$  ως προς τό μονότονο. Παρατηρούμε ότι:  $a_1 < a_2$ . Άρα, αν η ακολουθία  $(a_n)$  είναι μονότονη, θά πρέπει να είναι γνησίως αύξουσα. Έστω λοιπόν ότι:  $a_k < a_{k+1}$ , τότε  $2 + a_k < 2 + a_{k+1}$ , όποτε  $\sqrt{2+a_k} < \sqrt{2+a_{k+1}}$ , δηλαδή  $a_{k+1} < a_{k+2}$ .

Άρα, σύμφωνα με τό θεώρημα της τέλεις επαγωγής, θά έχουμε:  $a_n < a_{n+1}$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , δηλαδή η ακολουθία  $(a_n)$  είναι αύξουσα και μάλιστα γνησίως.

Θά δείξουμε τώρα ότι η  $(a_n)$  είναι φραγμένη. Άρκεί βεβαίως να δείξουμε ότι η ακολουθία  $(a_n)$  είναι φραγμένη άνω, μιά και όπως δείξαμε παραπάνω η  $(a_n)$  είναι γνησίως αύξουσα. Για να προσδιορίσουμε ένα άνω φράγμα της ακολουθίας  $(a_n)$  κάνουμε τήν εξής σκέψη: Δέν ξέρουμε από τήν άρχή αν η  $(a_n)$  είναι συγκλίνουσα, αν όμως είναι και καλέσουμε α τό όριο της, τότε από τήν ισότητα  $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ , με εφαρμογή τών ιδιοτήτων τών όρίων, παίρνουμε:  $\lim a_{n+1} = \lim \sqrt{2+a_n} = \sqrt{2+\lim a_n}$ . Άλλά  $\lim a_{n+1} = \lim a_n = \alpha$  (§ 50). Άρα:  $\alpha = \sqrt{2+\alpha}$  και συνεπώς  $\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$  ή  $(\alpha - 2)(\alpha + 1) = 0$ . Έπειδή όμως όλα τά  $a_n > 0$ , αποκλείεται να είναι άρνητικό τό α. Άρα  $\alpha = 2$ . Τότε όμως τό 2, όπως και κάθε αριθμός μεγαλύτερός του, θά είναι ένα πιθανό άνω φράγμα της ακολουθίας  $(a_n)$ . Ελέγχουμε τώρα αν ισχύει  $a_n < 2$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Αυτό όμως συμβαίνει, γιατί, όπως πολύ εύκολα προκύπτει με τέλεια επαγωγή, έχουμε:  $a_1 = \sqrt{2} < 2$  και αν για κάποιο φυσικό αριθμό  $n$  είναι  $a_n < 2$ , τότε και  $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} < \sqrt{4} = 2$ .

Η ακολουθία λοιπόν  $(a_n)$  είναι (γνησίως) αύξουσα και άνω φραγμένη. Άρα είναι συγκλίνουσα και όπως είδαμε παραπάνω είναι:  $\lim a_n = 2$ .

**Εφαρμογή 3η:** Έστω η ακολουθία  $a_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  με  $a_1 = 0$  και

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + 4}{3} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Νά αποδείξετε ότι η ακολουθία  $(a_n)$  είναι συγκλίνουσα και να βρείτε τό όριο της.

**Απόδειξη.** Εξετάζουμε μήπως η  $(a_n)$  είναι μονότονη. Παρατηρούμε ότι:  $a_1 < a_2$  (γιατί:  $a_1 = 0 < \frac{2a_1 + 4}{3} = \frac{4}{3} = a_2$ ). Άρα, αν η  $(a_n)$  είναι μονότονη, θά πρέπει να είναι γνησίως αύξουσα. Έστω λοιπόν ότι:  $a_k < a_{k+1}$ , δηλαδή  $a_{k+1} - a_k > 0$ , τότε είναι και  $a_{k+1} < a_{k+2}$ , γιατί αν σχηματίσουμε τή διαφορά  $a_{k+2} - a_{k+1}$  έχουμε:

$$a_{k+2} - a_{k+1} = \frac{2a_{k+1} + 4}{3} - \frac{2a_k + 4}{3} = \frac{2(a_{k+1} - a_k)}{3} > 0.$$

Άρα  $a_n < a_{n+1}$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , δηλαδή η ακολουθία  $(a_n)$  είναι αύξουσα και μάλιστα γνησίως.

Θά δείξουμε τώρα ότι η  $(a_n)$  είναι άνω φραγμένη. Ένα πιθανό άνω φράγμα της  $(a_n)$  είναι κάθε αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος με τό 4 (τό 4 είναι ρίζα της εξίσωσης:  $x = \frac{2x+4}{3}$ , στήν οποία καταλήξαμε κάνοντας συλλογισμό ανάλογο με αυτόν που κάναμε στήν προηγούμενη εφαρμογή), π.χ. ο 5. Ελέγχουμε τώρα αν ισχύει:  $|a_n| < 5$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Αυτό όμως συμβαίνει, γιατί, όπως πολύ εύκολα προκύπτει με τέλεια επαγωγή, έχουμε:  $|a_1| = 0 < 5$  και αν για κάποιο φυσικό αριθμό  $n$  είναι  $|a_n| < 5$ , τότε:

$$|a_{n+1}| = \left| \frac{2a_n + 4}{3} \right| \leq \frac{2|a_n| + 4}{3} < \frac{2 \cdot 5 + 4}{3} = \frac{14}{3} < 5.$$

Η ακολουθία λοιπόν  $(a_n)$  είναι (γνησίως) αύξουσα και άνω φραγμένη. Άρα, σύμφωνα με τό άξίωμα της § 66, η ακολουθία  $(a_n)$  συγκλίνει σέ έναν πραγματικό αριθμό, έστω α. Θά ισχύει επομένως  $a_n \rightarrow \alpha$  και  $a_{n+1} \rightarrow \alpha$ . Τότε από τήν ισότητα  $a_{n+1} = \frac{2a_n + 4}{3}$  προκύπτει, αν μεταβούμε στο όριο,  $\alpha = \frac{2\alpha + 4}{3}$  ή  $3\alpha = 2\alpha + 4$ , δηλαδή  $\alpha = 4$ .

Άρα:  $\lim a_n = 4$ .

**Παρατήρηση.** Σ' αυτή τήν εφαρμογή μπορούμε να εργαστούμε και ως εξής: Δέν ξέρουμε αν η  $(a_n)$  συγκλίνει σέ πραγματικό αριθμό, αν όμως αυτό συμβαίνει και καλέσουμε α



$$\lambda = \frac{1}{2} \left( \lambda + \frac{\lambda}{\lambda} \right)$$

τό όριο της, τότε από την ισότητα:  $\alpha_{n+1} = \frac{2\alpha_n + 4}{3}$  προκύπτει, αν μεταβούμε στο όριο,  $\alpha = \frac{2\alpha + 4}{3}$ , δηλαδή  $\alpha = 4$ .

Σχηματίζουμε τώρα τη διαφορά:

$$\alpha_{n+1} - 4 = \frac{2\alpha_n + 4}{3} - 4 = \frac{2\alpha_n - 8}{3} = \frac{2}{3} (\alpha_n - 4) \quad (1)$$

\*Αν στην (1) θέσουμε  $n = 1, 2, \dots, n$  και πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη τις ισότητες που θα προκύψουν, βρίσκουμε, ύστερα από τις σχετικές απλοποιήσεις, ότι:

$$\alpha_{n+1} - 4 = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot (\alpha_1 - 4) = -4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

\*Αλλά  $\left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0$  (βλ. § 64, 1η εφαρμογή). \*Αρα  $\alpha_{n+1} \rightarrow 4$  και συνεπώς  $\alpha_n \rightarrow 4$ .

**Σημείωση.** \*Από τη σχέση:  $\alpha_{n+1} - 4 = -4 \left(\frac{2}{3}\right)^n$  λαμβάνουμε:

$$\alpha_{n+1} = 4 - 4 \left(\frac{2}{3}\right)^n = 4 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] \text{ και συνεπώς } \alpha_n = 4 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right] \text{ για } n = 2, 3, \dots$$

(ισχύει και για  $n = 1$ ). Παρατηρούμε ότι στην τελευταία σχέση έχουμε την έκφραση του γενικού όρου της ακολουθίας που μας δόθηκε συναρτήσει του  $n$ .

**\*Εφαρμογή 4η:** Νά μελετήσετε ως προς το μονότονο και τη σύγκλιση την ακολουθία  $(\alpha_n)$  για την οποία είναι:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \left( \theta + \frac{3}{\theta} \right), \text{ όπου } \theta > 0, \text{ και}$$

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{2} \left( \alpha_n + \frac{3}{\alpha_n} \right) \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Στή συνέχεια νά βρείτε, αν υπάρχει, το όριό της.

**Λύση:** Πρώτα-πρώτα πρέπει νά βεβαιωθούμε ότι για όλους τους φυσικούς αριθμούς  $n$  είναι  $\alpha_n \neq 0$ . Πράγματι, αυτό συμβαίνει γιατί, όπως πολύ εύκολα προκύπτει με τέλεια επαγωγή είναι:  $\alpha_n > 0$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

\*Εξάλλου, σύμφωνα με τη γνωστή ανισότητα:  $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ , όπου  $x, y > 0$ , έχουμε:

$$\alpha_n = \frac{1}{2} \left( \alpha_{n-1} + \frac{3}{\alpha_{n-1}} \right) \geq \sqrt{\alpha_{n-1} \frac{3}{\alpha_{n-1}}} = \sqrt{3}, \text{ δηλαδή } \alpha_n \geq \sqrt{3}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

\*Εξετάζουμε τώρα μήπως η ακολουθία  $(\alpha_n)$  είναι μονότονη. \*Έχουμε για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{1}{2} \left( \alpha_n + \frac{3}{\alpha_n} \right) - \alpha_n = \frac{3 - \alpha_n^2}{2\alpha_n} \leq 0 \text{ (γιατί: } \alpha_n^2 \geq 3 \iff 3 - \alpha_n^2 \leq 0 \text{)}.$$

\*Αρα:  $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , δηλαδή η ακολουθία  $(\alpha_n)$  είναι φθίνουσα και επειδή  $\alpha_n \geq \sqrt{3}$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , η ακολουθία  $(\alpha_n)$  φράσσεται κάτω και το  $\sqrt{3}$  είναι ένα κάτω φράγμα της.

\*Ωστε η ακολουθία  $(\alpha_n)$  είναι φθίνουσα και φραγμένη κάτω. \*Αρα είναι συγκλίνουσα. \*Εστω  $x$  το όριό της. Τότε  $\alpha_n \rightarrow x$  και  $\alpha_{n+1} \rightarrow x$  (βλ. § 50, ιδ. III). Θά είναι  $x \neq 0$ , γιατί όλα τα  $\alpha_n$  είναι  $\geq \sqrt{3}$ , επομένως  $x \geq \sqrt{3} > 0$ . Τότε από την ισότητα:

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{2} \left( \alpha_n + \frac{3}{\alpha_n} \right) \text{ συνάγεται ότι:}$$

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{n+1} = \frac{1}{2} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n + \frac{3}{\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n} \right) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{3}{x} \right)$$

δηλαδή:  $x^2 = 3$ . \*Επειδή όμως όλα τα  $\alpha_n > 0$ , αποκλείεται νά είναι αρνητικό το όριο. \*Αρα  $x = \sqrt{3}$ . Συνεπώς:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \sqrt{3}$ .

**\*Εφαρμογή 5η:** Νά αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$  ισχύει:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0, & \text{αν } |x| < 1 \\ +\infty, & \text{αν } x > 1 \\ 1, & \text{αν } x = 1 \\ \text{δεν υπάρχει,} & \text{αν } x \leq -1. \end{cases}$$

**\*Απόδειξη. α).** \*Αν  $|x| < 1$ , τότε  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$  (βλ. § 64, εφαρμογή 1η). \*Εδω μπορούμε νά εργαστούμε και ως εξής: \*Επειδή  $|x| < 1$  έχουμε:  $|x|^{n+1} = |x| \cdot |x|^n \leq |x|^n$ , δηλ. η ακολουθία  $(|x|^n)$  είναι φθίνουσα και προφανώς φραγμένη. \*Αρα είναι συγκλίνουσα. \*Εστω  $\alpha$  το όριό της. Τότε έχουμε:  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x|^{n+1} = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} |x|^n$ , δηλ.  $\alpha = |x| \cdot \alpha$  ή  $\alpha(1 - |x|) = 0$  και επειδή  $1 - |x| \neq 0$  είναι:  $\alpha = 0$ .

\*Ωστε:  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x|^n = 0$ , οπότε και  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$  (βλ. § 62, παρατήρηση 2).

**β).** \*Αν  $x > 1$ , τότε  $x^{n+1} > x^n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , δηλαδή η ακολουθία  $(x^n)$  είναι γνησίως αύξουσα. \*Εάν ήταν και φραγμένη, τότε θά υπήρχε το  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n$ , έστω  $\alpha$  ( $\alpha \geq 1$ ). Τότε όμως θά είχαμε:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1} = x \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x^n$ , δηλ.  $\alpha = x \cdot \alpha$  ή  $\alpha(1 - x) = 0$ , οπότε  $\alpha = 0$  (γιατί:  $x > 1$ ). Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί  $\alpha \geq 1$ . \*Αρα η ακολουθία  $(x^n)$  είναι (γνησίως) αύξουσα και μη φραγμένη, οπότε, σύμφωνα με την παρατήρηση της προηγούμενης παραγράφου, ισχύει:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = +\infty$ .

**γ).** \*Αν  $x = 1$ , τότε  $x^n = 1 \rightarrow 1$ .

**δ).** Για  $x = -1$ , έχουμε την ακολουθία:  $x^n = (-1)^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , ή οποία, όπως ξέρουμε (βλ. παραδ. 5, σελ. 67) δέ συγκλίνει.

**ε).** \*Αν  $x < -1$  πάλι η ακολουθία  $x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  δέ συγκλίνει. Πράγματι, αφού  $x < -1$  έχουμε  $|x| > 1$  και  $x = -|x|$ . Θέτουμε  $\alpha_n = x^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , τότε έχουμε:

$\alpha_n = x^n = (-1)^n \cdot |x|^n$ . \*Επειδή  $|x| > 1$ , σύμφωνα με την περίπτωση (β), ισχύει:  $|x|^n \rightarrow +\infty$  και συνεπώς:  $|x|^{2n} \rightarrow +\infty$  και  $|x|^{2n-1} \rightarrow +\infty$ . Παρατηρούμε τώρα ότι:

$$\alpha_{2n} = (-1)^{2n} \cdot |x|^{2n} = |x|^{2n} \rightarrow +\infty \text{ και } \alpha_{2n-1} = (-1)^{2n-1} \cdot |x|^{2n-1} = -|x|^{2n-1} \rightarrow -\infty.$$

Συνεπώς η ακολουθία  $\alpha_n = x^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  δέ συγκλίνει.

\*Ωστε: αν  $x \leq -1$ , τότε το  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n$  δέν υπάρχει.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**\*Ομάδα Α'. 120.** \*Εστω η ακολουθία  $\alpha_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  με:

$$\alpha_1 = 1 \text{ και } \alpha_{n+1} = \sqrt{1 + \alpha_n} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Νά αποδείξετε ότι η  $(\alpha_n)$  είναι γνησίως αύξουσα, φραγμένη και ότι:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

**121.** Νά μελετήσετε ως προς το μονότονο και τη σύγκλιση την ακολουθία  $(\alpha_n)$  για την οποία είναι:  $\alpha_1 = 1$  και  $\alpha_{n+1} = \sqrt{2\alpha_n}$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Στή συνέχεια νά βρείτε, αν υπάρχει, το όριό της.

**\*Υπόδειξη.** \*Όμοια εργασία μ' αυτή που ακολουθήσαμε στην εφαρμογή 2 της § 67.

**122.** Νά μελετήσετε ως προς το μονότονο και τη σύγκλιση την ακολουθία  $(\alpha_n)$  για την οποία είναι:  $\alpha_1 = 5$  και  $\alpha_{n+1} = \sqrt{4\alpha_n + 3}$ . \*Υστερα νά βρείτε, αν υπάρχει, το όριό της.

**\*Υπόδειξη.** \*Εργαζόμαστε όπως στην προηγούμενη άσκηση. \*Ίσως παρουσιαστεί ή ανάγκη νά διαπιστώσουμε ότι:  $\alpha_n > \sqrt{3}$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

**123.** \*Εστω η ακολουθία  $\alpha_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  με  $\alpha_1 = 0$  και

$$\alpha_{n+1} = \frac{3\alpha_n + 1}{4} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}$$



Νά αποδείξετε ότι η ακολουθία  $(\alpha_n)$  είναι συγκλίνουσα και νά βρείτε τό όριο της. Στή συνέχεια νά εκφράσετε τό νιοστό όρο της  $\alpha_n$  συναρτήσει του  $n$ .

**Υπόδειξη.** Όμοια εργασία μ' αὐτή πού ἀκολουθήσαμε στήν εφαρμογή 3 τῆς § 67.

**Ομάδα Β'. 124.** Έστω ἡ ἀκολουθία  $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$  μέ  $\alpha_1 = \theta > 0$  καί

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{2} \left( \alpha_n + \frac{\lambda^2}{\alpha_n} \right), \forall n \in \mathbb{N}, \text{ ὅπου } 0 < \lambda < \theta.$$

Νά αποδείξετε ότι ἡ ἀκολουθία  $(\alpha_n)$  εἶναι συγκλίνουσα καί νά βρείτε τό όριο της.

**Υπόδειξη.** Όμοια εργασία μ' αὐτή πού ἀκολουθήσαμε στήν εφαρμογή 4 τῆς § 67.

**125.** Νά μελετήσετε ὡς πρός τό μονότονο καί τή σύγκλιση τήν ἀκολουθία  $(\alpha_n)$  γιά τήν ὁποία εἶναι:  $\alpha_1 = -3$  καί  $\alpha_{n+1} = \frac{3\alpha_n - 4}{5}$  γιά κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Στή συνέχεια νά βρείτε, ἂν ὑπάρχει, τό όριο της.

**Υπόδειξη.** Αφοῦ πρώτα δείξετε ότι ἡ  $(\alpha_n)$  εἶναι αὐξουσα, ὕστερα νά βρείτε τό όριο πού θά ἔχει, ἂν συμβαίνει νά εἶναι συγκλίνουσα καί στή συνέχεια νά αποδείξετε ότι ὁ ἀριθμός πού βρέθηκε σάν πιθανό όριο της εἶναι ἄνω φράγμα της. Ἄρα ... κτλ.

**126.** Έστω ἡ ἀκολουθία  $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$  μέ γενικό όρο:

$$\alpha_n = \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

Νά αποδείξετε ότι ἡ  $(\alpha_n)$  εἶναι γνησίως αὐξουσα, φραγμένη καί ότι:  $\lim \alpha_n = \frac{1}{2}$ .

**Υπόδειξη.** Πρώτα ἀπ' ὅλα νά αποδείξετε ότι:  $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}$ .

**127.** Νά αποδείξετε ότι ἡ ἀκολουθία  $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$  γιά τήν ὁποία εἶναι:

$$\alpha_{n+1} = \alpha + \alpha_n^2 \text{ καί } \alpha_1 = \alpha, \text{ ὅπου } 0 < \alpha \leq \frac{1}{4},$$

εἶναι γνησίως αὐξουσα καί ότι συγκλίνει στή μικρότερη ρίζα τῆς ἐξίσωσης:  $t^2 - t + \alpha = 0$ .

**Υπόδειξη.** Εργαζόμαστε ὅπως καί στήν ἀσκηση 125 μόνο πού γιά νά αποδείξουμε ότι ἡ  $(\alpha_n)$  εἶναι ἄνω φραγμένη, θά παρουσιαστεῖ ἴσως ἡ ἀνάγκη νά διαπιστώσουμε, μέ ἐπαγωγή, ότι ὅλα τά  $\alpha_n$  εἶναι  $\leq \frac{1}{2}$ .

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

### ΕΙΔΙΚΕΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

(ΠΡΟΟΔΟΙ - ΣΕΙΡΕΣ)

**§ 68. Εισαγωγή.**— Στό προηγούμενο κεφάλαιο όρίσαμε τήν ἔννοια τῆς ἀκολουθίας καί ἀποδείξαμε τίς κυριότερες ιδιότητες τῶν ἀκολουθιῶν. Σ' αὐτό τό κεφάλαιο θά μελετήσουμε τέσσερις εἰδικές κατηγορίες ἀκολουθιῶν πού παρουσιάζουν ιδιαίτερο ἐνδιαφέρον στά Μαθηματικά. Σέ καθεμιά ἀπό τίς κατηγορίες αὐτές ἀνήκουν ἀκολουθίες πού δύο διαδοχικοί τους ὅροι συνδέονται μεταξύ τους μέ μία ἀναδρομική σχέση, ἡ ὁποία περιγράφει τή χαρακτηριστική ιδιότητα πού ἔχουν οἱ ὅροι τους. Ἀνάλογα μέ τή χαρακτηριστική αὐτή ιδιότητα διακρίνουμε τίς ἀκολουθίες πού ἀνήκουν στίς κατηγορίες αὐτές σέ: *ἀριθμητικές, ἁρμονικές, γεωμετρικές, προόδους καί στίς σειρές*.

#### I. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΠΡΟΟΔΟΙ

**§ 69. Ὁρισμοί.**— Ἀς θεωρήσουμε τήν ἀκολουθία:

$$3, 7, 11, 15, 19, \dots$$

Παρατηροῦμε ότι κάθε ὅρος της, ἀπό τό δεύτερο καί μετά, προκύπτει ἂν προσθέσουμε στόν προηγούμενό του ἕνα σταθερό ἀριθμό, πού στήν προκειμένη περίπτωση εἶναι ὁ ἀριθμός 4.

Ἐπίσης, ἂν θεωρήσουμε τήν ἀκολουθία:

$$10, 7, 4, 1, -2, -5, \dots$$

παρατηροῦμε πάλι πὼς κάθε ὅρος της —ἐκτός φυσικά ἀπό τόν πρώτο— προκύπτει ἂν προσθέσουμε στόν προηγούμενό του τόν ἀριθμό: -3.

Βλέπουμε λοιπόν πὼς ὑπάρχουν ἀκολουθίες μέ τήν ιδιότητα: Κάθε ὅρος τους, ἀπό τό δεύτερο καί μετά, προκύπτει ἂν προσθέσουμε στόν προηγούμενό του ἕνα σταθερό ἀριθμό πού τόν λέμε *λόγο* καί τόν συμβολίζουμε συνήθως μέ τό γράμμα  $\omega$ . Τίς ἀκολουθίες μέ αὐτή τήν ιδιότητα τίς ὀνομάζουμε *ἀριθμητικές προόδους*. Πιο γενικά μποροῦμε νά ποῦμε τώρα ότι: *Μία ἀκολουθία:*

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \dots \quad (1)$$

θά λέμε ότι εἶναι *μία ἀριθμητική πρόοδος*, τότε καί μόνο τότε, ἂν ὑπάρχει ἀριθμός  $\omega$  τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \omega, \text{ γιά κάθε } n = 1, 2, \dots \quad (2)$$



Οι όροι της ακολουθίας (1) λέγονται *διαδοχικοί όροι* της αριθμητικής προόδου και ο  $a_n$  λέγεται *νιοστός όρος* ή *όρος ν-τάξεως* της προόδου.

Μία αριθμητική πρόοδος λέγεται επίσης και **πρόοδος κατά διαφορά**, γιατί από τη (2) έχουμε:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = a_{n+1} - a_n = \dots = \omega \text{ (σταθερό)} \quad (3)$$

Η (3) μάς οδηγεί να δώσουμε για την αριθμητική πρόοδο και τον εξής ισοδύναμο όρισμό:

**Αριθμητική πρόοδος (ή πρόοδος κατά διαφορά)** είναι μία ακολουθία αριθμών, που δύο οποιοδήποτε διαδοχικοί της όροι διαφέρουν κατά τον ίδιο αριθμό  $\omega$ , ο οποίος λέγεται *λόγος της αριθμ. προόδου*.

Από τον παραπάνω όρισμό συμπεραίνουμε τώρα τα εξής:

α). Αν  $\omega > 0$ , τότε  $a_{n+1} - a_n > 0$ , δηλ.  $a_{n+1} > a_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Συνεπώς, αν  $\omega > 0$  ή αριθμ. πρόοδος (1) είναι **γνησίως αύξουσα** (ήρα και **αύξουσα**).

β). Αν  $\omega < 0$ , τότε  $a_{n+1} - a_n < 0$ , δηλ.  $a_{n+1} < a_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  και συνεπώς ή (1) είναι **γνησίως φθίνουσα** (ήρα και **φθίνουσα**).

γ). Αν  $\omega = 0$ , τότε  $a_{n+1} = a_n$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , δηλαδή ή αριθμητική πρόοδος είναι μία σταθερή ακολουθία και συνεπώς ή (1) είναι τότε **συγχρόνως και αύξουσα και φθίνουσα**.

Έτσι, π.χ., ή πρόοδος: 3, 7, 11, 15, 19, ... είναι γνησίως αύξουσα, επειδή  $\omega = 4 > 0$ , ενώ ή πρόοδος: 10, 7, 4, 1, -2, -5, ... είναι γνησίως φθίνουσα, γιατί έδω είναι:  $\omega = -3 < 0$ .

#### ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ

§ 70. **Ιδιότητα I.**—Ο νιοστός όρος  $a_n$  σε μία αριθμητική πρόοδο, που έχει πρώτο όρο τό  $a_1$  και λόγο  $\omega$ , βρίσκεται αν στον πρώτο της όρο προσθέσουμε τό γινόμενο του λόγου επί τόν αριθμό, ο οποίος εκφράζει τό πλήθος τών προηγούμενων του όρων.

Δηλαδή:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = a_1 + (n - 1)\omega \quad (1)$$

**Απόδειξη.** Από την αναδρομική σχέση (2) για  $n = 2, 3, \dots, (n - 1)$  λαμβάνουμε:  $a_2 = a_1 + \omega$ ,  $a_3 = a_2 + \omega$ ,  $a_4 = a_3 + \omega$ , ...,  $a_n = a_{n-1} + \omega$ .

Αν τώρα τις σχέσεις αυτές τις προσθέσουμε κατά μέλη και διαγράψουμε τούς κοινούς όρους που εμφανίζονται στα δύο μέλη προκύπτει ή (1).

**Σημείωση.** Μία πιο αυστηρή απόδειξη γίνεται μέ τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής, ως εξής: Για  $n = 1$  ή (1) προφανώς ισχύει. Έστω ότι ισχύει ή (1) για  $n = k$ , δηλ. έστω ότι ισχύει:

$$a_k = a_1 + (k - 1)\omega$$

Προσθέτουμε και στα δύο μέλη της τελευταίας σχέσεως τό  $\omega$  και έχουμε:

$$a_k + \omega = a_1 + (k - 1)\omega + \omega$$

Αλλά:

$$a_k + \omega = a_{k+1}$$

όποτε έχουμε:

$$a_{k+1} = a_1 + k\omega = a_1 + [(k + 1) - 1]\omega$$

δηλ. ή (1) ισχύει και για  $n = k + 1$ . Άρα, σύμφωνα μέ τό θεώρημα της τέλειας επαγωγής, ή (1) ισχύει για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

**Εφαρμογή.** Νά βρείτε τό 15ο όρο της αριθμ. προόδου: 7, 15, 23, 31, ...

**Λύση.** Έχουμε:  $a_1 = 7$ ,  $\omega = 15 - 7 = 23 - 15 = 31 - 23 = 8$ ,  $n = 15$ ,  $a_{15} =$ ;

Εφαρμόζοντας τόν τύπο (1) βρίσκουμε:

$$a_{15} = 7 + (15 - 1) \cdot 8 = 7 + 14 \cdot 8 = 119.$$

**Παρατηρήσεις.** 1) Από την ιδιότητα I συμπεραίνουμε ότι: μία αριθμ. πρόοδος είναι τελείως όρισμένη, όταν δίνονται ο πρώτος όρος της  $a_1 = a$  και ο λόγος της  $\omega$ , γιατί τότε οι όροι της θα είναι:

$$\begin{array}{cccccc} \text{1ος όρος,} & \text{2ος όρος,} & \text{3ος όρος,} & \text{4ος όρος,} & \text{5ος όρος,} & \dots \\ a & a + \omega & a + 2\omega & a + 3\omega & a + 4\omega & \dots \end{array}$$

2) Από τόν τύπο:  $a_n = a_1 + (n - 1)\omega$  συνάγεται ότι: αν γνωρίζουμε τούς τρεις από τούς αριθμούς  $a_n$ ,  $a_1$ ,  $n$  και  $\omega$  μπορούμε να προσδιορίσουμε και τόν τέταρτο, αρκεί να επιλύσουμε μίαν εξίσωση πρώτου βαθμού. Έτσι έχουμε τόν παρακάτω πίνακα:

| $a_1, n, \omega$            | $a_n, n, \omega$            | $a_n, a_1, n$                      | $a_n, a_1, \omega$                      |
|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------------|-----------------------------------------|
| $a_n = a_1 + (n - 1)\omega$ | $a_1 = a_n - (n - 1)\omega$ | $\omega = \frac{a_n - a_1}{n - 1}$ | $n = \frac{a_n - a_1 + \omega}{\omega}$ |

3) Αν για μία ακολουθία  $a_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  ισχύει:  $a_n = a_1 + (n - 1)\omega$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , τότε ή ( $a_n$ ) είναι μία αριθμητική πρόοδος. Πράγματι, τότε θα έχουμε:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = a_1 + (n - 1)\omega \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = a_1 + n\omega \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_n + \omega = a_1 + n\omega \end{array} \right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = a_n + \omega.$$

4) Έχοντας υπόψη την παρατήρηση 3, ή ιδιότητα I διατυπώνεται πιο γενικά ως εξής: **Αναγκαία και ικανή συνθήκη** για να είναι αριθμητική πρόοδος μέ λόγο  $\omega$  μία ακολουθία  $a_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , είναι ή:  $a_n = a_1 + (n - 1)\omega$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

\* § 71. **Πόρισμα.**—Αν μία ακολουθία  $a_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  είναι αριθμητική πρόοδος μέ λόγο  $\omega$ , τότε για κάθε  $n, m \in \mathbb{N}$  μέ  $m < n$  ισχύουν:

$$\text{i)} \quad a_{1+m} = a_1 + m\omega$$

$$\text{ii)} \quad a_n = a_{n-m} + m\omega$$

$$\text{iii)} \quad a_{n-m} = a_n - m\omega.$$

Η απόδειξη της (i) προκύπτει άμέσως από τη σχέση  $a_n = a_1 + (n - 1)\omega$ , αρκεί να θέσουμε  $n = 1 + m$ . Για να απόδείξουμε τις (ii) και (iii) παρατηρούμε ότι:  $a_{n-m} = a_1 + (n - m - 1)\omega = a_1 + (n - 1)\omega - m\omega = a_n - m\omega$ , δηλαδή ή (iii), και συνεπώς:  $a_n = a_{n-m} + m\omega$ , δηλαδή ή (ii).

✓ § 72. **Ιδιότητα II.**—Αν μία ακολουθία  $a_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  είναι αριθμητική πρόοδος μέ λόγο  $\omega$ , τότε για κάθε  $n, m \in \mathbb{N}$  μέ  $m < n$  ισχύει:

$$a_{1+m} + a_{n-m} = a_1 + a_n$$

**Απόδειξη.** Άμεση συνέπεια τών (i) και (iii) του παραπάνω πορίσματος.



**Παρατήρηση.** Η παραπάνω ιδιότητα διατυπώνεται συχνά ως εξής: Σέ πεπερασμένο πλήθος διαδοχικών όρων μιᾶς αριθμητικῆς προόδου, τό ἄθροισμα δύο όρων πού «ισαπέχουν» ἀπό τούς «ἄκρους» όρους εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν «ἄκρων» όρων.

Πραγματικά, ἂν πάρουμε τούς  $n$  πρώτους όρους:  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \dots, \alpha_n, \dots, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}, \alpha_n$  τῆς ἀριθμητικῆς προόδου ( $\alpha_n$ ) πού ἔχει λόγο  $\omega$ , τότε οἱ όροι  $\alpha_1$  καί  $\alpha_n$  εἶναι οἱ «ἄκροι» όροι, ἐνῶ οἱ όροι  $\alpha_{1+\mu} \equiv \alpha_{n-\mu+1}$  καί  $\alpha_{n-\mu}$ , γιά κάθε  $\mu = 1, 2, \dots, n-2$  εἶναι αὐτοί πού «ισαπέχουν» ἀπό τούς «ἄκρους» όρους. Αὐτό συμβαίνει, γιὰτί ἂν ὀνομάσουμε  $\alpha_{1+\mu}$  καί  $\alpha_{n-\mu}$  τούς όρους τῆς προόδου ( $\alpha_n$ ) πού «ισαπέχουν» ἀπό τούς «ἄκρους» όρους  $\alpha_1$  καί  $\alpha_n$  ἀντιστοίχως, τότε τό πλήθος τῶν όρων πού εἶναι μετὰ ἀπό τόν όρο  $\alpha_x$  εἶναι:  $n-x$ , ἐνῶ τό πλήθος τῶν όρων πού προηγείται ἀπό τόν όρο  $\alpha_{1+\mu}$  εἶναι:  $\mu$ . Ἄρα θά πρέπει:  $n-x=\mu$  καί συνεπῶς  $x=n-\mu$ . Ὡστε οἱ όροι πού ἰσαπέχουν ἀπό τούς ἄκρους όρους  $\alpha_1$  καί  $\alpha_n$  εἶναι ἀντιστοίχως οἱ:  $\alpha_{1+\mu}$  καί  $\alpha_{n-\mu}$ . Ἐτσι, π.χ. οἱ όροι  $\alpha_2$  καί  $\alpha_{n-1}$  ἰσαπέχουν ἀπό τούς  $\alpha_1$  καί  $\alpha_n$  ἀντιστοίχως. Ἐπίσης οἱ:  $\alpha_3$  καί  $\alpha_{n-2}$ ,  $\alpha_4$  καί  $\alpha_{n-3}$  κ.ο.κ. Ἰσχύει λοιπόν:

$$\alpha_2 + \alpha_{n-1} = \alpha_3 + \alpha_{n-2} = \alpha_4 + \alpha_{n-3} = \dots = \alpha_1 + \alpha_n.$$

**Προσέξτε!** Τό ἀντίστροφο τῆς ιδιότητος II δέν ἰσχύει πάντοτε. Ἐτσι, ἐνῶ γιά τή διαδοχή 2, 7, 5, 10 ἰσχύει:  $7+5=2+10$ , ὅμως οἱ ἀριθμοί: 2, 7, 5, 10 δέν εἶναι όροι ἀριθμητικῆς προόδου.

**Σημείωση.** Ἄν τό πλήθος τῶν  $n$  πρώτων όρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι περιττό, τότε ὑπάρχει «μεσαῖος όρος», δηλαδή όρος ἀπό τόν ὅποιο προηγείται καί ἔπεται τό ἴδιο πλήθος όρων. Σ' αὐτή τήν περίπτωση τό ἄθροισμα τῶν ἄκρων όρων ἰσοῦται μέ τό διπλάσιο τοῦ μεσαίου όρου. Ἐτσι, ἂν θεωρήσουμε τούς πέντε όρους 3, 5, 7, 9, 11 μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου, ἔχουμε:  $3+11=5+9=2\cdot 7$ .

**§ 73. Ἰδιότητα III.**—Ἀναγκαῖα καί ἱκανή συνθήκη γιά νά εἶναι μία ἀκολουθία  $\alpha_n$ ,  $n=1, 2, \dots$  ἀριθμητική πρόοδος εἶναι ἡ:

$$2\alpha_n = \alpha_{n-1} + \alpha_{n+1} \quad (n=2, 3, \dots)$$

**Ἀπόδειξη.** Ἐστω ὅτι ἡ ἀκολουθία ( $\alpha_n$ ) εἶναι μία ἀριθμητική πρόοδος μέ λόγο  $\omega$ , τότε, σύμφωνα μέ τόν ὀρισμό πού δώσαμε στήν § 69, γιά κάθε  $n \geq 2$  θά ἔχουμε:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{n+1} - \alpha_n &= \omega \\ \alpha_n - \alpha_{n-1} &= \omega \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha_{n+1} - \alpha_n = \alpha_n - \alpha_{n-1} \Rightarrow 2\alpha_n = \alpha_{n-1} + \alpha_{n+1} \quad (1)$$

**Ἀντίστροφα,** ἔστω ὅτι ἰσχύει ἡ (1), θά ἀποδείξουμε ὅτι ἡ ἀκολουθία ( $\alpha_n$ ) εἶναι μία ἀριθμητική πρόοδος. Πράγματι, ἀπό τήν (1) ἔχουμε:

$$\alpha_n - \alpha_{n-1} = \alpha_{n+1} - \alpha_n \quad \text{γιά κάθε } n=2, 3, \dots$$

Τότε ὅμως, σύμφωνα μέ τό δεύτερο ὀρισμό πού δώσαμε γιά τήν ἀριθμητική πρόοδο, ἡ ἀκολουθία ( $\alpha_n$ ) εἶναι ἀριθμητική πρόοδος.

Ἀμεση συνέπεια τῆς παραπάνω προτάσεως εἶναι τό ἐπόμενο πόρισμα:

**§ 74. Πόρισμα.**—Ἀναγκαῖα καί ἱκανή συνθήκη, γιά νά εἶναι τρεῖς ἀριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  διαδοχικοί όροι μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι ἡ:

$$2\beta = \alpha + \gamma \quad (1)$$

Σ' αὐτή τήν περίπτωση ὁ  $\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$  λέγεται **ἀριθμητικός μέσος** τῶν  $\alpha$  καί  $\gamma$ .

Πιο γενικά: ἂν ἔχουμε  $n$  ἀριθμούς  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , ὀνομάζουμε **ἀριθμητικό μέσο** τῶν  $n$  αὐτῶν ἀριθμῶν, καί τόν παριστάνουμε μέ  $M_A$ , τόν πραγματικό ἀριθμό:

$$M_A = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n} \quad (2)$$

**Ἐφαρμογή.** Νά προσδιορίσετε τόν ἀριθμό  $k$ , ὥστε οἱ τρεῖς ἀριθμοί:

$$3k-7, k+2, 12-2k$$

νά εἶναι διαδοχικοί όροι ἀριθμητικῆς προόδου.

**Λύση.** Σύμφωνα μέ τό παραπάνω πόρισμα πρέπει νά ἰσχύει:

$$2(k+2) = (3k-7) + (12-2k) \quad \text{ἀπό τήν ὁποία βρίσκουμε: } k=1.$$

Γιά  $k=1$  βρίσκουμε ὅτι τρεῖς όροι τῆς προόδου εἶναι:  $-4, 3, 10$ .

**§ 75. Ἰδιότητα IV.**—Τό ἄθροισμα  $\Sigma_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$  τῶν  $n$  πρώτων όρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου μᾶς τό δίνει ὁ τύπος:

$$\Sigma_n = \frac{(\alpha_1 + \alpha_n) \cdot n}{2} \quad (1)$$

**Ἀπόδειξη.** Γιά νά ἀποδείξουμε τήν ιδιότητα αὐτή, θά στηριχτοῦμε στήν ιδιότητα II (§ 72, παρατήρηση).

$$\text{Γράφουμε πρῶτα: } \Sigma_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} + \alpha_n$$

$$\text{καί ἔπεται: } \Sigma_n = \alpha_n + \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} + \dots + \alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1.$$

Προσθέτοντας τίς δύο αὐτές ἰσότητες κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$2\Sigma_n = (\alpha_1 + \alpha_n) + (\alpha_2 + \alpha_{n-1}) + \dots + (\alpha_{n-1} + \alpha_2) + (\alpha_n + \alpha_1)$$

ἢ ἔπειδή  $\alpha_1 + \alpha_n = \alpha_2 + \alpha_{n-1} = \dots = \alpha_{n-1} + \alpha_2 = \alpha_n + \alpha_1$  (σύμφωνα μέ τήν ιδιότη. II) καί οἱ παρενθέσεις εἶναι  $n$ , θά ἔχουμε:

$$2\Sigma_n = (\alpha_1 + \alpha_n) \cdot n \Rightarrow \Sigma_n = \frac{(\alpha_1 + \alpha_n) \cdot n}{2}.$$

**Ἀσκηση.** Νά ἀποδείξετε τόν παραπάνω τύπο (1) μέ τή μέθοδο τῆς τέλει ἐπαγωγῆς.

**Πόρισμα.**—Τό ἄθροισμα  $\Sigma_n$  τῶν  $n$  πρώτων όρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου συναρτῆσει τοῦ πρώτου όρου  $\alpha_1 = a$ , τοῦ λόγου  $\omega$  καί τοῦ πλήθους  $n$  τῶν όρων, μᾶς τό δίνει ὁ τύπος:

$$\Sigma_n = \frac{[2a + (n-1)\omega] \cdot n}{2} \quad (2)$$

**Παρατήρηση.** Οἱ δύο τύποι:

$$\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega \quad \text{καί} \quad \Sigma_n = \frac{(\alpha_1 + \alpha_n) \cdot n}{2}$$

περιέχουν πέντε ἀγνώστους, τούς:  $\alpha_1, \alpha_n, \omega, n, \Sigma_n$ .

Ἄν, λοιπόν, μᾶς δοθοῦν οἱ τρεῖς ἀπ' αὐτούς τούς ἀριθμούς, τότε οἱ δύο παραπάνω τύποι ἀποτελοῦν σύστημα δύο ἐξισώσεων μέ δύο ἀγνώστους. Λύνοντας αὐτό τό σύστημα βρίσκουμε τούς ἄλλους δύο ἀριθμούς.







Από την τελευταία σχέση, αν λάβουμε υπόψη και την (1), βρίσκουμε ότι:

$$\Sigma_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + v^2 = \frac{v(v+1)(2v+1)}{6} \quad (2)$$

γ). Υπολογισμός του  $\Sigma_3$ . Είναι:  $\Sigma_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + v^3$ . Θεωρούμε την ταυτότητα:  $(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ , από την οποία για  $x = 1, 2, \dots, v$  παίρνουμε:

$$\left. \begin{aligned} 2^4 &= 1^4 + 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1 \\ 3^4 &= 2^4 + 4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1 \\ &\dots \\ (v+1)^4 &= v^4 + 4 \cdot v^3 + 6 \cdot v^2 + 4 \cdot v + 1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Αν προσθέσουμε τις ισότητες αυτές κατά μέλη βρί-} \\ &\text{σκουμε:} \\ &(v+1)^4 = 1 + 4\Sigma_3 + 6\Sigma_2 + 4\Sigma_1 + v, \text{ οπότε:} \\ &(v+1)^4 - (v+1) = 4\Sigma_3 + 6\Sigma_2 + 4\Sigma_1 \end{aligned}$$

Από την τελευταία σχέση, αν λάβουμε υπόψη τις (1) και (2), βρίσκουμε ότι:

$$\Sigma_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + v^3 = \left( \frac{v(v+1)}{2} \right)^2 = \Sigma_1^2 \quad (3)$$

Αν εργαστούμε όπως και προηγουμένως μπορούμε να υπολογίσουμε το  $\Sigma_4$ , ύστερα το  $\Sigma_5$  κ.ο.κ.

**Σημείωση.** Οι τύποι (1), (2) και (3), όπως είδαμε στο κεφάλαιο II, μπορούν να αποδειχτούν και με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής (βλ. άσκ. 18/β, γ).

**Εφαρμογή.** Νά υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\Sigma = \alpha^2 + (\alpha + \omega)^2 + (\alpha + 2\omega)^2 + \dots + [\alpha + (v-1)\omega]^2$$

Λύση. Έχουμε:

$$\Sigma = v\alpha^2 + 2\alpha\omega[1 + 2 + \dots + (v-1)] + \omega^2[1^2 + 2^2 + \dots + (v-1)^2] \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \text{Άλλα:} \quad 1 + 2 + \dots + (v-1) &= \frac{1}{2} v(v-1) \\ 1^2 + 2^2 + \dots + (v-1)^2 &= \frac{1}{6} v(v-1)(2v-1) \quad (\text{γιατί;}) \end{aligned}$$

και συνεπώς ή (\*) γίνεται:

$$\Sigma = v\alpha^2 + v(v-1)\alpha\omega + \frac{1}{6} v(v-1)(2v-1)\omega^2 \quad (4)$$

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Ομάδα Α.** 128. Νά γράψετε τους οκτώ πρώτους όρους της αριθμητικής προόδου, της οποίας ο πρώτος όρος και ο λόγος είναι ρίζες της εξίσωσης:  $x^2 - 5x + 6 = 0$ .

129. Νά βρείτε το λόγο  $\omega$  της αριθμητικής προόδου, αν  $\alpha_1 = 3$  και  $\alpha_{12} = 80$ .

130. Στην αριθμητική πρόοδο: 3, 7, 11, ...,  $\alpha_n$ , ... είναι  $\alpha_n = 79$ . Νά βρείτε το  $n$  και κατόπιν να υπολογίσετε τα  $\Sigma_{20}$  και  $\Sigma_{30}$ .

131. Νά αποδείξετε ότι το άθροισμα των  $n$  πρώτων περιττών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο του πλήθους τους.

132. Νά βρείτε τους πέντε πρώτους όρους της αριθμητικής προόδου, αν ξέρουμε ότι:  $\alpha_0 = 15$  και  $\Sigma_{12} = 165$ .

133. Νά προσδιορίσετε το  $k$  ώστε οι επόμενοι αριθμοί να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου: (i)  $3k, k+4, k-1$ , (ii)  $4-k, 3+2k, 6+7k$ .

134. Νά αποδείξετε ότι: αν οι αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι διαδοχικοί όροι αριθμ. προόδου, τότε και οι αριθμοί:  $x = \alpha^2 - \beta\gamma, y = \beta^2 - \alpha\gamma, z = \gamma^2 - \alpha\beta$  είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Τί λόγο έχουν οι λόγοι των δύο προόδων;

135. Νά αποδείξετε ότι: αν οι αριθμοί  $\frac{1}{\alpha+\beta}, \frac{1}{\beta+\gamma}, \frac{1}{\gamma+\alpha}$  είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου, τότε το ίδιο συμβαίνει και για τους αριθμούς:  $\beta^2, \alpha^2, \gamma^2$ .

136. Ανάμεσα στους αριθμούς 9 και 34 να παρεμβάλετε άλλους αριθμούς ώστε να προκύψουν 11 διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου.

137. Σε μία αριθμητική πρόοδο ( $\alpha_n$ ) ο 2ος και ο 8ος όρος της διαφέρουν κατά 24, ενώ το άθροισμα του 4ου και του 12ου όρου της είναι 70. Νά βρείτε την πρόοδο ( $\alpha_n$ ), αν: (i) ( $\alpha_n$ ) - αύξουσα, (ii) ( $\alpha_n$ ) - φθίνουσα. Ύστερα να υπολογίσετε το άθροισμα των όρων της που βρίσκονται ανάμεσα στον 8ο και εικοστό πέμπτο όρο της.

138. Αν ο όρος που κατέχει την  $k$  τάξη σε μία αριθμ. πρόοδο είναι  $\alpha$ , αυτός που κατέχει τη  $\lambda$  τάξη είναι  $\beta$  και αυτός που κατέχει τη  $\mu$  τάξη είναι  $\gamma$ , να αποδείξετε ότι:  $\alpha(\lambda - \mu) + \beta(\mu - k) + \gamma(k - \lambda) = 0$ .

139. Σε μία αριθμ. πρόοδο το άθροισμα των  $n$  πρώτων όρων της είναι  $A$ , των  $2n$  πρώτων όρων της είναι  $B$  και των  $3n$  πρώτων όρων της είναι  $\Gamma$ . Νά αποδείξετε ότι ισχύει:  $3A - 3B + \Gamma = 0$ .

140. Τα ψηφία ενός τετραψήφιου αριθμού είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Αν το τελευταίο ψηφίο είναι τετραπλάσιο του πρώτου, να βρεθεί ο αριθμός.

141. Νά βρεθούν τέσσερις αριθμοί που να είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου και συγχρόνως το άθροισμά τους να είναι 26 και το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι 214.

142. Νά βρεθεί η αριθμ. πρόοδος της οποίας ο τέταρτος και ο 8ος όρος έχουν άθροισμα 18, ενώ οι κύβοι τους έχουν άθροισμα 3402.

143. Νά βρείτε πέντε αριθμούς που να είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου και συγχρόνως το άθροισμά τους να είναι 30 και το άθροισμα των αντιστρόφων τους να είναι  $\frac{137}{120}$ .

144. Πόσους αριθμ. ενδιάμεσους πρέπει να παρεμβάλουμε ανάμεσα στους αριθμούς 1 και 19, ώστε ο λόγος του δεύτερου ενδιάμεσου προς τον τελευταίο ενδιάμεσο να είναι ίσος με  $\frac{1}{6}$ .

145. Νά υπολογίσετε το παρακάτω άθροισμα:

$$\Sigma = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + v(v+1)(v+2).$$

Υπόδειξη. Νά παρατηρήσετε ότι:  $v(v+1)(v+2) = v^3 + 3v^2 + 2v$  κ.τ.λ.

\* **Ομάδα Β.** 146. ιά ποιές τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$  οι αριθμοί:  $\alpha\beta - \frac{1}{\alpha\beta}, \beta - \frac{1}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta}$

αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου; Ποιός ο λόγος της προόδου σε κάθε περίπτωση;

147. Το άθροισμα των  $n$  πρώτων όρων μιας ακολουθίας ( $\alpha_n$ ) είναι:  $3n^2 + n$ . Νά βρείτε το νιοστό όρο της και να αποδείξετε ότι η ακολουθία ( $\alpha_n$ ) είναι αριθμητική πρόοδος. Ύστερα να βρείτε την τάξη του όρου, που είναι ίσος με 100.

148. Νά αποδείξετε ότι σε κάθε αριθμ. πρόοδο ισχύει:  $\Sigma_\mu = \Sigma_\nu \Rightarrow \Sigma_{\mu+\nu} = 0, (\mu \neq \nu)$ .

149. Έστω μία αριθμ. πρόοδος με πρώτο όρο  $\alpha$  και λόγο  $\omega$ . Αν το άθροισμα  $\Sigma_p$  των  $p$  πρώτων όρων της ισούται με  $q$  και το άθροισμα  $\Sigma_q$  των  $q$  πρώτων όρων της ισούται με  $p$ , να αποδείξετε ότι:

$$(i) \Sigma_{p+q} = -(p+q), \quad (ii) \Sigma_{p-q} = (p-q) \left( 1 + \frac{2q}{p} \right)$$



150. Νά αποδείξετε ότι τρεις αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  για να είναι όροι μιᾶς αριθμητικής προόδου (χωρίς απαραίτητα να είναι και διαδοχικοί), πρέπει και ἄρκει ἡ ἐξίσωση:

$$\frac{\beta - \alpha}{x + 1} = \frac{\gamma - \beta}{y - 1}$$

νά ἔχει ἀκέραιη καὶ θετική λύση ὡς πρὸς  $x, y$ , ὅπου  $x$  εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ὄρων τῆς ἀριθμητικής προόδου, οἱ ὅποιοι βρίσκονται ἀνάμεσα στὰ  $\alpha$  καὶ  $\beta$ , καὶ  $y$  εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ὄρων πού βρίσκονται ἀνάμεσα στὰ  $\beta$  καὶ  $\gamma$ .

151. Νά ἐξετάσετε ἂν οἱ ἀριθμοί:  $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$  ἀποτελοῦν ὄρους ὁποιασδήποτε τάξεως μιᾶς ἀριθμητικής προόδου.

152. Νά ὑπολογίσετε τὸ ἄθροισμα τῶν  $\mu$  ἀριθμητικῶν ἐνδιαμέσων πού παρεμβάλλονται ἀνάμεσα στοὺς ἀριθμούς 1 καὶ  $\mu^2$ .

153. Ἄν οἱ ὄροι πού κατέχουν τὶς τάξεις  $p, q, r$  σὲ μία ἀριθμητική πρόοδο εἶναι ἀντιστοιχῶς ἴσοι μὲ  $r, p, q$ , νά αποδείξετε ὅτι:  $p^3 + q^3 + r^3 = 3pqr$ .

154. Νά αποδείξετε ὅτι: ἂν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν ἐνὸς ὀρθογώνιου τριγώνου εἶναι διαδοχικοὶ ὄροι μιᾶς ἀριθμ. προόδου, τότε ὁ λόγος τῆς προόδου ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτίνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

155. Δίνεται ἡ ἐξίσωση:  $x^2 - \alpha x + \beta = 0$  μὲ ρίζες  $\rho_1, \rho_2$  καὶ ἡ:  $x^2 - (5\alpha - 4)x + \beta = 0$  μὲ ρίζες  $\rho_3, \rho_4$ . Νά προσδιορίσετε τὰ  $\alpha$  καὶ  $\beta$  ἔτσι, ὥστε οἱ ρίζες  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$  μ' αὐτὴ τὴ σειρά, νά εἶναι διαδοχικοὶ ὄροι μιᾶς ἀριθμ. προόδου.

156. Τὴν ἀκολουθία τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν τὴ χωρίζουμε σὲ ὁμάδες ὡς ἑξῆς:

(1), (2, 3, 4, 5), (6, 7, 8, ..., 12), (13, 14, ..., 22), (23, 24, ...), ...

Νά βρεῖτε τὸν πρῶτο ὄρο τῆς νιοστῆς ὁμάδας καὶ νά αποδείξετε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν πού περιλαμβάνονται στὴ νιοστὴ ὁμάδα εἶναι:

$$(3v - 2) \cdot \left[ (v - 1)^2 + \frac{v^2 + 1}{2} \right].$$

157. Χωρίζουμε 4200 ἀντικείμενα σὲ  $(v + 1)$  ὁμάδες ἔτσι, ὥστε ἡ πρώτη ὁμάδα νά περιλαμβάνει 5 ἀντικείμενα, ἡ δευτέρα 8, ἡ τρίτη 11, κ.ο.κ. Νά βρεῖτε τὸ μέγιστο πλῆθος τῶν ὁμάδων πού μποροῦμε νά σχηματίσουμε καὶ τὸ πλῆθος τῶν ἀντικειμένων πού ἴσως θά θέλαμε γιὰ νά σχηματίσουμε μία ἀκόμη ὁμάδα.

158. Ἄν  $S$  εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν  $n$  πρώτων ὄρων μιᾶς ἀριθμητικής προόδου μὲ λόγο  $\omega$  καὶ  $\Sigma$  τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν  $n$  πρώτων ὄρων τῆς, νά αποδείξετε ὅτι ἰσχύει:

$$\Sigma = \frac{S^2}{n} + \frac{1}{12} n(v^2 - 1)\omega^2.$$

## II. ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ ΠΡΟΟΔΟΙ

✓ § 79. Ὅρισμοί.— Ἄς θεωρήσουμε τὴν ἀκολουθία:

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{2v+1}, \dots$$

Γι' αὐτὴ τὴν ἀκολουθία παρατηροῦμε τὸ ἑξῆς: ἂν πάρουμε, μὲ τὴν ἴδια τάξη, τοὺς ἀντίστροφους τῶν ὄρων τῆς, θά ἔχουμε τὴν ἀκολουθία:

$$3, 5, 7, 9, \dots, (2v+1), \dots$$

ἡ ὁποία εἶναι μία ἀριθμητική πρόοδος (μὲ λόγο  $\omega = 2$ ).

Ἐπίσης, ἂν θεωρήσουμε τὴν ἀκολουθία: 6, 3, 2, ... παρατηροῦμε πάλι

πὺς ἡ ἀκολουθία:  $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \dots$  εἶναι μία ἀριθμητική πρόοδος (μὲ  $\omega = \frac{1}{6}$ ).

Βλέπουμε λοιπὸν ὅτι ὑπάρχουν ἀκολουθίες ἀριθμῶν μὲ τὴν ιδιότητα: Ἄν πάρουμε τοὺς ἀντίστροφους τῶν ὄρων τους, μὲ τὴν ἴδια βέβαια τάξη, προκύπτει μία νέα ἀκολουθία, ἡ ὁποία εἶναι ἀριθμητική πρόοδος. Τὶς ἀκολουθίες μὲ αὐτὴ τὴν ιδιότητα τίς ὀνομάζουμε **ἁρμονικὲς προόδους**. Πιὸ αὐστηρά μποροῦμε νά ποῦμε τώρα ὅτι: *Μία ἀκολουθία ἀριθμῶν*:

$$a_1, a_2, \dots, a_v, \dots \quad (1)$$

θά λέμε ὅτι εἶναι **μία ἁρμονικὴ πρόοδος**, τότε καὶ μόνο τότε, ἂν ἰσχύει:

$a_v \neq 0 \forall v \in \mathbb{N}$  καὶ ἡ ἀκολουθία:

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_v}, \dots \quad (2)$$

εἶναι **ἀριθμητικὴ πρόοδος**, δηλαδή ἂν ὑπάρχει ἀριθμὸς  $\omega$  τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει:

$$\frac{1}{a_{v+1}} = \frac{1}{a_v} + \omega, \text{ γιὰ κάθε } v = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Οἱ ὄροι τῆς ἀκολουθίας (1) λέγονται **διαδοχικοὶ ὄροι** τῆς ἁρμονικῆς προόδου καὶ ὁ  $a_v$  λέγεται **νιοστός ὄρος** ἢ **ὄρος  $v$ -τάξεως** τῆς προόδου. Ἡ ἀκολουθία (2) λέγεται **ἡ ἀντίστοιχη ἀριθμητικὴ πρόοδος** τῆς ἁρμονικῆς προόδου (1).

Ἀπὸ τὸν παραπάνω ὀρισμὸ τῆς ἁρμονικῆς προόδου συμπεραίνουμε ὅτι ζητήματα πού ἀφοροῦν μία ἁρμονικὴ πρόοδο ἀνάγονται σὲ ἐπίλυση ζητημάτων πού ἀφοροῦν τὴν ἀντίστοιχη ἀριθμητικὴ πρόοδο. Γιὰ τὸ λόγο αὐτὸ θά μελετήσουμε στὰ ἐπόμενα τίς κυριότερες ιδιότητες τῶν ἁρμονικῶν προόδων ὡς ἐφαρμογὲς τῶν ιδιοτήτων τῶν ἀριθμητικῶν προόδων.

✓ § 80. **Εὕρεση τοῦ νιοστοῦ ὄρου μιᾶς ἁρμονικῆς προόδου.**— Ἐστω ἡ ἁρμονικὴ πρόοδος:  $a_1, a_2, \dots, a_v, \dots$ . Ἄν  $\omega$  εἶναι ὁ λόγος τῆς ἀντίστοιχης ἀριθμητικῆς προόδου:  $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_v}, \dots$ , τότε, σύμφωνα μὲ τὸν τύπο (1) τῆς § 70, θά ἔχουμε:

$$\frac{1}{a_v} = \frac{1}{a_1} + (v-1)\omega \Rightarrow a_v = \frac{a_1}{1 + (v-1)\omega a_1} \quad (1')$$

**Σημείωση.** Ἄν δύο πρῶτοι ὄροι μιᾶς ἁρμονικῆς προόδου εἶναι γνωστοί, τότε ὁ λόγος  $\omega = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}$  καὶ συνεπῶς ὁ νιοστός ὄρος τῆς ἁρμονικῆς προόδου εἶναι ὁ:

$$a_v = \frac{a_1 a_2}{a_1(v-1) - a_2(v-2)} \quad (1'')$$

**Σχόλιο.** Δὲν ὑπάρχει τύπος πού νά δίνει τὸ ἄθροισμα  $\Sigma_v$  τῶν  $v$  πρώτων ὄρων ἁρμονικῆς προόδου.



§ 81. Συνθήκη για να είναι διαδοχικοί όροι μιᾶς ἀρμονικῆς προόδου οἱ ἀριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$ . — Ἀφοῦ οἱ ἀριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  εἶναι, μέ τή σειρά πού δίνονται, διαδοχικοί ὅροι ἀρμονικῆς προόδου, οἱ ἀντίστροφοί τους:  $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$  εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου καί συνεπῶς (§ 74):

$$2 \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} \Rightarrow \beta = \frac{2}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}} \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha + \gamma}} \quad (1)$$

Ἀντιστρόφως, ἂν ἰσχύει ἡ (1), τότε  $\beta = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha + \gamma}$  καί συνεπῶς  $\frac{2}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}$ , δηλαδή οἱ  $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$  εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμ. προόδου, ὁπότε οἱ ἀριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀρμονικῆς προόδου.

Ὡστε: Ἀναγκαῖα καί ἱκανή συνθήκη γιά νά εἶναι τρεῖς ἀριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  ( $\neq 0$ ) διαδοχικοί ὅροι ἀρμονικῆς προόδου εἶναι ἡ ἰσότητα (1).

Σ' αὐτή τήν περίπτωση ὁ ἀριθμός  $\beta$  λέγεται **ἀρμονικός μέσος** τῶν  $\alpha$  καί  $\gamma$ .

Γενικότερα: ἂν ἔχουμε  $n$  ἀριθμούς  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , διάφορους τοῦ μηδενός, ὀνομάζουμε **ἀρμονικό μέσο** αὐτῶν, καί τόν συμβολίζουμε μέ  $M_H$ , τόν ἀριθμό:

$$M_H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \quad (2)$$

**Παρατηρήσεις.** α) Ἡ (1) γράφεται:  $\frac{2}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\beta}$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha - \beta}{\alpha\beta} = \frac{\beta - \gamma}{\beta\gamma} \Leftrightarrow \frac{\alpha\beta}{\beta\gamma} = \frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma}} \quad (3)$$

Ἡ ἰσότητα (3) λέγεται **ἀρμονική ἀναλογία**.

Ἀπό τήν (3) συμπεραίνουμε ὅτι: Γιά νά εἶναι οἱ διάφοροι μεταξύ τους ἀριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  μέ τή σειρά πού δίνονται, διαδοχικοί ὅροι ἀρμονικῆς προόδου πρέπει καί ἀρκεῖ οἱ ἀριθμοί αὐτοί νά εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός καί νά βρῶνται σέ ἀρμονική ἀναλογία.

β) Ἐχοντας ὑπόψη τήν ἰδιότητα III (§ 73) τῶν ἀριθμητικῶν προόδων, ἡ προηγούμενη συνθήκη (1) διατυπώνεται πιό γενικά ὡς ἑξῆς: Ἀναγκαῖα καί ἱκανή συνθήκη γιά νά εἶναι μία ἀκολουθία  $a_n, n = 1, 2, \dots$  ( $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ ) ἀρμονική πρόοδος εἶναι ἡ:

$$\boxed{\frac{2}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}} \quad (n = 2, 3, \dots) \quad (4)$$

Νά συγκρίνετε τήν παραπάνω σχέση (4) μέ τή γνωστή ἀπό τή Γεωμετρία σχέση τοῦ μέσου ἀρμονικοῦ:  $\frac{2}{AB} = \frac{1}{AG} + \frac{1}{AD}$ .

\* § 82. Παρεμβολή ἀρμονικῶν ἐνδιαμέσων. — α) Ὅρισμοί. Δίνονται δύο ἀριθμοί  $\alpha$  καί  $\beta$  ( $\alpha, \beta \neq 0$ ). Οἱ  $\mu$  ἀριθμοί  $x_1, x_2, \dots, x_\mu$  λέγονται **ἀρμονικοί ἐνδιάμεσοι** τῶν  $\alpha$  καί  $\beta$ , τότε καί μόνο τότε, ἂν οἱ ἀριθμοί:  $\alpha, x_1, x_2, \dots, x_\mu, \beta$  εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀρμονικῆς προόδου.

Παρεμβολή  $\mu$  ἀρμονικῶν ἐνδιαμέσων μεταξύ τῶν ἀριθμῶν  $\alpha$  καί  $\beta$  ὀνομάζουμε τήν εὕρεση  $\mu$  ἀριθμῶν:  $x_1, x_2, \dots, x_\mu$  τέτοιων, ὥστε: οἱ  $\alpha, x_1, x_2, \dots, x_\mu, \beta$  νά εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀρμονικῆς προόδου.

β) Τό πρόβλημα τῆς ἀρμονικῆς παρεμβολῆς. Νά παρεμβληθοῦν  $\mu$  ἀρμονικοί ἐνδιάμεσοι μεταξύ τῶν ἀριθμῶν  $\alpha$  καί  $\beta$ .

Ἐπίλυση. Ἀρκεῖ νά παρεμβάλουμε  $\mu$  ἀριθμητικούς ἐνδιάμεσους μεταξύ τῶν ἀριθμῶν  $\frac{1}{\alpha}$  καί  $\frac{1}{\beta}$ , ὁπότε οἱ ἀντίστροφοί τους θά εἶναι οἱ  $\mu$  ἀρμονικοί ἐνδιάμεσοι τῶν  $\alpha$  καί  $\beta$ . Ἀπό τόν τύπο τῆς ἀριθμητικῆς παρεμβολῆς (§ 76) ἔχουμε:

$$\omega' = \frac{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}}{\mu + 1} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha\beta(\mu + 1)}, \text{ δηλαδή: } \boxed{\omega' = \frac{\alpha - \beta}{(\mu + 1)\alpha\beta}} \quad (1)$$

Ὁ τύπος (1) λέγεται **τύπος τῆς ἀρμονικῆς παρεμβολῆς**.

Ἐφαρμογή. Μεταξύ τῶν ἀριθμῶν  $\frac{5}{2}$  καί  $\frac{5}{11}$  νά παρεμβάλετε 5 ἀρμονικούς ἐνδιάμεσους.

Λύση. Ἀρκεῖ νά παρεμβάλουμε 5 ἀριθμητικούς ἐνδιάμεσους μεταξύ τῶν ἀριθμῶν  $\frac{2}{5}$  καί  $\frac{11}{5}$ . Ὁ τύπος (1) γιά  $\beta = \frac{5}{11}, \alpha = \frac{5}{2}, \mu = 5$  δίνει:  $\omega' = \frac{3}{10}$ . Τότε οἱ 5 ἀριθμητικοί ἐνδιάμεσοι τῶν ἀριθμῶν  $\frac{2}{5}$  καί  $\frac{11}{5}$  εἶναι οἱ:  $\frac{7}{10}, 1, \frac{13}{10}, \frac{8}{5}, \frac{19}{10}$ , ὁπότε οἱ ἀντίστροφοί τους θά εἶναι οἱ 5 ἀρμονικοί ἐνδιάμεσοι τῶν ἀριθμῶν  $\frac{5}{2}$  καί  $\frac{5}{11}$  πού ζητᾶμε. Ἐτσι ἔχουμε:  $x_1 = \frac{10}{7}, x_2 = 1, x_3 = \frac{10}{13}, x_4 = \frac{5}{8}, x_5 = \frac{10}{19}$ .

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α'. 159. Νά βρεῖτε τόν 31ο ὅρο τῆς ἀρμονικῆς προόδου:  $\frac{1}{25}, \frac{1}{33}, \frac{1}{41}, \dots$

καί τόν ὄγδοο ὅρο τῆς προόδου:  $1, \frac{3}{8}, \frac{3}{13}, \dots$

160. Νά βρεῖτε τό 12ο ὅρο μιᾶς ἀρμονικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ τρίτος ὅρος εἶναι ὁ ἀριθμός  $\frac{1}{4}$  καί ὁ ὄγδοος ὅρος τῆς εἶναι ὁ ἀριθμός  $\frac{3}{8}$ .

161. Νά προσδιορίσετε τόν ἀριθμό  $k$ , ὥστε οἱ ἀριθμοί:  $1 + k, 3 + k, 9 + k$  νά εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀρμονικῆς προόδου.

162. Δίνονται τρεῖς ἀριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$ . Νά βρεθεῖ ὁ ἀριθμός  $x$ , ὥστε οἱ ἀριθμοί  $\alpha + x,$



$\beta + x, \gamma + x$  να είναι διαδοχικοί όροι αρμονικής προόδου. Τί συμβαίνει αν οι  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου;

163. Να προσδιορίσετε τους αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$ , αν είναι γνωστό ότι οι αριθμοί:  $\alpha, 12, 3, 1, \frac{5}{7}, \beta$  είναι διαδοχικοί όροι αρμονικής προόδου.

164. Αν οι  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι διαδοχικοί όροι μιᾶς αρμονικής προόδου, να αποδείξετε ότι:

$$i) \frac{\beta + \alpha}{\beta - \alpha} + \frac{\beta + \gamma}{\beta - \gamma} = 2, \quad (ii) \frac{2}{\beta} = \frac{1}{\beta - \alpha} + \frac{1}{\beta - \gamma}.$$

165. Το άθροισμα τριῶν διαδοχικῶν ὀρων μιᾶς ἀρμονικῆς προόδου εἶναι  $\frac{33}{40}$ , ἐνῶ τό ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τους εἶναι 15. Νά βρεῖτε αὐτούς τοὺς ὀρους.

166. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἂν οἱ ἀριθμοί:  $\frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha\beta}, \beta, \frac{\beta + \gamma}{1 - \beta\gamma}$  εἶναι διαδοχικοὶ ὀροι ἀριθμ. προόδου, τότε οἱ ἀριθμοί:  $\alpha, \frac{1}{\beta}, \gamma$  εἶναι διαδοχικοὶ ὀροι ἀρμονικῆς προόδου.

167. Μεταξύ τῶν ἀριθμῶν 0,25 καί 0,025 νά παρεμβληθοῦν 18 ἀριθμοὶ ἔτσι, ὥστε μαζί μέ τοὺς ἀριθμούς 0,25 καί 0,025 νά ἀποτελοῦν διαδοχικοὺς ὀρους ἀρμονικῆς προόδου.

168. Αν οι αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι ὀροι μιᾶς ἀρμονικῆς προόδου τάξεων  $\lambda, \mu, \nu$  ἀντιστοίχως, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$(\mu - \nu)\beta\gamma + (\nu - \lambda)\gamma\alpha + (\lambda - \mu)\alpha\beta = 0.$$

★ **Ομάδα Β**. 169. Αν οι αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι διαδοχικοί ὀροι μιᾶς ἀρμονικῆς προόδου, τότε τό ἴδιο συμβαίνει καί γιά τοὺς ἀριθμούς:

$$\frac{\alpha}{\beta + \gamma - \alpha}, \frac{\beta}{\gamma + \alpha - \beta}, \frac{\gamma}{\alpha + \beta - \gamma}.$$

170. Αν οι ὁμόσημοι ἀριθμοὶ  $\alpha, \beta, \gamma$  εἶναι διαδοχικοὶ ὀροι μιᾶς ἀρμονικῆς προόδου νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$i) \frac{\alpha + \beta}{2\alpha - \beta} + \frac{\gamma + \beta}{2\gamma - \beta} > 4, \quad (ii) \beta^2(\alpha - \gamma)^2 = 2[\gamma^2(\beta - \alpha)^2 + \alpha^2(\gamma - \beta)^2].$$

171. Αν οι διάφοροι μεταξύ τους ἀνά δύο ἀριθμοὶ  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  εἶναι διαδοχικοὶ ὀροι μιᾶς ἀρμονικῆς προόδου, νά ἀποδείξετε ὅτι γιά κάθε  $n \in \mathbb{N}$  μέ  $n \geq 2$  ἰσχύει:

$$(n - 1)\alpha_1\alpha_n = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n.$$

172. Ἀνάμεσά στοὺς ἀριθμούς 2 καί 3 νά παρεμβάλετε 19 ἀριθμητικούς ἐνδιάμεσους καί 19 ἀρμονικούς ἐνδιάμεσους. Αν  $\xi$  εἶναι ἕνας ἀριθμ. ἐνδιάμεσος καί  $\eta$  ὁ ἀντίστοιχος ἀρμονικός, νά ἀποδείξετε ὅτι:  $\xi + \frac{6}{\eta} = 5$ .

173. Νά βρεῖτε δύο ἀριθμούς  $x$  καί  $y$ , ἂν εἶναι γνωστό ὅτι διαφέρουν κατά 3 καί ὅτι:  $MA - MH = \frac{3}{14}$ .

174. Αν  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  εἶναι διαδοχικοὶ ὀροι μιᾶς ἀρμονικῆς προόδου, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\frac{5\alpha - 3\beta}{\alpha\beta} = \frac{\gamma + \delta}{\gamma\delta}.$$

175. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἂν τὰ μήκη  $\alpha, \beta, \gamma$  τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου εἶναι διαδοχικοὶ ὀροι μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου, τότε οἱ ἀκτίνες  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  τῶν ἀντίστοιχων παρεγγεγραμμένων στό τρίγωνο κύκλων εἶναι διαδοχικοὶ ὀροι ἀρμονικῆς προόδου.

176. Νά βρεῖτε τή συνθήκη γιά νά εἶναι τρεῖς ἀριθμοὶ  $\alpha, \beta, \gamma$  ὀροι ἀρμονικῆς προόδου, ὅχι ἀπαραίτητα διαδοχικοί. Κατόπιν μέ βάση τή συνθήκη πού βρήκατε νά ἐξετάσετε ἂν οἱ ἀριθμοί:  $\frac{1}{2}, \frac{1}{15}, \frac{1}{32}$  εἶναι ὀροι ἀρμονικῆς προόδου καί ποῖας;

### III. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΠΡΟΟΔΟΙ

§ 83. **Ὁρισμοί.**— Ὡς θεωρήσουμε τήν ἀκολουθία:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

Παρατηροῦμε ὅτι κάθε ὀρος τῆς, ἀπό τό δεύτερο καί μετά, προκύπτει ἂν πολλαπλασιάσουμε τόν προηγούμενό του μέ ἕνα σταθερό ἀριθμό, πού στήν προκειμένη περίπτωση εἶναι ὁ ἀριθμός  $\frac{1}{2}$ .

Ἐπίσης, ἂν θεωρήσουμε τήν ἀκολουθία: 2, -4, 8, -16, 32, -64, ..., βλέπουμε πάλι πῶς κάθε ὀρος τῆς —ἐκτός φυσικά ἀπό τόν πρῶτο— προκύπτει ἂν πολλαπλασιάσουμε τόν προηγούμενό του μέ τό -2.

Παρατηροῦμε λοιπόν πῶς ὑπάρχουν ἀκολουθίες μέ τήν ἰδιότητα: κάθε ὀρος τους, ἀπό τό δεύτερο καί μετά, προκύπτει ἂν πολλαπλασιάσουμε τόν προηγούμενό του ἐπὶ ἕνα σταθερό ἀριθμό πού τόν λέμε **λόγο** καί τόν συμβολίζουμε συνήθως καί ἐδῶ μέ τό γράμμα  $\omega$ . Τίς ἀκολουθίες μέ αὐτή τήν ἰδιότητα τίς ὀνομάζουμε **γεωμετρικές προόδους**. Πιο γενικά μπορούμε νά ποῦμε τώρα ὅτι: **Μία ἀκολουθία ἀριθμῶν:**  $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$  (1)  
θά λέμε ὅτι εἶναι **μία γεωμετρική πρόοδος**, τότε καί μόνο τότε, ἂν ὑπάρχει ἀριθμός  $\omega$  τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει:

$$a_{n+1} = a_n \cdot \omega, \text{ γιά κάθε } n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Οἱ ὀροι τῆς ἀκολουθίας (1) λέγονται **διαδοχικοὶ ὀροι** τῆς γεωμετρικῆς προόδου καί ὁ  $a_n$  λέγεται **νιστός ὀρος** ἢ **ὀρος  $n$ -τάξεως** τῆς προόδου.

Μία γεωμετρική πρόοδος μέ ὀρους διαφορετικούς ἀπό τό μηδέν λέγεται **ἐπίσης καί πρόοδος κατὰ πηλίκο**, γιατί ἀπό τή (2) ἔχουμε:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \dots = \omega \text{ (σταθ.)} \quad (3)$$

Ἡ (3) μᾶς ὁδηγεῖ νά δώσουμε γιά τή γεωμετρική πρόοδο καί τόν ἐξῆς ὀρισμό:

**Γεωμετρική πρόοδος (ἢ πρόοδος κατὰ πηλίκο)** εἶναι **μία ἀκολουθία ἀριθμῶν**, διαφόρων τοῦ μηδενός, τῆς ὁποίας τό πηλίκο  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$  δύο ὁποιοδήποτε διαδοχικῶν ὀρων τῆς εἶναι σταθερό. Τό σταθερό αὐτό πηλίκο εἶναι ὁ **λόγος** τῆς γεωμετρικῆς προόδου.

Δίνουμε τώρα καί τόν ἐξῆς ὀρισμό:

Μία γεωμετρική πρόοδος καί γενικότερα μία ἀκολουθία  $a_n, n = 1, 2, \dots$  λέγεται **ἀπολύτως αὐξουσα**, ἂν ἡ ἀκολουθία  $|a_n|, n = 1, 2, \dots$  εἶναι αὐξουσα, δηλ. ἂν ἰσχύει:

$$|a_{n+1}| > |a_n|, \forall n \in \mathbb{N}$$

καί **ἀπολύτως φθίνουσα**, ἂν ἰσχύει:  $|a_{n+1}| < |a_n|, \forall n \in \mathbb{N}.$



Από τον παραπάνω ορισμό και την (3) έχουμε ότι:

α). Αν  $|\omega| > 1$ , τότε η γεωμ. πρόοδος (1) είναι **απολύτως αύξουσα**.

β). Αν  $0 < |\omega| < 1$ , τότε η γεωμ. πρόοδος (1) είναι **απολύτως φθίνουσα**.

Έτσι, π.χ. η πρόοδος:  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$  είναι απολύτως φθίνουσα, επειδή  $|\omega| = \frac{1}{2} < 1$ , ενώ η γεωμ. πρόοδος:  $2, -4, 8, -16, \dots$  είναι απολύτως αύξουσα, επειδή:  $|\omega| = |-2| = 2 > 1$ .

**Παρατήρηση.** Αν  $|\omega| = 1$ , δηλαδή  $\omega = \pm 1$  έχουμε:

(i). Για  $\omega = 1$  η γεωμ. πρόοδος είναι μία σταθερή ακολουθία, επειδή τότε θα έχουμε:  $a_{n+1} = a_n$  για κάθε  $n = 1, 2, \dots$ . Ως σταθερή ακολουθία η γεωμ. πρόοδος (1) είναι τότε συγχρόνως και αύξουσα και φθίνουσα.

(ii). Για  $\omega = -1$  η γεωμ. πρόοδος είναι απολύτως σταθερή, επειδή τότε θα έχουμε:  $|a_{n+1}| = |a_n \cdot \omega| = |a_n| \cdot |\omega| = |a_n| \cdot |-1| = |a_n| = |a_1|$ , για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Σ' αυτή την περίπτωση, δηλ. αν  $\omega = -1$ , η γεωμ. πρόοδος είναι συγχρόνως και απολύτως αύξουσα και απολύτως φθίνουσα.

#### ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ

**§ 84. Ιδιότητα I.**—Ο νιοστός όρος  $a_n$  σέ μία γεωμετρική πρόοδο που έχει πρώτο όρο  $a_1$  και λόγο  $\omega \neq 0$ , βρίσκεται αν πολλαπλασιάσουμε τον πρώτο της όρο ( $a_1$ ) με δύναμη του λόγου  $\omega$ , ή οποία έχει εκθέτη τον αριθμό που φανερώνει το πλήθος των όρων που προηγούνται του  $a_n$ .

Δηλαδή:  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = a_1 \cdot \omega^{n-1}$  (1)

**Απόδειξη.** Από την αναδρομική σχέση (2) της § 83 για  $n = 1, 2, \dots, n-1$ , λαμβάνουμε:  $a_2 = a_1 \omega, a_3 = a_2 \omega, a_4 = a_3 \omega, \dots, a_n = a_{n-1} \omega$ .

Αν τώρα τις σχέσεις αυτές τις πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη και άπλοποιήσουμε με τους κοινούς παράγοντες που εμφανίζονται στα δύο μέλη προκύπτει η (1).

**Σημείωση.** Μία πιο αυστηρή απόδειξη γίνεται με τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής ως εξής:

Για  $n = 1$  ή (1) προφανώς ισχύει.

Έστω ότι ισχύει η (1) για  $n = k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), δηλ. έστω ότι ισχύει:  $a_k = a_1 \omega^{k-1}$ .

Από την τελευταία προκύπτει:  $a_k \cdot \omega = a_1 \cdot \omega^{k-1} \cdot \omega = a_1 \omega^k$ . Αλλά  $a_k \cdot \omega = a_{k+1}$ , οπότε έχουμε:  $a_{k+1} = a_1 \cdot \omega^k = a_1 \cdot \omega^{(k+1)-1}$ .

δηλ. η (1) ισχύει και για  $n = k + 1$ . Συνεπώς, σύμφωνα με το θεώρημα της τέλειας επαγωγής, η (1) ισχύει για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

**Εφαρμογές. 1η:** Νά βρείτε τον 7ο όρο της γεωμ. προόδου:  $\frac{1}{2}, 1, 2, 4, \dots$

**Λύση.** Έχουμε:  $a_1 = \frac{1}{2}, \omega = 2, n = 7, a_7 =$

Εφαρμόζοντας τον τύπο (1) γι' αυτές τις τιμές των  $a_1, \omega$  και  $n$  βρίσκουμε:

$$a_7 = a_1 \cdot \omega^6 = \frac{1}{2} \cdot 2^6 = 2^5 = 32.$$

**2η:** Σέ μία γεωμετρική πρόοδο είναι  $a_1 = 6, \omega = 2$  και  $a_n = 3072$ . Νά βρείτε το  $n$ .

**Λύση.** Έχουμε:  $a_1 = 6, \omega = 2, a_n = 3072, n =$

Εφαρμόζοντας τον τύπο (1) γι' αυτές τις τιμές των  $a_1, \omega$  και  $a_n$  βρίσκουμε:  $3072 = 6 \cdot 2^{n-1}$ , δηλαδή:  $2^{n-1} = 512$ .

Αλλά  $512 = 2^9$ , οπότε η τελευταία σχέση γράφεται:

$$2^{n-1} = 2^9. \text{ Άρα } n-1 = 9 \text{ και συνεπώς } n = 10.$$

**Παρατηρήσεις.** 1) Από την παραπάνω ιδιότητα συμπεραίνουμε ότι: μία γεωμ. πρόοδος είναι τελείως ορισμένη, όταν δίνονται ο πρώτος της όρος  $a_1 = a$  και ο λόγος της  $\omega$ . Τότε οι όροι της προόδου θα είναι:

$$\begin{array}{cccccc} \text{1ος όρος,} & \text{2ος όρος,} & \text{3ος όρος,} & \text{4ος όρος,} & \text{5ος όρος,} & \dots \\ a & a\omega & a\omega^2 & a\omega^3 & a\omega^4 & \dots \end{array}$$

2) Από τον τύπο:  $a_n = a_1 \cdot \omega^{n-1}$  συνάγεται ότι: αν ξέρουμε τους τρεις από τους αριθμούς  $a_n, a_1, \omega$  και  $n$  μπορούμε να προσδιορίσουμε και τον τέταρτο.

3) Αν για μία ακολουθία  $a_n, n = 1, 2, \dots$  ισχύει:  $a_n = a_1 \cdot \omega^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$ , τότε η ακολουθία ( $a_n$ ) είναι μία γεωμετρική πρόοδος. Πράγματι, τότε θα έχουμε:

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = a_1 \omega^{n-1} \Rightarrow \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = a_1 \omega^n \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_n \cdot \omega = a_1 \omega^n \end{cases} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = a_n \cdot \omega.$$

4) Έχοντας υπόψη την παρατήρηση 3 ή ιδιότητα I διατυπώνεται πιο γενικά ως εξής: **Αναγκαία και ικανή συνθήκη** για να είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο  $\omega$  μία ακολουθία  $a_n, n = 1, 2, \dots$  είναι ή:  $a_n = a_1 \cdot \omega^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$ .

**\* § 85. Πόρισμα.**—Αν μία ακολουθία  $a_n, n = 1, 2, \dots$  είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο  $\omega (\neq 0)$ , τότε για κάθε  $n, m \in \mathbb{N}$  με  $m < n$  ισχύουν:

$$\text{i) } a_{1+m} = a_1 \cdot \omega^m$$

$$\text{ii) } a_n = a_{n-m} \cdot \omega^m$$

$$\text{iii) } a_{n-m} = a_n \cdot \omega^{-m}.$$

Η απόδειξη της (i) προκύπτει άμέσως από τη σχέση  $a_n = a_1 \cdot \omega^{n-1}$ , αρκεί να θέσουμε  $n = 1 + m$ . Για να αποδείξουμε τις (ii) και (iii) παρατηρούμε ότι:

$$a_{n-m} = a_1 \cdot \omega^{n-m-1} = a_1 \cdot \omega^{n-1} \cdot \omega^{-m} = a_n \cdot \omega^{-m},$$

δηλαδή η (iii), και συνεπώς:

$$a_n = a_{n-m} \cdot \omega^m, \text{ δηλαδή ή (ii).}$$

**\* § 86. Ιδιότητα II.**—Αν μία ακολουθία  $a_n, n = 1, 2, \dots$  είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο  $\omega \neq 0$ , τότε για κάθε  $n, m \in \mathbb{N}$  με  $m < n$  ισχύει:

$$a_{1+m} \cdot a_{n-m} = a_1 \cdot a_n \quad (2)$$

Η απόδειξη της (2) είναι άμεση συνέπεια των (i) και (iii) του προηγούμενου πορίσματος.

**Παρατήρηση.** Η παραπάνω ιδιότητα διατυπώνεται συχνά ως εξής: Σέ πεπερασμένο



πλήθος διαδοχικών όρων μιας γεωμετρικής προόδου, τό γινόμενο δύο όρων που «ισαπέχουν» από τούς «άκρους» όρους είναι ίσο μέ τό γινόμενο των «άκρων» όρων. Έτσι έχουμε:

$$\alpha_2 \cdot \alpha_{n-1} = (\alpha_1 \cdot \omega) \left( \frac{\alpha_n}{\omega} \right) = \alpha_1 \alpha_n$$

$$\alpha_3 \cdot \alpha_{n-2} = (\alpha_1 \omega^2) \left( \frac{\alpha_n}{\omega^2} \right) = \alpha_1 \alpha_n \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Ειδικότερα στην περίπτωση που τό πλήθος των όρων είναι περιττό, όποτε υπάρχει «μεσαίος» όρος, τότε ό όρος αυτός είναι μέσος ανάλογος των άκρων όρων (γιατί;).

Άμεση συνέπεια της ιδιότητας II είναι τό επόμενο πόρισμα:

**\* § 87. Πόρισμα.**— Τό γινόμενο  $\Pi_n = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$  των  $n$  πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου μάς τό δίνει ό τύπος:

$$\Pi_n^2 = (\alpha_1 \cdot \alpha_n)^n \quad (1)$$

**Σημείωση.** Τόν τύπο (1) μπορούμε νά τόν γράψουμε καί ως εξής:

$$\Pi_n = \alpha_1^n \cdot \omega^{\frac{n(n-1)}{2}}, \text{ όπου } \omega \text{ είναι ό λόγος της προόδου (γιατί;).} \quad (2)$$

**\* § 88. Ιδιότητα III.**— Άναγκαία καί ικανή συνθήκη γιά νά είναι μία ακολουθία  $(\alpha_n)$  μέ  $\alpha_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$  γεωμετρική πρόοδος είναι ή:

$$\alpha_n^2 = \alpha_{n-1} \cdot \alpha_{n+1} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

**Άπόδειξη.** Έστω ότι ή ακολουθία  $(\alpha_n)$  είναι μία γεωμετρική πρόοδος μέ λόγο  $\omega \neq 0$ , τότε, σύμφωνα μέ τόν όρισμό που δώσαμε στην § 83, γιά κάθε  $n \geq 2$  θά έχουμε:

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \omega = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}, \text{ όποτε: } \alpha_n^2 = \alpha_{n-1} \cdot \alpha_{n+1} \quad (1)$$

**Άντίστροφα,** έστω ότι ισχύει ή (1) καί ότι  $\alpha_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . Τότε θά έχουμε:

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \text{ γιά κάθε } n = 2, 3, \dots$$

καί σύμφωνα μέ τό δεύτερο όρισμό που δώσαμε γιά τή γεωμετρική πρόοδο, ή ακολουθία  $(\alpha_n)$  είναι γεωμετρική πρόοδος.

Άμεση συνέπεια της παραπάνω προτάσεως είναι τό επόμενο πόρισμα

**\* § 89. Πόρισμα.**— Άναγκαία καί ικανή συνθήκη, γιά νά είναι τρεις αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$ , διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου, είναι:

$$\beta^2 = \alpha \gamma \quad (1)$$

Σ' αυτή τήν περίπτωση ό  $\beta$  λέγεται γεωμετρικός μέσος ή μέσος ανάλογος των  $\alpha$  καί  $\gamma$ .

Πιο γενικά: Άν έχουμε  $n$  αριθμούς  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , ονομάζουμε γεωμετρικό μέσο αυτών των  $n$  αριθμών, καί τόν συμβολίζουμε μέ  $M_\Gamma$ , τόν αριθμό:

$$M_\Gamma = \sqrt[n]{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n} \quad (2)$$

**\* § 90. Ιδιότητα IV.**— Τό άθροισμα  $\Sigma_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$  των  $n$  πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου μέ λόγο  $\omega \neq 1$  μάς τό δίνει ό τύπος:

$$\Sigma_n = \frac{\alpha_n \omega - \alpha_1}{\omega - 1} \quad (1)$$

**Άπόδειξη.** Πολλαπλασιάζουμε καί τά δύο μέλη της ισότητας:

$$\Sigma_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \quad (2)$$

επί τό λόγο  $\omega$ , όποτε έχουμε:

$$\omega \Sigma_n = \alpha_1 \omega + \alpha_2 \omega + \cdots + \alpha_n \omega \quad (3)$$

Άν τώρα αφαιρέσουμε κατά μέλη από τήν (3) τή (2) καί λάβουμε υπόψη ότι:  $\alpha_1 \omega = \alpha_2, \alpha_2 \omega = \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1} \omega = \alpha_n$ , μετά τήν άναγωγή των όμοιων όρων βρίσκουμε:

$$\omega \Sigma_n - \Sigma_n = \alpha_n \omega - \alpha_1 \Rightarrow (\omega - 1) \Sigma_n = \alpha_n \omega - \alpha_1 \Rightarrow \Sigma_n = \frac{\alpha_n \omega - \alpha_1}{\omega - 1}, (\omega \neq 1).$$

**Άσκηση.** Νά αποδείξετε τόν τύπο (1) καί μέ τή μέθοδο της τέλεις επαγωγής.

**\* § 91. Πόρισμα.**— Τό άθροισμα  $\Sigma_n \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$  των  $n$  πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου μέ λόγο  $\omega \neq 1$  δίνεται, συναρτήσει του πρώτου όρου  $\alpha_1$ , του λόγου  $\omega$  καί του πλήθους  $n$  των όρων του, από τόν τύπο:

$$\Sigma_n = \frac{\alpha_1 (\omega^n - 1)}{\omega - 1} \quad (1)$$

Ό τύπος (1) δίνει τό άθροισμα των  $n$  πρώτων όρων της γεωμ. προόδου, χωρίς νά είναι ανάγκη νά βρούμε τό νιοστό της όρο.

**Έφαρμογή.** Νά υπολογίσετε τό άθροισμα των όκτώ πρώτων όρων της προόδου:

$$2, 6, 18, 54, \dots$$

**Λύση.** Στόν τύπο (1) (§ 91) θέτοντας  $\alpha_1 = 2, \omega = 3, n = 8$  έχουμε:

$$\Sigma_8 = \frac{2(3^8 - 1)}{3 - 1} = \frac{2(6561 - 1)}{2} = 6560.$$

**Παρατηρήσεις:** α'). Άν σέ μία γεωμετρική πρόοδο είναι  $\omega = 1$ , οί τύποι (1) των § 90 καί 91 γιά τό  $\Sigma_n$  δέν μπορούν νά εφαρμοστούν (γιατί;). Σ' αυτή τήν ειδική περίπτωση, δηλ. αν  $\omega = 1$ , ή πρόοδος έχει όλους τούς όρους ίσους μέ τόν πρώτο όρο της καί συνεπώς τό άθροισμα των  $n$  πρώτων όρων της ισούται μέ:

$$\Sigma_n = \alpha_1 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_1 = n \cdot \alpha_1, \text{ δηλαδή } \Sigma_n = n \alpha_1.$$

β'). Οί δύο τύποι:

$$\alpha_n = \alpha_1 \omega^{n-1} \quad (1) \quad \text{καί} \quad \Sigma_n = \frac{\alpha_n \omega - \alpha_1}{\omega - 1} \quad (2)$$

περιέχουν πέντε άγνώστους (αριθμούς), τούς:  $\alpha_1, \alpha_n, \omega, n, \Sigma_n$ . Άν, λοιπόν, μάς δοθούν οί



τρεις απ' αυτους τους αριθμους, τότε μπορούμε να βρούμε τους υπόλοιπους δύο επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2). Η επίλυση αυτού του συστήματος δεν είναι πάντοτε δυνατή. Μερικά από τα προβλήματα που παρουσιάζονται επιλύονται με τη βοήθεια των λογαρίθμων, για τους οποίους θα κάνουμε λόγο σ' ένα από τα επόμενα κεφάλαια.

**Εφαρμογές: 1η.** Ο όγδοος όρος μιας γεωμετρικής προόδου ισούται με 384 και ο λόγος της με 2. Να βρείτε τον πρώτο όρο της και το άθροισμα των οκτώ πρώτων όρων της.

**Λύση.** Έστω ότι είναι  $\alpha_1$  ο πρώτος όρος,  $\omega$  ο λόγος και  $\alpha_n$  ο νιοστός όρος της γεωμ. προόδου. Από τους τύπους  $\alpha_n = \alpha_1 \omega^{n-1}$  και  $\Sigma_n = \frac{\alpha_n \omega - \alpha_1}{\omega - 1}$  για  $\omega = 2$ ,  $n = 8$ ,  $\alpha_n = 384$  έχουμε:

$$384 = \alpha_1 \cdot 2^7 \quad (1) \quad \text{και} \quad \Sigma_8 = \frac{384 \cdot 2 - \alpha_1}{2 - 1} \quad (2)$$

Από την (1) βρίσκουμε  $\alpha_1 = 3$ .

Αν αντικαταστήσουμε στη (2) το  $\alpha_1$  με το ίσο του βρίσκουμε:  $\Sigma_8 = \frac{384 \cdot 2 - 3}{2 - 1} = 765$ .

**2η.** Σε μία γεωμετρική πρόοδο με πρώτο όρο το 5 ο έβδομος όρος της ισούται με 3645. Να βρείτε την πρόοδο και να υπολογίσετε το άθροισμα των επτά πρώτων όρων της.

**Λύση.** Από τους τύπους  $\alpha_n = \alpha_1 \omega^{n-1}$  και  $\Sigma_n = \frac{\alpha_n \omega - \alpha_1}{\omega - 1}$ , με  $\alpha_1 = 5$ ,  $n = 7$  και  $\alpha_7 = 3645$  λαμβάνουμε αντίστοιχως:

$$3645 = 5 \cdot \omega^6 \quad (1) \quad \text{και} \quad \Sigma_7 = \frac{3645 \cdot \omega - 5}{\omega - 1} \quad (2)$$

Από την (1) έχουμε:  $\omega^6 = 729$ , απ' όπου για  $\omega \in \mathbb{R}$  βρίσκουμε:  $\omega = \pm 3$ .

Για  $\omega = 3$  ή πρόοδος είναι: 5, 15, 45, 135, ...

Για  $\omega = -3$  ή πρόοδος είναι: 5, -15, 45, -135, ...

Η πρώτη είναι γνησίως αύξουσα, ενώ η δεύτερη δεν είναι ούτε αύξουσα ούτε φθίνουσα, είναι όμως απόλυτως αύξουσα και μάλιστα γνησίως.

Από τη (2) με αντικατάσταση του  $\omega$  με τις τιμές του +3 και -3 βρίσκουμε αντίστοιχως:

$$\Sigma_7 = \frac{3645 \cdot 3 - 5}{3 - 1} = 5465, \quad \Sigma_7 = \frac{3645(-3) - 5}{-3 - 1} = 2735.$$

Το πρώτο άθροισμα αναφέρεται στην πρόοδο (3) και το δεύτερο στην πρόοδο (4).

**§ 92. Παρεμβολή γεωμετρικών ενδιάμεσων. — α). Όρισμοί.** Δίνονται δύο αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta$  ( $\alpha, \beta \neq 0$ ). Οι διαφορετικοί του μηδενός αριθμοί  $x_1, x_2, \dots, x_m$  λέγονται γεωμετρικοί ενδιάμεσοι των  $\alpha$  και  $\beta$ , τότε και μόνο τότε, αν οι αριθμοί:

$$\alpha, x_1, x_2, \dots, x_m, \beta$$

είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

**Παρεμβολή  $\mu$  γεωμετρικών ενδιάμεσων** μεταξύ των αριθμών  $\alpha$  και  $\beta$  ονομάζουμε την εύρεση  $\mu$  αριθμών:  $x_1, x_2, \dots, x_\mu$  διαφορετικών από το μηδέν, τέτοιων, ώστε οι:  $\alpha, x_1, x_2, \dots, x_\mu, \beta$  να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

**β). Το πρόβλημα της γεωμετρικής παρεμβολής.** Να παρεμβληθούν  $\mu$  γεωμετρικοί ενδιάμεσοι μεταξύ των αριθμών  $\alpha$  και  $\beta$ .

**Επίλυση.** Για να βρούμε τους  $\mu$  γεωμετρικούς ενδιάμεσους είναι φανερό ότι αρκεί να υπολογίσουμε το λόγο  $\omega$  της γεωμ. προόδου, στην οποία ανή-

κουν οι αριθμοί:  $\alpha, x_1, x_2, \dots, x_\mu, \beta$ . Ο  $\beta$  κατέχει την τάξη  $n = \mu + 2$  και συνεπώς (§ 84) θα έχουμε:

$$\beta = \alpha \cdot \omega^{(\mu+2)-1} = \alpha \cdot \omega^{\mu+1}, \text{ δηλαδή: } \alpha \cdot \omega^{\mu+1} - \beta = 0 \quad (1)$$

Ωστε για να προσδιορίσουμε το «λόγο παρεμβολής»  $\omega$  αρκεί να επιλύσουμε τη διώνυμη εξίσωση (1). Η επίλυση της (1) γίνεται με τη βοήθεια του τύπου του De Moivre, για τον οποίο κάνουμε λόγο στο επόμενο κεφάλαιο.

Αν  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$  και ζητάμε μόνο τις πραγματικές λύσεις της (1), δηλαδή  $\omega \in \mathbb{R}$ , τότε:

i). Αν  $\mu$  άρτιος φυσικός αριθμός (όποτε  $\mu + 1$  περιττός), ή (1) δέχεται μία μόνο πραγματική λύση, την:

$$\omega = \sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}} \quad (2)$$

και είναι:  $\omega > 0$ , αν  $\alpha\beta > 0$  και  $\omega < 0$ , αν  $\alpha\beta < 0$ .

ii). Αν  $\mu$  περιττός φυσικός αριθμός (όποτε  $\mu + 1$  άρτιος) και  $\alpha\beta > 0$ , ή (1) δέχεται δύο πραγματικές λύσεις, τις:

$$\omega = \sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}} \quad \text{και} \quad \omega = -\sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}} \quad (3)$$

iii). Αν  $\mu$  περιττός και  $\alpha\beta < 0$ , δεν ορίζονται από την (1)  $\omega \in \mathbb{R}$ .

Οι παραπάνω τύποι (2) και (3) συνοψίζονται στον επόμενο τύπο:

$$\omega = \varepsilon \cdot \sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}} \quad (4)$$

όπου  $\varepsilon = 1$ , όταν  $\mu$  άρτιος και  $\varepsilon = \pm 1$ , όταν  $\mu$  περιττός, για  $\omega \in \mathbb{R}$ .

Ο τύπος (4) ονομάζεται τύπος παρεμβολής γεωμετρικών ενδιάμεσων ή άλλως τύπος της γεωμετρικής παρεμβολής.

Αφού από τον τύπο (4) όρισαμε το λόγο  $\omega$ , οι αριθμοί που ζητούσαμε είναι:

$$x_1 = \alpha\omega, \quad x_2 = \alpha\omega^2, \quad \dots, \quad x_\mu = \alpha\omega^\mu.$$

**Εφαρμογή.** Να παρεμβάλετε τρεις πραγματικούς γεωμ. ενδιάμεσους μεταξύ των αριθμών 3 και 48.

**Λύση.** Από τον τύπο (4) για  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 48$  και  $\mu = 3$  λαμβάνουμε:

$$\omega = \pm \sqrt[4]{\frac{48}{3}} = \pm \sqrt[4]{16}, \text{ δηλαδή: } \omega = \pm 2.$$

Άρα:  $x_1 = 6, x_2 = 12, x_3 = 24$  και  $x'_1 = -6, x'_2 = 12, x'_3 = -24$ .

**§ 93. Συμμετρική παράσταση ενός πεπερασμένου πλήθους όρων μίας γεωμετρικής προόδου.**—Για να περιορίσουμε τους άγνωστους που εμφανίζονται σε διάφορα προβλήματα γεωμετρικών προόδων, ιδιαίτερα όταν ξέρουμε το γινόμενο αριθμών



οί όποιοί είναι διαδοχικοί όροι μιός γεωμετρικής προόδου, είναι σκόπιμο νά παραστήσουμε τούς αριθμούς αυτούς ως εξής:

**Περίπτωση 1η:** Τό πλήθος τών άγνωστων όρων είναι περιττό.

"Αν τό πλήθος τών άγνωστων όρων είναι περιττό, έστω  $2k + 1, k \in \mathbb{N}$ , τότε υπάρχει «μεσαίος» όρος, τόν όποιο «συμφέρει» νά τόν συμβολίσουμε μέ  $x$ , όποτε, αν ό λόγος τής προόδου είναι  $\omega \neq 0$ , γράφουμε τούς όρους πού ζητάμε ως εξής:

$$\frac{x}{\omega^k}, \dots, \frac{x}{\omega^2}, \frac{x}{\omega}, x, x\omega, x\omega^2, \dots, x\omega^k \quad (1)$$

**Περίπτωση 2η:** Τό πλήθος τών άγνωστων όρων είναι άρτιο.

"Αν τό πλήθος τών άγνωστων όρων είναι άρτιο, έστω  $2k, k \in \mathbb{N}$ , τότε υπάρχουν δύο «μεσαίοι» όροι και τό γινόμενό τους είναι ίσο μέ τό γινόμενο τών άκρων όρων. Στήν περίπτωση αυτή γιά νά παραστήσουμε τούς όρους πού ζητάμε διακρίνουμε τίς εξής δύο ύποπεριπτώσεις:

**2α).** Αναζητάμε αν υπάρχουν γεωμ. πρόοδοι μέ λόγο θετικό, στίς όποιες ανήκουν οί  $2k$  τό πλήθος αριθμοί. Τότε «συμφέρει» νά συμβολίσουμε τούς δύο «μεσαίους» όρους μέ:  $\frac{x}{\lambda}$  και  $x\lambda$ , όποτε ό λόγος  $\omega$  τής γεωμ. προόδου είναι:  $\omega = x\lambda: \frac{x}{\lambda} = \lambda^2$  και συνεπώς έχουμε:

$$\dots, \frac{x}{\lambda^5}, \frac{x}{\lambda^3}, \frac{x}{\lambda}, x\lambda, x\lambda^3, x\lambda^5, \dots \quad (2\alpha)$$

**2β).** Αναζητάμε αν υπάρχουν γεωμ. πρόοδοι μέ λόγο άρνητικό, στίς όποιες ανήκουν οί  $2k$  τό πλήθος αριθμοί. Τότε «συμφέρει» νά συμβολίσουμε τούς δύο «μεσαίους» όρους μέ:  $\frac{x}{\lambda}$  και  $-x\lambda$ , όποτε ό λόγος  $\omega$  τής γεωμ. προόδου είναι:  $\omega = (-x\lambda): \frac{x}{\lambda} = -\lambda^2$  και συνεπώς έχουμε:

$$\dots, \frac{x}{\lambda^5}, -\frac{x}{\lambda^3}, \frac{x}{\lambda}, -x\lambda, x\lambda^3, -x\lambda^5, \dots \quad (2\beta)$$

**Σχόλιο.** Όταν παριστάνουμε τούς όρους μιός γεωμ. προόδου μέ τούς συμβολισμούς (1), (2α) και (2β) είναι φανερό ότι σιωπηρά έχουμε ύποθέσει ότι ό λόγος  $\omega$  τής προόδου είναι διάφορος από τό μηδέν. "Αν τό αντίστοιχο πρόβλημα έχει και λύση μέ  $\omega = 0$ , τότε είναι φανερό ότι τή λύση αυτή θά πρέπει νά τήν αναζητήσουμε ιδιαιτέρως, καθόσον ή γεωμ. πρόοδος τότε είναι:  $\alpha, 0, 0, \dots$

**Εφαρμογές. 1η:** Νά βρείτε τέσσερις πραγματικούς αριθμούς πού νά είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν είναι γνωστό ότι: τό γινόμενό τους ίσούται μέ 729 και ό τέταρτος ίσούται μέ τό γινόμενο τών δύο μεσαίων.

**Λύση.** Πρώτα απ' όλα παρατηρούμε ότι δέν υπάρχει λύση μέ λόγο τής προόδου τό μηδέν. Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις:

**i).** Αναζητάμε αν υπάρχουν γεωμ. πρόοδοι μέ λόγο  $\omega > 0$ . Τότε, σύμφωνα μέ τήν (2α), παριστάνουμε τούς τέσσερις αριθμούς ως εξής:

$$\frac{x}{\lambda^3}, \frac{x}{\lambda}, x\lambda, x\lambda^3 \quad (x, \lambda \in \mathbb{R}).$$

Έχουμε τό σύστημα:

$$\left. \begin{matrix} x^4 = 729 \\ x\lambda^3 = x^2 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} x^2 = 27 \\ \lambda^3 = x \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} x = \pm 3\sqrt{3} \\ \lambda^3 = x \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} x = \pm 3\sqrt{3} \\ \lambda^3 = \pm 3\sqrt{3} \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} x = \pm 3\sqrt{3} \\ \lambda = \pm \sqrt{3} \end{matrix} \right\}$$

Γιά  $x = 3\sqrt{3}$  και  $\lambda = \sqrt{3}$  οί αριθμοί πού ζητάμε είναι: 1, 3, 9, 27.

Γιά  $x = -3\sqrt{3}$  και  $\lambda = -\sqrt{3}$  βρίσκουμε πάλι τούς ίδιους αριθμούς.

**ii).** Αναζητάμε τώρα αν υπάρχουν γεωμ. πρόοδοι μέ λόγο  $\omega < 0$ . Τότε, σύμφωνα μέ τήν (2β), παριστάνουμε τούς τέσσερις αριθμούς ως εξής:

$$-\frac{x}{\lambda^3}, \frac{x}{\lambda}, -x\lambda, x\lambda^3 \quad (x, \lambda \in \mathbb{R})$$

Έχουμε τότε τό σύστημα:

$$\left. \begin{matrix} x^4 = 729 \\ x\lambda^3 = -x^2 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} x^2 = 27 \\ \lambda^3 = -x \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} x = \pm 3\sqrt{3} \\ \lambda^3 = -x \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} x = \pm 3\sqrt{3} \\ \lambda^3 = \mp 3\sqrt{3} \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} x = \pm \sqrt{3} \\ \lambda = \mp \sqrt{3} \end{matrix} \right\}$$

Γιά  $x = 3\sqrt{3}$  και  $\lambda = -\sqrt{3}$  οί αριθμοί πού ζητάμε είναι: 1, -3, 9, -27.

Γιά  $x = -3\sqrt{3}$  και  $\lambda = \sqrt{3}$  βρίσκουμε πάλι τούς αριθμούς: 1, -3, 9, -27.

"Αρα οί αριθμοί πού ζητάμε είναι οί: 1, 3, 9, 27 και 1, -3, 9, -27.

**2η.** Νά βρείτε γεωμετρική πρόοδο πού νά έχει τήν ιδιότητα: τό άθροισμα τών τριών πρώτων όρων της νά ίσούται μέ 1 και τό διπλάσιο του δεύτερου όρου της σύν ένα νά ίσούται μέ τόν πρώτο όρο της.

**Λύση.** Σύμφωνα μέ τήν πρώτη περίπτωση παριστάνουμε τούς τρεις πρώτους όρους τής γεωμ. προόδου ως εξής:  $\frac{x}{\omega}, x, x\omega$ , όπου ύποθέτουμε ότι  $\omega \neq 0$ .

Έχουμε τότε τό σύστημα:

$$\left. \begin{matrix} \frac{x}{\omega} + x + x\omega = 1 \\ 2x + 1 = \frac{x}{\omega} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} x = -\frac{3}{7} \\ \omega = -3 \end{matrix} \right\}$$

"Αρα μία λύση του προβλήματος είναι ή γεωμετρική πρόοδος:

$$\frac{1}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{9}{7}, \dots, \frac{1}{7} (-3)^{n-1}, \dots$$

Έξετάζουμε τώρα μήπως τό πρόβλημα έχει και λύση μέ  $\omega = 0$ . Τότε μία τέτοια γεωμ. πρόοδος θά ήταν τής μορφής:  $\alpha, 0, 0, \dots$ , όπου  $\alpha$  ό πρώτος όρος της. Αμέσως βρίσκουμε ότι μία τέτοια πρόοδος είναι ή: 1, 0, 0, ..., ή όποία άποτελεί μία δεύτερη λύση του προβλήματος. Άλλη λύση δέν υπάρχει (γιατί;).

**§ 94. Τό άθροισμα τών άπειρων όρων άπολύτως φθίνουσας γεωμετρικής προόδου.**— Έστω ή γεωμετρική πρόοδος:

$$\alpha_n = \alpha\omega^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

μέ πρώτο όρο τόν  $\alpha \neq 0$  και λόγο  $\omega$  μέ:  $0 < |\omega| < 1$ .

"Όπως είδαμε και στήν § 83 ή (1) είναι τότε μία άπολύτως φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος, καθόσον είναι:  $|\alpha_{n+1}| < |\alpha_n|$  γιά κάθε  $n = 1, 2, \dots$ , όταν:  $0 < |\omega| < 1$ .

"Ας συμβολίσουμε μέ  $\Sigma_n$  τό άθροισμα τών  $n$  πρώτων όρων τής (1), τό όποιο, όπως είναι γνωστό, μάς τό δίνει ό τύπος:

$$\Sigma_n = \frac{\alpha(\omega^n - 1)}{\omega - 1} \quad (2)$$

$$\text{'Ο τύπος (2) γράφεται: } \Sigma_n = \frac{\alpha\omega^n - \alpha}{\omega - 1} = \frac{\alpha}{1 - \omega} - \frac{\alpha}{1 - \omega} \cdot \omega^n.$$

Έπειδή  $|\omega| < 1$  έπεται ότι:  $\lim \omega^n = 0$  (βλ. § 64, εφαρμ. 1) και συνεπώς:



$$\lim \Sigma_v = \lim \left[ \frac{\alpha}{1-\omega} - \frac{\alpha}{1-\omega} \cdot \omega^v \right] = \frac{\alpha}{1-\omega} - \frac{\alpha}{1-\omega} \cdot \lim \omega^v = \frac{\alpha}{1-\omega}.$$

Ωστε:  $\lim \Sigma_v = \frac{\alpha}{1-\omega}$  (3)

Τό παραπάνω όριο, δηλαδή τόν πραγματικό αριθμό  $\frac{\alpha}{1-\omega}$  στόν οποίο συγκλίνει τό άθροισμα  $\Sigma_v$  τών  $v$  πρώτων όρων μιās απολύτως φθίνουσας γεωμ. προόδου ( $\alpha_v$ ), δηλαδή γεωμετρικής προόδου μέ λόγο  $\omega$ :  $0 < |\omega| < 1$ , τό ονομάζουμε: «άθροισμα τών άπειρων όρων τής απολύτως φθίνουσας γεωμετρικής προόδου (1)».

Τό άθροισμα αυτό τό συμβολίζουμε μέ  $\Sigma_\infty$  ή πιο άπλά μέ  $\Sigma$ . Έτσι έχουμε:

$$\Sigma_\infty \equiv \Sigma = \alpha + \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \dots + \alpha\omega^{v-1} + \dots \underset{\text{ορσ}}{=} \lim \Sigma_v = \frac{\alpha}{1-\omega} \quad (4)$$

Ωστε: τό άθροισμα  $\Sigma$  τών άπειρων όρων μιās γεωμετρικής προόδου μέ πρώτο όρο τόν  $\alpha$  καί λόγο  $\omega$  τέτοιο, ώστε  $0 < |\omega| < 1$  ισούται μέ:  $\frac{\alpha}{1-\omega}$ .

**Σημ.** Άν  $\alpha = 1$ , τότε:  $\Sigma = 1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{v-1} + \dots = \frac{1}{1-\omega}$ .

Π.χ.  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^v} + \dots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$

**Παρατήρηση.** Ό τύπος (4) ισχύει καί γιά  $\omega = 0$ , γιατί τότε τό άθροισμα  $\Sigma$  θά είναι ίσο μέ  $\alpha$  καί όταν  $v \rightarrow +\infty$ . Επίσης ό τύπος (4) ισχύει καί γιά  $\alpha = 0$ .

**Έφαρμογή 1η:** Νά υπολογίσετε τό άθροισμα:  $4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3^2} + \dots + \frac{4}{3^v} + \dots$

**Λύση:** Οί άπειροι προσθετέοι:  $4, \frac{4}{3}, \frac{4}{3^2}, \dots, \frac{4}{3^v}, \dots$  είναι διαδοχικοί όροι μιās γεωμετρικής προόδου πού έχει πρώτο όρο  $\alpha=4$  καί λόγο  $\omega = \frac{1}{3}$ . Έπομένως τό άθροισμα πού ζητάμε μάς τό δίνει ό τύπος (4), δηλαδή:

$$4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3^2} + \dots + \frac{4}{3^v} + \dots = \frac{4}{1-\frac{1}{3}} = 6.$$

**Έφαρμογή 2η.** Νά βρείτε τό κοινό κλάσμα, από τό όποιο παράγεται τό δεκαδικό περιодικό κλάσμα:  $4,513513\dots$

**Λύση.** Τό δεκαδικό περιодικό κλάσμα  $4,513513\dots$  γράφεται:

$$4 + \frac{513}{1000} + \frac{513}{1000^2} + \dots$$

Άλλά:  $\frac{513}{1000} + \frac{513}{1000^2} + \frac{513}{1000^3} + \dots = \frac{\frac{513}{1000}}{1-\frac{1}{1000}} = \frac{513}{999}.$

\*Άρα:  $4,513513\dots = 4 + \frac{513}{999} = \frac{4509}{999}.$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι ό δεκαδικός αριθμός  $4,513513\dots$ , όταν τό πλήθος τών δεκαδικών του ψηφίων αύξάνει άπερίοριστα, τείνει στό ρητό αριθμό  $\frac{4509}{999}$ .

**Ανακεφαλαίωση.** Οί ιδιότητες τών αριθμητικών καί γεωμετρικών προόδων πού άπορρέουν από τίς προηγούμενες παραγράφους συνοψίζονται στόν επόμενο πίνακα:

#### ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

\*Έστω μία αριθμητική πρόοδος:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{v-2}, \alpha_{v-1}, \alpha_v, \alpha_{v+1}, \dots \quad (1)$$

μέ πρώτο όρο τό  $\alpha_1$  καί λόγο  $\omega$ . Τότε:

1. Ό νιοστός όρος  $\alpha_v$  τής (1) δίνεται από τόν τύπο:

$$\alpha_v = \alpha_1 + (v-1)\omega$$

2. Άν είναι  $\omega \neq 0$ , τότε τό άθροισμα  $\Sigma_v$  τών  $v$  πρώτων όρων τής (1) δίνεται από τούς τύπους:

$$(i): \Sigma_v = \frac{(\alpha_v + \alpha_1)v}{2}$$

$$(ii): \Sigma_v = \frac{[2\alpha_1 + (v-1)\omega]v}{2}$$

**Σημ.** Άν είναι  $\omega = 0$ , τότε:  $\Sigma_v = v\alpha_1$ .

3. Ισχύει:

$$\alpha_1 + \alpha_v = \alpha_2 + \alpha_{v-1} = \alpha_3 + \alpha_{v-2} = \dots = \alpha_{1+\mu} + \alpha_{v-\mu}, \quad (\mu < v)$$

**Ειδικά:**  $\alpha_1 + \alpha_3 = 2\alpha_2, \alpha_2 + \alpha_4 = 2\alpha_3,$

$$\alpha_3 + \alpha_5 = 2\alpha_4, \dots, \alpha_v + \alpha_{v+2} = 2\alpha_{v+1}$$

**Συνέπεια:** Άν  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι διαδοχικοί όροι αριθμ. προόδου, τότε ισχύει:

$$2\beta = \alpha + \gamma$$

4. Μέσος αριθμητικός:

$$M_A = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v}{v}$$

5. Τύπος τής αριθμητικής παρεμβολής:

$$\omega' = \frac{\beta - \alpha}{\mu + 1}$$

#### ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

\*Έστω, μία γεωμετρική πρόοδος:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{v-2}, \alpha_{v-1}, \alpha_v, \alpha_{v+1}, \dots \quad (1')$$

μέ πρώτο όρο τό  $\alpha_1$  καί λόγο  $\omega$ . Τότε:

1'. Ό νιοστός όρος  $\alpha_v$  τής (1') δίνεται από τόν τύπο:

$$\alpha_v = \alpha_1 \cdot \omega^{v-1}$$

2'. Άν είναι  $\omega \neq 1$ , τότε τό άθροισμα  $\Sigma_v$  τών  $v$  πρώτων όρων τής (1') δίνεται από τούς τύπους:

$$(i) \Sigma_v = \frac{\alpha_v \omega - \alpha_1}{\omega - 1}, \quad (\omega \neq 1)$$

$$(ii) \Sigma_v = \frac{\alpha_1(\omega^v - 1)}{\omega - 1}, \quad (\omega \neq 1)$$

**Σημ.** Άν είναι  $\omega = 1$ , τότε:  $\Sigma_v = v\alpha_1$ .

3'. Ισχύει:

$$\alpha_1 \cdot \alpha_v = \alpha_2 \cdot \alpha_{v-1} = \alpha_3 \cdot \alpha_{v-2} = \dots = \alpha_{1+\mu} \cdot \alpha_{v-\mu}, \quad (\mu < v)$$

**Ειδικά:**  $\alpha_1 \alpha_3 = \alpha_2^2, \alpha_2 \alpha_4 = \alpha_3^2,$

$$\alpha_3 \alpha_5 = \alpha_4^2, \dots, \alpha_v \alpha_{v+2} = \alpha_{v+1}^2$$

**Συνέπεια:** Άν  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι διαδοχικοί όροι γεωμ. προόδου, τότε ισχύει:

$$\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$$

4. Μέσος γεωμετρικός:

$$M_G = \sqrt[v]{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_v}$$

5'. Τύπος τής γεωμετρικής παρεμβολής:

$$\omega' = \epsilon \cdot \sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}, \quad (\epsilon = \pm 1).$$

#### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Ομάδα Α'. 177.** Νά εξετάσετε άν είναι μονότονες οί επόμενες γεωμετρικές πρόοδοι καί νά καθορίσετε τό είδος μονοτονίας γιά τίς μονότονες άπ' αυτές:



$$\alpha) 12, 6, 3, \dots, \quad \beta) \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, \dots, \quad \gamma) 3, -6, 12, \dots, \quad \delta) -4, \frac{8}{3}, -\frac{16}{9}, \dots$$

178. Δίνεται η γεωμ. πρόοδος: 1, 3, 9, 27, 81, ... Νά αποδείξετε ότι οι διαφορές των διαδοχικών όρων της σχηματίζουν μία νέα γεωμ. πρόοδο. Μήπως αυτή η ιδιότητα ισχύει γενικά για κάθε γεωμ. πρόοδο;

179. Νά προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό  $x$ , όταν είναι γνωστό ότι οι παρακάτω αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου:

$$\alpha) x - 2, 2x, 7x + 4, \quad \beta) 2x - 2, 3x + 6, 12x + 6.$$

180. Νά προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό  $x$ , ώστε οι αριθμοί:  $\alpha + x, \beta + x, \gamma + x$  να είναι διαδοχικοί όροι γεωμ. προόδου. Τι συμβαίνει αν οι  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου;

181. Νά βρείτε το πλήθος  $n$  των όρων που πρέπει να πάρουμε από μία γεωμ. πρόοδο, αν ξέρουμε ότι:

$$\alpha) \alpha_1 = 4, \omega = 4, \Sigma_n = 5460, \quad \beta) \alpha_1 = 13, \alpha_n = 117, \alpha_n = 9477,$$

$$\gamma) \alpha_1 = 4, \alpha_n = 972, \Sigma_n = 1456, \quad \delta) \alpha_n = 81, \omega = \frac{3}{4}, \Sigma_n = 781.$$

182. "Αν οι αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι διαδοχικοί όροι γεωμ. προόδου, νά αποδείξετε ότι:

$$\alpha^2 \beta^3 \gamma^2 \left( \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\gamma^3} \right) = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3.$$

183. "Αν  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  είναι διαδοχικοί όροι μιᾶς γεωμ. προόδου, νά αποδείξετε ότι:

$$1) (\alpha + \delta) \cdot (\beta + \gamma) - (\alpha + \gamma) \cdot (\beta + \delta) = (\beta - \gamma)^2$$

$$2) (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 + (\delta - \beta)^2 = (\alpha - \delta)^2.$$

184. "Αν  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$  και  $M_A, M_G, M_H$  είναι αντίστοιχως ο μέσος αριθμητικός, μέσος γεωμετρικός και μέσος αρμονικός των  $\alpha$  και  $\beta$ , νά αποδείξετε ότι:

$$1) M_G^2 = M_A \cdot M_H \quad \text{και} \quad 2) M_A \geq M_G \geq M_H.$$

185. Νά σχηματίσετε μία γεωμ. πρόοδο, η οποία έχει ως πρώτο όρο της τη μικρότερη ρίζα της εξίσωσης:  $x^3 - 2x^2 - 25x + 50 = 0$  και ως λόγο της μεγαλύτερη ρίζα. "Υστερα νά βρείτε το άθροισμα των  $n$  πρώτων όρων της, αν ως  $n$  πάρουμε το τριπλάσιο της τρίτης ρίζας της παραπάνω εξίσωσης.

186. Νά βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο μιᾶς γεωμ. προόδου, αν είναι γνωστό ότι: το άθροισμα των 4 πρώτων όρων της είναι 40, ενώ το άθροισμα των 8 πρώτων όρων της είναι 3280.

187. Νά βρείτε τις διαστάσεις ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου αν είναι γνωστό ότι αυτές είναι διαδοχικοί όροι γεωμ. προόδου και ότι το άθροισμα όλων των ακμών του είναι 168 και ο όγκος του είναι: 512.

188. Τρεις αριθμοί  $x, y, z$  έχουν άθροισμα 147. "Αν οι  $x, y, z$  είναι διαδοχικοί όροι αριθμ. προόδου και οι  $x, z, y$  γεωμ. προόδου, νά βρείτε αυτούς τους αριθμούς.

189. "Αν οι διάφοροι του μηδενός αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι όροι μιᾶς γεωμ. προόδου τάξεως  $\lambda, \mu$  και  $n$  αντίστοιχως, νά αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\alpha^{n-\lambda} \cdot \beta^{\lambda-\mu} \cdot \gamma^{\mu-1} = 1.$$

190. "Ανάμεσα στις ρίζες της εξίσωσης:  $2x^2 - 5x - 3 = 0$  νά παρεμβάλετε 4 γεωμετρικούς ενδιάμεσους.

191. Σέ μία απολύτως φθίνουσα γεωμ. πρόοδο ο πρώτος όρος της είναι το μισό του αθροίσματος των άπειρων όρων, ενώ το άθροισμα των δύο πρώτων όρων της είναι 20. Νά βρείτε την πρόοδο.

192. Το άθροισμα των 4 πρώτων όρων μιᾶς απολύτως φθίνουσας γεωμ. προόδου είναι 65 και το άθροισμα των άπειρων όρων της είναι 81. Νά βρείτε την πρόοδο.

193. Νά υπολογίσετε τα παρακάτω «άθροισματα»:

$$\alpha) \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \dots, \quad \beta) 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots$$

$$\gamma) \alpha + \beta + \frac{\beta^2}{\alpha} + \frac{\beta^3}{\alpha^2} + \dots \quad (\alpha > \beta > 0).$$

194. "Αν  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$  είναι αντίστοιχως τα άθροισματα των άπειρων όρων των γεωμ. προόδων, καθεμιά από τις οποίες έχει ως πρώτο όρο αντίστοιχως τόν: 1, 2, 3, ...,  $n$  και λόγο αντίστοιχως τόν:  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n+1}$ , νά αποδείξετε ότι:

$$S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n = \frac{n(n+3)}{2}.$$

\* Ομάδα Β'. 195. "Αν  $x, y, z \in \mathbb{R}^+$  και  $M_A, M_G, M_H$  είναι αντίστοιχως ο αριθμητικός, γεωμετρικός και αρμονικός μέσος τους, νά αποδείξετε ότι ισχύει:

$$M_A \geq M_G \geq M_H \quad (\text{ανισότητα του Cauchy})$$

196. "Αν  $x \geq 0, y \geq 0$ , νά αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y \geq x^{1/3} \cdot y^{2/3}$$

Πότε η σχέση αυτή ισχύει με τό ισον;

197. "Αν οι  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι διαδοχικοί όροι μιᾶς γεωμ. προόδου και ισχύει η σχέση:

$$\alpha^p = \beta^q = \gamma^r,$$

νά αποδείξετε ότι οι αριθμοί  $p, q, r$  είναι διαδοχικοί όροι μιᾶς αρμονικής προόδου.

198. Νά αποδείξετε ότι: αν οι πλευρές ενός τριγώνου είναι διαδοχικοί όροι μιᾶς γεωμ.

πρόοδου με λόγο  $\omega$ , τότε ισχύει:  $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < \omega < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ .

199. "Αν  $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 0$  και  $\alpha^3 + \beta^3 = \gamma^3$ , νά αποδείξετε ότι οι αριθμοί:  $\alpha, \gamma, \beta\sqrt[3]{4}$  είναι διαδοχικοί όροι μιᾶς γεωμετρικής προόδου.

200. Νά βρείτε το νιοστό όρο και το άθροισμα των  $n$  πρώτων όρων της ακολουθίας: 2, 3, 5, 9, 17, ...

Υπόδειξη. Νά πάρετε τις διαφορές: 3-2, 5-3, 9-5, 17-9, ... Τί παρατηρείτε;

201. "Αν οι  $\alpha, \beta, \gamma, x, y, z$  είναι θετικοί αριθμοί και ο  $\alpha$  είναι μέσος αριθμητικός των  $\beta$  και  $\gamma$ , ενώ ο  $x$  είναι μέσος αρμονικός των  $y$  και  $z$ , νά αποδείξετε ότι: ο  $\alpha x$  είναι μέσος γεωμετρικός των  $\beta y$  και  $\gamma z$ , τότε και μόνο τότε, αν:  $\frac{y}{z} + \frac{z}{y} = \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta}$ .

202. Νά εξετάσετε αν οι αριθμοί:  $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$  είναι όροι (δχι αναγκαστικά διαδοχικοί) μιᾶς γεωμετρικής προόδου.

203. Το άθροισμα των άπειρων όρων μιᾶς απολύτως φθίνουσας γεωμ. προόδου είναι 12 και το άθροισμα των τετραγώνων των άπειρων όρων της είναι 48. Νά βρείτε την πρόοδο.

204. "Αν  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  με  $|\alpha| < 1$  και  $|\beta| < 1$  και ονομάσουμε:

$$A = 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^n + \dots \quad \text{και} \quad B = 1 + \beta + \beta^2 + \dots + \beta^n + \dots,$$

νά αποδείξετε ότι:

$$\Sigma = 1 + \alpha\beta + \alpha^2\beta^2 + \dots + \alpha^n\beta^n + \dots = \frac{AB}{A+B-1}.$$



205. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ABΓ με πλευρά α. Συνδέουμε τα μέσα των πλευρών του A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>, B<sub>1</sub>Γ<sub>1</sub> και σχηματίζουμε ένα νέο ισόπλευρο τρίγωνο. Τά μέσα των πλευρών του A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>Γ<sub>1</sub> τὰ συνδέουμε και παίρνουμε ένα νέο ισόπλευρο τρίγωνο. Έπαναλαμβάνουμε ἐπ' ἀπειροτήν ἐργασία αὐτή. Νά ὑπολογίσετε τὸ ἄθροισμα τῶν περιμέτρων καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἀπειρῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων πού σχηματίζονται.

206. Ἐστω ἡ ἀκολουθία (α<sub>v</sub>) μὲ α<sub>1</sub> =  $\frac{3}{2}$  καὶ α<sub>v+1</sub> =  $\frac{3\alpha_v + 4}{5} \quad \forall v \in \mathbb{N}$ . Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἀκολουθία (β<sub>v</sub>) μὲ γενικὸ ὄρο: β<sub>v</sub> = α<sub>v</sub> - 2 εἶναι μία γεωμ. πρόοδος μὲ λόγος ω =  $\frac{3}{5}$ . Ὑστερα νά βρεῖτε τοὺς νιοστoὺς ὄρους β<sub>v</sub> καὶ α<sub>v</sub> τῶν ἀκολουθιῶν (β<sub>v</sub>) καὶ (α<sub>v</sub>) ἀντιστοίχως συναρτήσει τοῦ v, καθὼς καὶ τὸ ὄριο τῆς ἀκολουθίας (α<sub>v</sub>).

207. Ἐστω ἡ ἀκολουθία α<sub>v</sub>, v = 1, 2, ... μὲ:

$$\alpha_v = \frac{1}{2} (\alpha_{v-1} + \alpha_{v-2}) \text{ καὶ } \alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = \beta.$$

Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἀκολουθία β<sub>v</sub>, v = 1, 2, ... μὲ γενικὸ ὄρο: β<sub>v</sub> = α<sub>v</sub> - α<sub>v-1</sub> εἶναι μία γεωμ. πρόοδος μὲ λόγος ω =  $-\frac{1}{2}$ . Στὴ συνέχεια νά ἐκφράσετε τὸ α<sub>v</sub> συναρτήσει τῶν α, β καὶ v. Ποιὸ εἶναι τὸ lim α<sub>v</sub>;

208. Ἐστω ἡ ἀκολουθία: α<sub>v</sub>, v = 1, 2, ... γιὰ τὴν ὁποία εἶναι:

$$\alpha_{v+2} = \xi \alpha_{v+1} + \eta \alpha_v \quad \forall v \in \mathbb{N} \quad (\xi, \eta \in \mathbb{R}).$$

Νά ἀποδείξετε ὅτι:

Ἐὰν ὁ λόγος  $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ , ὅπου α<sub>1</sub> ≠ 0, εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως:

$$x^2 - \xi x - \eta = 0,$$

τότε ἡ ἀκολουθία α<sub>v</sub> εἶναι μία γεωμετρικὴ πρόοδος.

209. Ἐὰν S<sub>v</sub> εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν v πρώτων ὀρων γεωμετρικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος ὀρος εἶναι α = -5 καὶ ὁ λόγος ω = -3/4, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\left( \forall \varepsilon > 0 \text{ καὶ } \forall v \in \mathbb{N} \text{ μὲ } v > 3 \left( \frac{20}{7\varepsilon} - 1 \right) \right) \Rightarrow \left| -\frac{20}{7} - S_v \right| < \varepsilon.$$

Ποιὸ εἶναι τὸ lim S<sub>v</sub>;

#### \* IV. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΣΕΙΡΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

**§ 95. Προκαταρκτικά-Συμβολισμός ἄθροισμάτων.**—Στὸ Κεφάλαιο III (§ 26, σημ.) μάθαμε ὅτι ἓνα ἄθροισμα τῆς μορφῆς: α<sub>1</sub> + α<sub>2</sub> + ... + α<sub>v</sub> παριστάνεται γιὰ συντομία μὲ  $\sum_{k=1}^v \alpha_k$  καὶ διαβάζεται: «*ἄθροισμα τῶν*» (ἀριθμῶν) α<sub>k</sub> ἀπὸ k = 1 μέχρι v». Ἀκριβέστερα ὀρίζουμε:

$$\sum_{k=1}^v \alpha_k \stackrel{\text{ὀρσ}}{=} \begin{cases} \alpha_1, & \text{ἂν } v = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v, & \text{ἂν } v \geq 2. \end{cases} \quad (1)$$

Τὸ σύμβολο Σ σημαίνει ὅτι πρέπει νά προσθέσουμε ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς πού θά πάρουμε ἂν δώσουμε στὸ δείκτη k τοῦ α<sub>k</sub> διαδοχικὰ τίς τιμές: 1, 2, 3, ..., v. Εἶναι φανερό ὅτι ὁ δείκτης k μπορεῖ νά ἀντικατασταθεῖ μὲ ὁποιοδήποτε ἄλλο γράμμα. Ἐτσι, π.χ. τὸ παραπάνω ἄθροισμα γράφεται:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v = \sum_{k=1}^v \alpha_k = \sum_{\lambda=1}^v \alpha_\lambda = \sum_{\rho=1}^v \alpha_\rho = \sum_{\nu=1}^v \alpha_\nu = \dots \quad (2)$$

Εἶναι ἐπίσης εὐκόλο νά δοῦμε ὅτι ἰσχύει:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v = \sum_{k=1}^v \alpha_k = \sum_{k=0}^{v-1} \alpha_{k+1} = \sum_{k=2}^{v+1} \alpha_{k-1} = \sum_{k=4}^{v+3} \alpha_{k-3} = \dots \quad (3)$$

Ἐχοντας τώρα ὑπόψη τὸ συμβολισμό (1) τὰ ἀξιοσημεῖωτα ἄθροισματα Σ<sub>1</sub>, Σ<sub>2</sub>, Σ<sub>3</sub> τῆς § 78 γράφονται ὡς ἑξῆς:

$$\Sigma_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + v \equiv \sum_{k=1}^v k = \frac{v(v+1)}{2}$$

$$\Sigma_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + v^2 \equiv \sum_{k=1}^v k^2 = \frac{v(v+1)(2v+1)}{6}$$

$$\Sigma_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + v^3 \equiv \sum_{k=1}^v k^3 = \frac{v^2(v+1)^2}{4} = \left( \sum_{k=1}^v k \right)^2$$

Μία γενίκευση τῆς προσεταιριστικῆς ιδιότητος πού ξέρομε εἶναι:

$$\sum_{k=1}^v \alpha_k = \sum_{k=1}^p \alpha_k + \sum_{k=p+1}^v \alpha_k \quad (4)$$

γιὰ κάθε p = 1, 2, ..., v-1, ἐνῶ μία γενίκευση τῆς ἐπιμεριστικῆς ιδιότητος εἶναι:

$$\sum_{k=1}^v (\xi \alpha_k + \eta \beta_k) = \xi \cdot \sum_{k=1}^v \alpha_k + \eta \cdot \sum_{k=1}^v \beta_k \quad (5)$$

ὅπου ξ καὶ η εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί.

Ἀπὸ τὴν (5) γιὰ ξ = η = 1 ἔχουμε:

$$\sum_{k=1}^v (\alpha_k + \beta_k) = \sum_{k=1}^v \alpha_k + \sum_{k=1}^v \beta_k, \quad (6)$$

ἐνῶ γιὰ ξ = 1, η = -1 ἔχουμε:

$$\sum_{k=1}^v (\alpha_k - \beta_k) = \sum_{k=1}^v \alpha_k - \sum_{k=1}^v \beta_k \quad (7)$$

Τέλος, ἀπὸ τὴν (5) γιὰ η = 0 λαμβάνουμε:

$$\sum_{k=1}^v \xi \alpha_k = \xi \cdot \sum_{k=1}^v \alpha_k \quad (8)$$

Ἡ (8) ἀποτελεῖ γενίκευση τῆς ιδιότητος: ξ · (α<sub>1</sub> + α<sub>2</sub>) = ξ α<sub>1</sub> + ξ α<sub>2</sub>.

Οἱ ἀποδείξεις τῶν παραπάνω ιδιοτήτων εἶναι πολὺ ἀπλές. Ἡ (6), π.χ., ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^v (\alpha_k + \beta_k) &= (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) + \dots + (\alpha_v + \beta_v) = \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v) + (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_v) = \sum_{k=1}^v \alpha_k + \sum_{k=1}^v \beta_k. \end{aligned}$$



Είναι φανερό ακόμη και οι επόμενες ιδιότητες:

i) Αν  $\alpha_k = \alpha$ , τότε ισχύει:  $\sum_{k=1}^n \alpha_k = n\alpha$ . Ειδικά για  $\alpha = 1$  είναι:  $\sum_{k=1}^n \alpha_k = n$  (9)

ii)  $\sum_{k=1}^n (\alpha + \alpha_k) = n\alpha + \sum_{k=1}^n \alpha_k$ , iii)  $\sum_{k=1}^n (\alpha_k - \alpha_{k+1}) = \alpha_1 - \alpha_{n+1}$  (10)

**Εφαρμογή.** Νά υπολογίσετε το άθροισμα των  $n$  πρώτων περιττών αριθμών.

**Λύση.** Ξέρουμε ότι κάθε περιττός αριθμός είναι της μορφής:  $\alpha_k = 2k - 1$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , οπότε έχουμε:

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = \sum_{k=1}^n (2k - 1) = \sum_{k=1}^n 2k - \sum_{k=1}^n 1 = 2 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2.$$

**§ 96. Η έννοια της σειράς - Έννοιες συναφείς με αυτή.**— Έστω

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots \quad (1)$$

μία ακολουθία πραγματικών αριθμών. Από την ακολουθία (1) σχηματίζουμε μία καινούργια ακολουθία  $\sigma_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \alpha_1 \\ \sigma_2 &= \sigma_1 + \alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ \sigma_3 &= \sigma_2 + \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ &\dots \\ \sigma_n &= \sigma_{n-1} + \alpha_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Την ακολουθία αυτή, δηλαδή την ακολουθία  $(\sigma_n)$ , της οποίας ο γενικός όρος δίνεται από τον τύπο:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k \quad (3)$$

(υπενθυμίζουμε ότι:  $\sum_{k=1}^1 \alpha_k \equiv \alpha_1$ ), την ονομάζουμε **ακολουθία των μερικών άθροισμάτων** της ακολουθίας  $(\alpha_n)$ .

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία  $(\sigma_n)$  είναι τελείως καθορισμένη από την ακολουθία  $(\alpha_n)$ . Αλλά και αντίστροφα, αν θέσουμε:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \sigma_1 \\ \alpha_2 &= \sigma_2 - \sigma_1 \\ \alpha_3 &= \sigma_3 - \sigma_2 \\ &\dots \\ \alpha_n &= \sigma_n - \sigma_{n-1} \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ή ακολουθία  $(\alpha_n)$  είναι τελείως καθορισμένη από την ακολουθία  $(\sigma_n)$ .

Ωστε: αν μᾶς δοθεί ή μία από τίς δύο ακολουθίες  $(\alpha_n)$ ,  $(\sigma_n)$ , τότε ορίζουμε πάντοτε και την ἄλλη. Λέμε τότε ότι οί δύο ακολουθίες  $(\alpha_n)$ ,  $(\sigma_n)$  σχηματίζουν μία σειρά πραγματικῶν ἀριθμῶν. Πιο ἀυστηρά δίνουμε τόν ἐπόμενο ὁρισμό.

**Ὁρισμός.** Ονομάζουμε **σειρά πραγματικῶν ἀριθμῶν** καί τή συμβολίζουμε μέ:  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \dots$  ή  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots$  ή ἀκόμη πιο σύντομα μέ:

$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  καί διαβάζουμε: ἄθροισμα τῶν  $\alpha_n$  ἀπό  $n$  ἴσον ἕνα ἕως ἄπειρο, τό διατεταγμένο ζεύγος  $((\alpha_n), (\sigma_n))$ , ὅπου  $(\alpha_n)$  ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν καί  $\sigma_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Ἀπό τόν παραπάνω ὁρισμό συνάγουμε τώρα ότι ή σειρά πραγματικῶν ἀριθμῶν:  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  είναι τό ζεύγος τῶν δύο ἀπεικονίσεων:

$$\alpha: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}: n \rightarrow \alpha_n \quad (5)$$

$$\sigma: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}: n \rightarrow \sigma_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k \quad (6)$$

Κάθε ὅρος τῆς ἀκολουθίας  $(\alpha_n)$  λέγεται **ὅρος** τῆς σειράς, ἐνῶ κάθε ὅρος τῆς ἀκολουθίας  $(\sigma_n)$  λέγεται **μερικό ἄθροισμα** ή **τμήμα** τῆς σειράς:  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ . Εἰδικότερα ὁ ὅρος  $\alpha_n$ , τάξεως  $n$ , τῆς ἀκολουθίας  $(\alpha_n)$  λέγεται **νιοστός** ή **γενικός ὅρος** τῆς σειράς  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ , ἐνῶ ὁ ὅρος  $\sigma_n$ , τάξεως  $n$ , τῆς ἀκολουθίας  $(\sigma_n)$  λέγεται **νιοστό μερικό ἄθροισμα** τῆς σειράς.

Στά ἐπόμενα θά ἀσχοληθοῦμε **μόνο** μέ σειρές πραγμ. ἀριθμῶν. Ἔτσι στό ἐξῆς μέ τόν ὅρο: «σειρά» θά ἐννοοῦμε: «σειρά πραγματικῶν ἀριθμῶν».

**Σημείωση.** Ὅταν σέ μία σειρά  $((\alpha_n), (\sigma_n))$  ξεκινᾶμε ἀπό μία ἀκολουθία  $(\alpha_n)$  στήν ὁποία λαμβάνεται ὡς δείκτης καί τό 0, τότε ή σειρά αὐτή συμβολίζεται μέ  $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ . Ὡστε:

$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \equiv \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots$ . Γενικότερα, ἂν ξεκινᾶμε ἀπό μία ἀκολουθία  $(\alpha_n)$  μέ δείκτες  $n \geq$  ἑνός δείκτη  $n_0$ , τότε ή ἀντίστοιχη σειρά συμβολίζεται μέ  $\sum_{n=n_0}^{\infty} \alpha_n$  καί ἔχει νιοστό μερικό ἄθροισμα τό:

$$\sigma_n = \sum_{k=n_0}^n \alpha_k.$$

**Παραδείγματα. 1.** Ἡ σειρά τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν: Τό ζεύγος τῶν δύο ἀκολουθιῶν:

$$(\alpha_n): 1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

$$(\sigma_n): 1, 3, 6, \dots, \frac{n(n+1)}{2}, \dots$$

εἶναι μία σειρά, ή ὁποία παριστάνεται μέ  $\sum_{n=1}^{\infty} n \equiv 1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots$  καί λέγεται **σειρά τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν**. Τό νιοστό μερικό ἄθροισμα αὐτῆς τῆς σειράς εἶναι:

$$\sigma_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$



2. *Η γεωμετρική σειρά.* Έστω μία σειρά της οποίας οι όροι αποτελούν γεωμετρική πρόοδο με πρώτο όρο  $\alpha$  και λόγο  $\omega$ , δηλαδή έστω ή σειρά:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha \omega^n \equiv \alpha + \alpha \omega + \alpha \omega^2 + \dots$$

Η παραπάνω σειρά λέγεται **γεωμετρική σειρά** και τό νιοστό μερικό άθροισμά της είναι:

$$s_n = \alpha + \alpha \omega + \alpha \omega^2 + \dots + \alpha \omega^n = \frac{\alpha(\omega^{n+1} - 1)}{\omega - 1}, \quad (\omega \neq 1)$$

Έτσι, π.χ., ή σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \equiv 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$  είναι μία γεωμετρική σειρά με γενικό όρο  $\alpha_n = \frac{1}{2^n}$  και νιοστό μερικό άθροισμα:  $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$  (γιατί;).

3. *Η αριθμητική σειρά.* Έστω μία σειρά της οποίας οι όροι αποτελούν αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο  $\alpha$  και λόγο  $\omega$ , δηλαδή έστω ή σειρά:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\alpha + (n-1) \cdot \omega] \equiv \alpha + (\alpha + \omega) + (\alpha + 2\omega) + \dots$$

Η παραπάνω σειρά λέγεται **αριθμητική σειρά** και τό νιοστό μερικό άθροισμά της είναι:

$$s_n = \alpha + (\alpha + \omega) + (\alpha + 2\omega) + \dots + [\alpha + (n-1)\omega] = \frac{2\alpha + (n-1)\omega}{2} \cdot n.$$

4. *Η άρμονική σειρά.* Θεωρούμε ή σειρά με γενικό όρο:  $\alpha_n = \frac{1}{n}$ , δηλαδή ή σειρά:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \equiv 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Η παραπάνω σειρά λέγεται **άρμονική σειρά**, γιατί κάθε όρος της (έκτός από τόν πρώτο), δηλαδή κάθε όρος της ακολουθίας  $(\alpha_n)$  είναι μέσος άρμονικός του όρου πού προηγείται και του όρου πού έπεται· πράγματι, ισχύει:  $\frac{2}{\alpha_n} = \frac{1}{\alpha_{n-1}} + \frac{1}{\alpha_{n+1}}$  για κάθε  $n \geq 2$  (βλ. παρατ. β' της § 81), καθόσον έχουμε:  $2n = (n-1) + (n+1)$ .

Τά μερικά άθροίσματα της άρμονικής σειράς είναι:

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 1 + \frac{1}{2}, \quad s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \dots, \quad s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}, \dots$$

Σύμφωνα λοιπόν με τόν όρισμό πού δώσαμε για τίς σειρές, τό ζεύγος τών ακολουθιών:

$$(\alpha_n): 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

$$(s_n): 1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \dots, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}, \dots$$

είναι ή άρμονική σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ .

5. Θεωρούμε ή σειρά:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \equiv \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$

Οι όροι της είναι:  $\alpha_1 = \frac{1}{1 \cdot 2}, \alpha_2 = \frac{1}{2 \cdot 3}, \alpha_3 = \frac{1}{3 \cdot 4}, \dots$

Ο γενικός της όρος είναι:  $\alpha_n = \frac{1}{n(n+1)} \equiv \frac{(n+1) - n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ .

Τό νιοστό μερικό άθροισμά της είναι:

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

**§ 97. Σύγκλιση μιās σειράς.**— Άς θεωρήσουμε ή σειρά του παραδείγματος 2 της προηγούμενης παραγράφου, δηλαδή ή σειρά:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \equiv 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \quad (1)$$

ή όποία, όπως είδαμε, έχει νιοστό μερικό άθροισμα:  $s_n = 2 - \frac{1}{2^n}$ .

Παρατηρούμε τώρα ότι ή ακολουθία:  $2 - \frac{1}{2^n}, n = 1, 2, \dots$  έχει όριο τόν αριθμό 2, γιατί  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$  (βλ. πρδ. 1, § 64), και συνεπώς ή ακολουθία  $(s_n)$  συγκλίνει στόν αριθμό 2. Ωστε:  $\lim s_n = 2$ .

Άλλά τί θά μπορούσε νά σημαίνει ή έκφραση:

$$\lim \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \right)$$

άπό τήν άποψη της έννοιας του άθροίσματος, καθόσον όταν λέμε στήν "Άλγεβρα «άθροισμα» έννοούμε ότι έχουμε ένα πεπερασμένο πλήθος προσθετών, ένώ από τόν τρόπο πού κατασκευάζεται ή ακολουθία  $(s_n)$  γίνεται φανερό ότι: καθώς τό  $n$  «αυξάνει άπεριόριστα» τόσο και «πιό πολλοί» όροι της ακολουθίας  $\left(\frac{1}{2^n}\right)$  προσθέτονται.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι στήν παραπάνω έκφραση υποκρύπτεται κάποια έννοια «άπειροάθροισματος» ή όπως λέμε συνήθως «άθροίσματος με άπειρους όρους». Έξάλλου ή έννοια αυτή έχει κιόλας χρησιμοποιηθεί στήν § 94 όπου όρίσαμε τό άθροισμα τών άπειρων όρων μιās άπολύτως φθίνουσας γεωμετρικής πρόόδου. Άς εφαρμόσουμε τώρα και τόν τύπο (4) της § 94 για νά βρούμε τό «άθροισμα»:  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$ . Έχουμε:

$$s_{\infty} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = \frac{\alpha}{1 - \omega} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 = \lim s_n \quad (2)$$

Έτσι από τίς (1) και (2) μπορούμε νά γράψουμε:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2 = \lim s_n \equiv \lim \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) \quad (3)$$

Υστερα από τά παραπάνω είναι πιά φυσικό νά δώσουμε τόν έξης γενικό όρισμό για ή σύγκλιση σειράς πραγματικών αριθμών:

**Όρισμός.** Θά λέμε ότι μία σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  συγκλίνει στόν πραγματικό αριθμό



$\sigma$  και θα γράφουμε  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = \sigma$ , τότε και μόνο τότε, αν η ακολουθία  $(\sigma_v)$  συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό  $\sigma$ .

Γιά συντομία:

$$\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = \sigma \iff \lim_{\sigma \sigma} \sigma_v = \lim (a_1 + a_2 + \dots + a_v) \equiv \lim_{k=1}^v \sum \alpha_k = \sigma$$

Ο πραγματικός αριθμός  $\sigma$  λέγεται τότε **άθροισμα** της σειράς  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ .

Όστε: **άθροισμα** μίας συγκλίνουσας σειράς  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  ονομάζεται ο αριθμός στον οποίο τείνει το νιοστό μερικό άθροισμά της:  $\sigma_v = a_1 + a_2 + \dots + a_v$ .

Έτσι, π.χ., το άθροισμα της σειράς του παραδείγματος 5 της προηγούμενης παραγράφου είναι ο αριθμός 1, γιατί  $\lim \sigma_v = 1 - \lim \frac{1}{v+1} = 1 - 0 = 1$ ,

και συνεπώς γράφουμε:  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v(v+1)} = 1$ .

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε τώρα ότι: όταν γράφουμε:  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = \sigma$ , έννοούμε ότι η σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  είναι συγκλίνουσα και ότι το άθροισμά της είναι ο πραγματικός αριθμός  $\sigma$ .

Ας θεωρήσουμε τώρα τη γεωμετρική σειρά:

$$\sum_{v=0}^{\infty} 2^v = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^v + \dots$$

Το νιοστό μερικό άθροισμα αυτής της σειράς είναι:

$$\sigma_v = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^v = 2^{v+1} - 1$$

Παρατηρούμε ότι:  $\lim \sigma_v = +\infty$ , καθόσον η ακολουθία  $(\sigma_v)$  είναι αύξουσα και μη φραγμένη. Σ' αυτή την περίπτωση λέμε ότι «η σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  απειρίζεται θετικά» και γράφουμε συμβολικά:  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = +\infty$ .

Όστε:

$$\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = +\infty \iff \lim_{\sigma \sigma} \sigma_v = \lim (a_1 + a_2 + \dots + a_v) = \lim_{k=1}^v \sum \alpha_k = +\infty$$

Με ανάλογο τρόπο ορίζουμε:

$$\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = -\infty \iff \lim_{\sigma \sigma} \sigma_v = \lim (a_1 + a_2 + \dots + a_v) = \lim_{k=1}^v \sum \alpha_k = -\infty$$

Στίς δύο τελευταίες περιπτώσεις λέμε ότι «η σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  συγκλίνει κατ'έκδοχή».

Τέλος, υπάρχουν σειρές που δέ συγκλίνουν σέ πραγματικό αριθμό, ούτε όμως και κατ'έκδοχή (δηλαδή σ' ένα από τα σύμβολα  $+\infty$  ή  $-\infty$ ). Στήν περίπτωση αυτή λέμε ότι η σειρά **αποκλίνει** ή **κυμαίνεται** (ταλαντεύεται).

Έτσι, π.χ., η σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  αποκλίνει, γιατί η ακολουθία:

$$\sigma_v = (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^{v+1} = \begin{cases} 1, & \text{αν } v \text{ περιττός} \\ 0, & \text{αν } v \text{ άρτιος} \end{cases}$$

δέ συγκλίνει σέ πραγματικό αριθμό (αφού  $\sigma_{2v} \rightarrow 0$  και  $\sigma_{2v-1} \rightarrow 1$ ) ούτε όμως και κατ'έκδοχή.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε τώρα ότι:

Γιά οποιαδήποτε σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  πραγματικών αριθμών ισχύει μία και μόνο μία από τις επόμενες περιπτώσεις:

- α) Η σειρά έχει άθροισμα (δηλ. συγκλίνει σέ πραγματικό αριθμό)
- β) Η σειρά συγκλίνει κατ'έκδοχή (απειρίζεται θετικά ή αρνητικά)
- γ) Η σειρά αποκλίνει.

**Αξιόλογη παρατήρηση.** Αν  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = \sigma$ , τότε  $\lim \alpha_v = 0$ , γιατί  $\alpha_v = \sigma_v - \sigma_{v-1}$  και  $\lim \sigma_v = \lim \sigma_{v-1} = \sigma$  (§ 50).

Πιο γενικά, αν θεωρήσουμε την ακολουθία  $(\delta_v)$  μέ:

$$\delta_v = \sigma_{2v} - \sigma_v = \alpha_{v+1} + \alpha_{v+2} + \dots + \alpha_{2v}$$

και η σειρά  $((\alpha_v), (\sigma_v))$  συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό  $\sigma$ , τότε ισχύει:  $\lim \delta_v = \sigma - \sigma = 0$ , γιατί η  $(\sigma_{2v})$  είναι μία υπακολουθία της  $(\sigma_v)$ .

Αυτή η παρατήρηση μās δίνει μία **αναγκαία** συνθήκη γιά νά συγκλίνει μία σειρά.

**Σχόλια. 1.** Από τα προηγούμενα γίνεται φανερό ότι η έννοια: *σειρά πραγματικών αριθμών* αποτελεί γενίκευση της άλγεβρικής έννοιας: *άθροισμα πραγματικών αριθμών* (μέ δύο, τρεις κτλ. όρους). Γι' αυτό η σειρά λέγεται πολλές φορές και «*άθροισμα με άπειρους όρους*». Δέν πρέπει όμως νά συγχέουμε τήν έννοια της σειράς μέ τήν άλγεβρική έννοια του άθροίσματος δύο ή περισσοτέρων πραγματικών αριθμών και αυτό γιατί τό άθροισμα ενός (πεπερασμένου) πλήθους πραγματικών αριθμών είναι ένας **μονοσημάντως** όρισμένος πραγματικός αριθμός, ενώ γιά μία σειρά τό «*άθροισμα*» δέν υπάρχει πάντοτε, καθόσον η σειρά μπορεί νά συγκλίνει κατ'έκδοχή ή νά αποκλίνει. Άλλά κι αν άκόμα η σειρά συγκλίνει, τό άθροισμά της δέ βρίσκεται άλγεβρικώς, αλλά μέ τή βοήθεια μιās «έξωαλγεβρικής» έννοιας, τής έννοιας τής συγκλίσεως ακολουθίας. Όστε ο όρος «*άθροισμα*» έχει γιά τίς σειρές μία πολύ ειδική σημασία.

**2.** Εάν μία σειρά  $((\alpha_v), (\sigma_v))$  συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό  $\sigma$ , τότε μέ τό σύμβολο  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  παριστάνουμε και τή σειρά και τό άθροισμά της. Δέν πρέπει όμως νά συγχέουμε



αυτές τις δύο έννοιες, γιατί με τον όρο «σειρά» εννοούμε το ζεύγος των ακολουθιών:  $(\alpha_n)$ ,  $(\sigma_n)$ , ενώ με τον όρο «άθροισμα σειράς» εννοούμε το όριο της ακολουθίας  $(\sigma_n)$ , αν φυσικά το όριο αυτό υπάρχει. Ωστε ο ρόλος του συμβόλου  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  είναι διπλός για μία συγκλίνουσα σειρά.

\*Ετσι, π.χ. αν με το σύμβολο  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  εννοούμε «σειρά» έχουμε:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$ , ενώ, αν εννοούμε «άθροισμα», έχουμε:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$ .

Τονίσαμε παραπάνω τη διπλή σημασία του συμβόλου  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ , γιατί αν δεν προσέξουμε μπορούμε εύκολα να φθάσουμε σε εσφαλμένα συμπεράσματα, όπως εξάλλου φαίνεται και από το ακόλουθο παράδειγμα:

\*Ας θεωρήσουμε τη σειρά:  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ . \*Αν είχαμε το δικαίωμα να θεωρήσουμε το «άθροισμα» σ αυτής της σειράς, τότε:

$$\sigma = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

$$\eta \quad \sigma = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \dots)$$

δηλαδή  $\sigma = 1 - \sigma$ , οπότε  $2\sigma = 1$  και συνεπώς  $\sigma = \frac{1}{2}$ . Αυτό όμως δεν είναι αληθές, γιατί όπως αποδείξαμε παραπάνω η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$  αποκλίνει.

**§ 98. Μελέτη μερικών χαρακτηριστικών και χρήσιμων σειρών.**— Σ' αυτή την παράγραφο μελετάμε ως προς τη σύγκλιση μερικές χαρακτηριστικές σειρές, πού θα μάς είναι πολύ χρήσιμες στα επόμενα.

**1η. Αριθμητική σειρά.** Νά μελετήσετε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά:

$$a + (a + \omega) + (a + 2\omega) + \dots + [a + (n-1)\omega] + \dots \quad (\omega \neq 0)$$

για τις διάφορες πραγματικές τιμές του  $\omega$ .

Λύση. \*Έχουμε:

$$\sigma_n = \frac{[2a + (n-1)\omega]n}{2} = \frac{1}{2} n^2 \left[ \omega \cdot \frac{\omega}{n} + \frac{2a}{n} \right] \Rightarrow \lim \sigma_n = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \omega > 0 \\ -\infty, & \text{αν } \omega < 0 \end{cases}$$

\*Ωστε: η σειρά της οποίας οι όροι αποτελούν αριθμητική πρόοδο συγκλίνει κατ'έκδοχή, ακριβέστερα απειρίζεται θετικά, αν η αντίστοιχη πρόοδος είναι αύξουσα ( $\omega > 0$ ) και αρηνητικά αν η πρόοδος είναι φθίνουσα ( $\omega < 0$ ).

**2η. Γεωμετρική σειρά.** Νά μελετήσετε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά:

$$a + a\omega + a\omega^2 + \dots + a\omega^{n-1} + \dots \quad (a \neq 0).$$

για τις διάφορες πραγματικές τιμές του  $\omega$ .

Λύση. Για το άθροισμα των  $n$  πρώτων όρων της σειράς αυτής έχουμε:

$$\sigma_n = a + a\omega + \dots + a\omega^{n-1} = \begin{cases} n a, & \text{αν } \omega = 1 \\ a \cdot \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1}, & \text{αν } \omega \neq 1 \end{cases}$$

Διακρίνουμε τώρα τις παρακάτω περιπτώσεις:

α') \*Αν  $|\omega| < 1$ , δηλαδή:  $-1 < \omega < 1$ , τότε  $\omega^n \rightarrow 0$  και συνεπώς  $\lim \sigma_n = \frac{a}{1-\omega}$ .

\*Ωστε: η γεωμετρική σειρά της οποίας οι όροι αποτελούν απόλυτως φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό  $\frac{a}{1-\omega}$ .

β') \*Αν  $\omega > 1$ , τότε έπειδή  $\omega^n \rightarrow +\infty$  (βλ. πρδ. 5, § 67) και  $\omega - 1 > 0$  έχουμε:

$$\lim \sigma_n = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a > 0 \\ -\infty, & \text{αν } a < 0 \end{cases}$$

γ') \*Αν  $\omega = 1$ , τότε  $\sigma_n = na$ , οπότε  $\lim \sigma_n = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a > 0 \\ -\infty, & \text{αν } a < 0 \end{cases}$

δ') \*Αν  $\omega \leq -1$ , τότε δεν υπάρχει το  $\lim \omega^n$  (βλ. πρδ. 5, § 67), οπότε δεν υπάρχει και το  $\lim \sigma_n$  και συνεπώς η γεωμ. σειρά αποκλίνει.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω έχουμε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\omega^{n-1} = a + a\omega + a\omega^2 + \dots + a\omega^{n-1} + \dots = \begin{cases} \frac{a}{1-\omega}, & \text{αν } |\omega| < 1 \\ +\infty, & \text{αν } \omega \geq 1 \text{ και } a > 0 \\ -\infty, & \text{αν } \omega \geq 1 \text{ και } a < 0 \\ \text{αποκλίνει,} & \text{αν } \omega \leq -1 \end{cases}$$

\*Ετσι η σειρά:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$  συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό:

$$\frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}, \text{ έπειδή } |\omega| = \frac{1}{3} < 1.$$

\*Αντιθέτως η σειρά:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots, \text{ αποκλίνει, έπειδή } \omega = -1.$$

**3η. Αρμονική σειρά.** Νά αποδείξετε ότι η αρμονική σειρά:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

δεν συγκλίνει μέσα στο  $\mathbb{R}$ .

\*Απόδειξη. \*Εστω ότι η αρμονική σειρά συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, τότε σύμφωνα με την παρατήρηση της προηγούμενης παραγράφου, θα έχουμε:  $\lim \delta_n = 0$ , όπου  $\delta_n = \sigma_{2n} - \sigma_n$  και  $\sigma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ .

\*Αλλά:

$$\delta_n = \sigma_{2n} - \sigma_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

και συνεπώς:  $\lim \delta_n = 0 \geq \frac{1}{2}$ . Αυτό όμως δεν είναι αληθές.

\*Αρα η αρμονική σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  δεν συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

**Σημείωση.** Για την αρμονική σειρά ισχύει:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ . Πράγματι, η ακολουθία:

$\sigma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  είναι μία γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών



δρων, καθόσον:  $\sigma_{v+1} - \sigma_v = \frac{1}{v+1} > 0, \forall v \in \mathbb{N}$ , 'Εξάλλου ή  $(\sigma_v)$  δέν είναι φραγμένη άνω, γιατί άλλιώς ή  $(\sigma_v)$  ώς μονότονη (γνησίως αύξουσα) καί φραγμένη, σύμφωνα μέ τό γνωστό άξίωμα (§ 66), θά ήταν συγκλίνουσα στό  $\mathbb{R}$ , όπότε καί ή σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v}$  θά έπρεπε νά συγκλίνει μέσα στό  $\mathbb{R}$ , πράγμα όμως πού δέν άληθεύει, όπως άποδείξαμε παραπάνω. Άρα ή  $(\sigma_v)$  δέν είναι φραγμένη πρός τά άνω καί έπειδή είναι καί (γνησίως) αύξουσα, έπεται ότι:  $\sigma_v \rightarrow +\infty$ .

\*Άρα: 
$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v} = \lim \sigma_v = \lim \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{v} \right) = +\infty.$$

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Όμάδα Α.** 210. Νά εκφράσετε συναρτήσει του  $v$  τά παρακάτω άθροίσματα:

α)  $\sum_{k=1}^v k(k+1)$ , β)  $\sum_{k=1}^v (k^2 + 5k + 3)$ , γ)  $\sum_{k=1}^v k(k+2)(k+4)$ .

211. Νά άποδείξετε ότι:  $\sum_{k=1}^v k^3 = \frac{v^4}{4} + \frac{v^3}{2} + \frac{v^2}{4}$ .

212. Νά γράψετε τούς έπτά πρώτους όρους των παρακάτω σειρών:

α)  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{v}{v^2+1}$ , β)  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{v}}$ , γ)  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1+v}{1+v^2}$ , δ)  $\sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v \cdot \frac{v}{v(v+1)}$

213. Νά βρείτε τό άθροισμα των έπόμενων σειρών:

α)  $\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{3^v}$ , β)  $\sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^v$ , γ)  $\sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^v$ , δ)  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{3}{10^v}$ .

214. Νά προσδιορίσετε τή σειρά τής όποιας ή άκολουθία των μερικών άθροισμάτων είναι:

α)  $\left(1 - \frac{1}{2^v}\right), v = 1, 2, \dots$ , β)  $\frac{v}{v+1}, v = 1, 2, \dots$ .

215. Έχοντας υπόψη τήν ταυτότητα:  $\frac{1}{v(v-1)} \equiv \frac{1}{v-1} - \frac{1}{v}, \forall v \geq 2$  νά βρείτε τό άθροισμα τής σειράς  $\sum_{v=2}^{\infty} \frac{1}{v(v-1)}$ .

**Όμάδα Β.** 216. Άν  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v$  καί  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_v$  είναι πραγματικοί αριθμοί, νά άποδείξετε τήν άνισότητα των Cauchy - Schwarz:

$$\left( \sum_{k=1}^v \alpha_k \beta_k \right)^2 \leq \left( \sum_{k=1}^v \alpha_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^v \beta_k^2 \right).$$

217. Άν  $v \in \mathbb{N}$ , νά άποδείξετε ότι:

$$\left[ \sum_{k=1}^v \frac{1}{k} \right]^2 \leq v \left( 2 - \frac{1}{v} \right).$$

218. Έχοντας υπόψη τήν ταυτότητα:  $\frac{1}{4v^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2v-1} - \frac{1}{2v+1} \right)$  νά άποδείξετε ότι:  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{4v^2-1} = \frac{1}{2}$ .

219. Άν  $(\alpha_v)$  καί  $(\beta_v)$  είναι δύο άκολουθίες τέτοιες, ώστε:  $\alpha_v = \beta_v - \beta_{v+1}, \forall v \in \mathbb{N}$ , νά άποδείξετε ότι: ή σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  συγκλίνει, τότε καί μόνο τότε, αν ή άκολουθία  $(\beta_v)$  συγκλίνει. Άν μάλιστα  $\lim \beta_v = l$ , τότε  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = \beta_1 - l$ .

220. Νά μελετήσετε ως πρός τό μονότονο καί τή σύγκλιση τήν άκολουθία  $(\alpha_v)$  μέ γε-  
νικό όρο: 
$$\alpha_v = \sum_{k=1}^v \frac{1}{k^2 + k}.$$

Στή συνέχεια νά βρείτε, αν υπάρχει, τό όριο της. Τέλος, νά βρείτε ένα  $v_0 \in \mathbb{N}$  τέτοιο, ώστε για κάθε  $v \geq v_0$  νά ισχύει:  $|\alpha_v - 1| < 0,01$ .

**Υπόδειξη.** Νά παρατηρήσετε ότι:  $\frac{1}{k^2 + k} = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ .

### ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΕΙΡΩΝ ΠΡΑΓΜ. ΑΡΙΘΜΩΝ

Άπό όσα αναπτύξαμε στις προηγούμενες παραγράφους για τίς σειρές, γίνεται φανερό ότι ή σύγκλιση μιās σειράς  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  άνάγεται στή σύγκλιση τής άκολουθίας  $\sigma_v = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v, v = 1, 2, \dots$ . Συνεπώς από ιδιότητες πού αναφέρονται στή σύγκλιση άκολουθιών θά προκύπτουν ιδιότητες για τίς σειρές. Έτσι σ' αυτή τήν ένότητα διατυπώνουμε καί άποδεικνύουμε προτάσεις πού οί πιο πολλές είναι άμεσες συνέπειες των γνωστών ιδιοτήτων πού ξέρουμε για τίς συγκλίνουσες άκολουθίες, γι' αυτό οί πιο πολλές άποδείξεις δίνονται μέ κάποια συντομία.

**§ 99. Ίδιότητα I.**—Έστω  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  μία σειρά πραγματικών αριθμών, τότε:

α') αν ή σειρά συγκλίνει, τότε  $\lim \alpha_v = 0$ ,

β') αν  $\lim \alpha_v \neq 0$ , τότε ή σειρά δέ συγκλίνει στό  $\mathbb{R}$ ,

γ') αν ή σειρά συγκλίνει, τότε ή άκολουθία  $\sigma_v = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v, v = 1, 2, \dots$  των μερικών άθροισμάτων είναι φραγμένη.

**Άπόδειξη.**

α') Έστω  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = \alpha$ , τότε  $\lim \sigma_v = \alpha$  καί  $\alpha_v = \sigma_v - \sigma_{v-1}, v = 2, 3, \dots$

Όπότε:  $\lim \alpha_v = \lim(\sigma_v - \sigma_{v-1}) = \lim \sigma_v - \lim \sigma_{v-1} = \alpha - \alpha = 0$ .

β') Έστω ότι  $\lim \alpha_v \neq 0$  καί ότι ή σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  συγκλίνει, τότε, σύμφωνα μέ τήν α') θά είχαμε:  $\lim \alpha_v = 0$ . Αυτό όμως είναι άτοπο.

γ') Άν ή σειρά συγκλίνει, τότε ή άκολουθία  $(\sigma_v)$  ως συγκλίνουσα είναι φραγμένη (§ 51).

**Παρατήρηση.** Οί συνθήκες α') καί γ') τής παραπάνω ιδιότητας είναι **άναγκαίες**, όχι όμως καί **ίκανές**. Έτσι υπάρχουν σειρές πού δέ συγκλίνουν στό  $\mathbb{R}$ , για τίς όποιες ή α') ή ή γ') ισχύει. Π.χ.  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v} = +\infty$ , αν καί  $\lim \alpha_v = \lim \frac{1}{v} = 0$ . Επίσης ή σειρά

$\sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  άποκλίνει, αν καί ή άκολουθία  $(\sigma_v)$  των μερικών άθροισμάτων της είναι φραγμένη, καθόσον  $|\sigma_v| \leq 1, \forall v \in \mathbb{N}$ .

**Προσέξτε!** αν  $\lim \alpha_v \neq 0$ , τότε αυτή είναι μία **ίκανή συνθήκη** για νά μή συγκλίνει στό  $\mathbb{R}$



ή σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ . Επομένως θα προχωρήσουμε στη μελέτη ως προς τη σύγκλιση μιᾶς σειράς μόνο εφόσον ο γενικός της όρος συγκλίνει στο μηδέν. Έτσι, π.χ. διακρίνουμε άμέσως ότι η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n+5}$  δε συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, επειδή

$$\lim \alpha_n = \lim \frac{2n+1}{3n+5} = \frac{2}{3} \neq 0.$$

**Σχόλιο.** Η πρόταση:  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  συγκλίνει στο  $R \Rightarrow \alpha_n \rightarrow 0$  θα μάς είναι πολλές φορές

χρήσιμη προκειμένου να αποδείξουμε ότι μία ακολουθία  $(\alpha_n)$  είναι μηδενική. Για τό σκοπό αυτό, δηλαδή για να αποδείξουμε ότι  $\alpha_n \rightarrow 0$ , αρκεί να αποδείξουμε ότι η σειρά με γενικό όρο τό γενικό όρο της ακολουθίας  $(\alpha_n)$  συγκλίνει στο  $R$ , όποτε, σύμφωνα με τήν ιδιότητα I, περίπτωση α'), θα είναι:  $\lim \alpha_n = 0$ .

**§ 100. 'Ιδιότητα II.**—'Αν  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \alpha$  και  $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \beta$ , όπου  $\alpha, \beta \in R$ , τότε ισχύει:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\xi \alpha_n + \eta \beta_n) = \xi \alpha + \eta \beta$$

για όποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς  $\xi$  και  $\eta$ .

**Απόδειξη.** Η απόδειξη της παραπάνω ιδιότητας είναι άμεση συνέπεια του πορίσματος της § 59 και της σχέσεως (5) της § 95. Πράγματι, αν θέσουμε:

$$\sigma_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k, \quad \tau_n = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n = \sum_{k=1}^n \beta_k \text{ και}$$

$$s_n = (\xi \alpha_1 + \eta \beta_1) + (\xi \alpha_2 + \eta \beta_2) + \dots + (\xi \alpha_n + \eta \beta_n) = \sum_{k=1}^n (\xi \alpha_k + \eta \beta_k), \text{ έχουμε:}$$

$$s_n = \sum_{k=1}^n (\xi \alpha_k + \eta \beta_k) = \xi \sum_{k=1}^n \alpha_k + \eta \sum_{k=1}^n \beta_k = \xi \sigma_n + \eta \tau_n \text{ και συνεπώς:}$$

$$s_n \rightarrow \xi \alpha + \eta \beta, \text{ αφού } \sigma_n \rightarrow \alpha \text{ και } \tau_n \rightarrow \beta \Rightarrow \xi \sigma_n + \eta \tau_n \rightarrow \xi \alpha + \eta \beta.$$

Από τήν παραπάνω πρόταση παίρνουμε τις επόμενες ειδικές περιπτώσεις:

(i) Για  $\xi \in R$  και  $\eta = 0$  ισχύει ή πρόταση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \alpha \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \xi \alpha_n = \xi \alpha = \xi \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \quad (1)$$

(ii) Για  $\xi = \eta = 1$  ισχύει ή πρόταση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \alpha \wedge \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \beta \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n) = \alpha + \beta = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \quad (2)$$

(iii) Για  $\xi = 1$  και  $\eta = -1$  ισχύει ή πρόταση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \alpha \wedge \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \beta \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \beta_n) = \alpha - \beta = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \quad (3)$$

**Σημείωση.** Οί σειρές:  $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n)$  και  $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \beta_n)$  ονομάζονται αντίστοιχως **άθροισμα** και **διαφορά** των δύο σειρών  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  και  $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ .

**Σχόλιο.** Από τις ειδικές περιπτώσεις (i), (ii) και (iii) βλέπουμε ότι οι συγκλίνουσες σειρές συμπεριφέρονται όπως και τά πεπερασμένα άθροίσματα. Έτσι οι (1), (2) και (3) αποτελούν γενικεύσεις των (8), (6) και (7) αντίστοιχως της § 95.

**Παρατήρηση.** Τό αντίστροφο της ιδιότητας II, όπως και στις ακολουθίες (βλ. παρατ. 3, § 57) δέν αληθεύει πάντοτε, δηλαδή αν τό άθροισμα δύο σειρών είναι συγκλίνουσα σειρά, αυτό δε συνεπάγεται κατ' ανάγκη ότι καθεμιά απ' αυτές είναι συγκλίνουσα σειρά. Είναι δυνατό μάλιστα να μη συγκλίνει ούτε ή μία ούτε ή άλλη. Π.χ., αν πάρουμε τις σειρές:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \text{ και } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \text{ έχουμε: } \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n + (-1)^{n-1}] = 0$$

και όμως καμία απ' αυτές δε συγκλίνει.

**§ 101. 'Ιδιότητα III.**—'Αν ή σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  συγκλίνει στο  $R$  και ή  $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$  δε

συγκλίνει στο  $R$ , τότε ή σειρά:  $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n)$  δε συγκλίνει στο  $R$ .

**Υπόδειξη.** Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια της ειδικής περιπτώσεως (iii) της προηγούμενης παραγράφου, αρκεί να υποθεθεί ότι ή σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n)$  συγκλίνει στο  $R$  και να ληφθεί υπόψη ότι:  $\beta_n = (\alpha_n + \beta_n) - \alpha_n$ .

**Παράδειγμα.** Η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{2^n} \right)$  δε συγκλίνει στο  $R$ , επειδή ή σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  άπειρίζεται θετικά και ή σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  συγκλίνει.

**Παρατήρηση.** Αν οι σειρές  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  και  $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$  δε συγκλίνουν στο  $R$ , αυτό δε συνεπάγεται κατ' ανάγκη ότι και ή σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n)$  δε συγκλίνει στο  $R$ . Αυτό φαίνεται εξάλλου και από τό παράδειγμα της παρατηρήσεως της § 100.

**§ 102. 'Ιδιότητα IV.**—'Αν μία σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  συγκλίνει και έχει άθροισμα  $\alpha$ ,

τότε και ή σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n+p} \equiv \alpha_{p+1} + \alpha_{p+2} + \alpha_{p+3} + \dots$ , ή οποία προκύπτει από τήν  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  αν παραλείψουμε τούς  $p$  πρώτους όρους της, συγκλίνει αλλά τό άθροισμά της είναι ό αριθμός:  $\alpha - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p)$ .

**Απόδειξη.** Έστω ότι είναι  $\sigma_n$  και  $\tau_n$  τά νιοστά μερικά άθροίσματα των σειρών  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  και  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n+p}$  αντίστοιχως. Για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  έχουμε:

$$\sigma_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \text{ και } \tau_n = \alpha_{p+1} + \alpha_{p+2} + \dots + \alpha_{p+n} \quad (1)$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\sigma_{n+p} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p) + (\alpha_{p+1} + \alpha_{p+2} + \dots + \alpha_{p+n}) = s + \tau_n \quad (2)$$

όπου  $s$  έχουμε ονομάσει τό (πεπερασμένο) άθροισμα:  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p \equiv s$ .



Από τη (2), για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , έχουμε:  $\tau_n = \sigma_{n+p} - s$  (3)

Από την υπόθεση έχουμε ότι:  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \alpha$ , οπότε  $\lim \sigma_n = \alpha$  και συνεπώς (§50)  
 $\lim \sigma_{n+p} = \alpha$ . Τότε όμως από την (3) λαμβάνουμε:

$$\lim \tau_n = \lim(\sigma_{n+p} - s) = \lim \sigma_{n+p} - s = \alpha - s$$

δηλαδή:  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n+p} = \alpha - s$ , όπου  $s = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p$ .

**Παρατηρήσεις.** α). Έχοντας υπόψη την ισοδυναμία (§ 50):  $\sigma_n \rightarrow \alpha \iff \sigma_{n+p} \rightarrow \alpha$  και τη (2) αποδεικνύουμε άμεσως το αντίστροφο της παραπάνω ιδιότητας, δηλαδή: *αν η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n+p}$  συγκλίνει στο  $R$  και προσθέσουμε στην αρχή της ένα πεπερασμένο πλήθος όρων, τότε η σειρά που θα προκύψει θα συγκλίνει επίσης στο  $R$  (το άθροισμα θα είναι βέβαια διαφορετικό).*

Πιο γενικά ισχύει η πρόταση:

*Αν μία σειρά συγκλίνει στο  $R$ , τότε και η σειρά που προκύπτει απ' αυτή αν διαγράψουμε ή επισυνάψουμε ένα πεπερασμένο πλήθος όρων (όποιουσδήποτε) συγκλίνει επίσης στο  $R$ .*

Πράγματι, αν από τη συγκλίνουσα σειρά:  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \dots$  διαγράψουμε  $k$  οποιουσδήποτε όρους, οι όροι της σειράς αυτής από κάποιο δείκτη  $p$  και μετά θα παραμείνουν αμετάβλητοι και συνεπώς η σειρά:  $\alpha_p + \alpha_{p+1} + \dots$  θα συγκλίνει στο  $R$ . Αν τώρα στην τελευταία σειρά προσθέσουμε πριν από το  $\alpha_p$  όσους όρους έμειναν μετά από τη διαγραφή των  $k$  όρων, θα προκύψει μία σειρά, η οποία, σύμφωνα με τα παραπάνω, θα συγκλίνει στο  $R$ .

β). Αποδεικνύεται ότι: *αν μία από τις δύο σειρές  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  και  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n+p}$  συγκλίνει κατ'έκδοχή ή αποκλίνει, τότε το ίδιο συμβαίνει και για την άλλη.* Έτσι, π.χ. η σειρά  $\sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots$ , η οποία προκύπτει από την αρμονική σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  αν παραλείψουμε τους δέκα πρώτους όρους της, απειρίζεται θετικά.

**§ 103. Σειρές με όρους μη άρνητικούς.**—Στις επόμενες παραγράφους αυτού του κεφαλαίου θα ασχοληθούμε ειδικότερα με τη μελέτη σειρών, οι οποίες προκύπτουν από ακολουθίες  $(\alpha_n)$  για τις οποίες ισχύει:  $\alpha_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Σε μία τέτοια σειρά:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \dots$$

η ακολουθία  $(\sigma_n)$  των μερικών άθροισμάτων είναι πάντοτε αύξουσα, γιατί:  $\sigma_{n+1} - \sigma_n = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \alpha_{n+1}) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) = \alpha_{n+1} \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Για τις σειρές με όρους μη άρνητικούς ισχύουν οι επόμενες προτάσεις:

**§ 104. Πρόταση.**—Έστω  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  μία σειρά με όρους μη άρνητικούς, τότε

α)  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  συγκλίνει στο  $R \iff (\sigma_n)$  είναι φραγμένη στο  $R$

β)  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  απειρίζεται θετικά  $\iff (\sigma_n)$  δεν είναι φραγμένη στο  $R$ .

**Απόδειξη.** α) Αν η σειρά συγκλίνει, τότε η ακολουθία  $(\sigma_n)$  είναι φραγμένη (§ 99, γ'). Έστω ότι η ακολουθία  $(\sigma_n)$  των μερικών άθροισμάτων είναι φραγμένη στο  $R$ , τότε, επειδή η  $(\sigma_n)$  είναι και αύξουσα, σύμφωνα με το γνωστό αξίωμα (§ 66) η  $(\sigma_n)$  θα συγκλίνει σε κάποιο πραγματικό αριθμό, οπότε και η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  συγκλίνει στο  $R$ .

β) Αν  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$  και υποθέσουμε ότι η  $(\sigma_n)$  είναι φραγμένη στο  $R$ , τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο θα έπρεπε η  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  να ήταν συγκλίνουσα στο  $R$ . Αυτό όμως είναι άτοπο.

**Αντιστρόφως**, αν η  $(\sigma_n)$  δεν είναι φραγμένη στο  $R$ , τότε επειδή αυτή είναι και αύξουσα, σύμφωνα με την παρατήρηση της § 66 θα απειρίζεται θετικά, οπότε και η  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  θα απειρίζεται θετικά.

**Αξιόλογη παρατήρηση.** Από την παραπάνω πρόταση συμπεραίνουμε ότι: κάθε σειρά με όρους μη άρνητικούς ή θα συγκλίνει στο  $R$  (άκριβέστερα στο  $R_0^+$ ) ή θα απειρίζεται θετικά. Αν τώρα για μία σειρά ισχύει:  $\alpha_n \geq 0$  τελικά για όλους τους δείκτες, τότε θα υπάρχει δείκτης  $p$ , ώστε να ισχύει  $\alpha_{n+p} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , οπότε αν η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n+p} = +\infty$ , τότε

(βλ. παρατ. β', § 102) και η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$ . Αν όμως  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n+p} = \alpha$ , όπου  $\alpha \in R$ , τότε το

άθροισμά της  $\alpha \geq 0$ , ενώ το άθροισμα της  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \alpha + s$ , όπου  $s = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p$ , μπορεί να είναι και άρνητικός αριθμός (γιατί;).

**Προσέξτε τη διαφορά:** αν  $\alpha_n \geq 0$  τελικά για όλους τους δείκτες και υπάρχει το  $\lim \alpha_n$ , τότε ισχύει:  $\lim \alpha_n \geq 0$ , ενώ αν μία σειρά έχει, τελικά, τους όρους της  $\geq 0$ , τότε το άθροισμά της δεν είναι αναγκαστικά  $\geq 0$ .

Αποδεικνύουμε άμεσως πιο κάτω μία βασική πρόταση, με τη βοήθεια της οποίας μπορούμε να εξακριβώνουμε σε πολλές περιπτώσεις, αν μία σειρά με όρους μη άρνητικούς συγκλίνει ή απειρίζεται θετικά συγκρίνοντάς την με άλλη, γνωστής φύσεως, σειρά.

**§ 105. Πρόταση.** (Κριτήριο συγκρίσεως σειρών).—Αν  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  και  $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$  είναι δύο σειρές τέτοιες, ώστε:  $0 \leq \alpha_n \leq \beta_n$ , για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , τότε:

α)  $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$  συγκλίνει στο  $R \implies \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  συγκλίνει στο  $R$

β)  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = +\infty$ .



**Απόδειξη.** Έστω ότι είναι  $\sigma_n$  και  $\tau_n$  τα νιοστά μερικά άθροισματα των σειρών  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  και  $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$  αντιστοίχως. Επειδή  $\alpha_n \leq \beta_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , έχουμε ότι:

$$\sigma_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \leq \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n = \tau_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

α) Έστω ότι  $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \beta \in \mathbb{R}$ , τότε, σύμφωνα με την πρόταση α) της προηγούμενης παραγράφου, η ακολουθία  $(\tau_n)$  είναι φραγμένη στο  $\mathbb{R}$ . τότε, όμως, επειδή  $\sigma_n \leq \tau_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , έπεται ότι και η  $(\sigma_n)$  είναι φραγμένη στο  $\mathbb{R}$  και επειδή  $\alpha_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , σύμφωνα πάλι με την προηγούμενη πρόταση, η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  συγκλίνει στο  $\mathbb{R}$ .

β) Αν  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$  και υποθέσουμε ότι η  $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$  συγκλίνει στο  $\mathbb{R}$ , τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο, θα έπρεπε η  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  να ήταν συγκλίνουσα στο  $\mathbb{R}$ .

Αυτό όμως είναι άτοπο. Η  $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ , λοιπόν, ως σειρά με όρους μη αρνητικούς, αφού δε συγκλίνει στο  $\mathbb{R}$ , θα άπειρίζεται θετικά.

**Παρατηρήσεις.** 1) Στην περίπτωση α) της παραπάνω προτάσεως όχι μόνο η  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  συγκλίνει στο  $\mathbb{R}$ , αλλά και ισχύει:  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$  (γιατί;).

2) Η παραπάνω πρόταση ισχύει και στην περίπτωση που οι σχέσεις:  $0 \leq \alpha_n \leq \beta_n$  ισχύουν (όχι για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , αλλά) τελικά για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

**§ 106. Πόρισμα.** (όριακό κριτήριο συγκρίσεως).— Αν  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  και  $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$  είναι δύο σειρές με θετικούς όρους και  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = l$ , όπου  $0 < l < +\infty$ , τότε:

$$\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \text{ συγκλίνει στο } \mathbb{R} \iff \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \text{ συγκλίνει στο } \mathbb{R}$$

$$\beta) \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = +\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty.$$

**Απόδειξη.** Έχουμε:  $\frac{\alpha_n}{\beta_n} \rightarrow l, (0 < l < +\infty)$ , οπότε: για  $\varepsilon = \frac{1}{2}l > 0$ , υπάρχει δείκτης  $n_0 \in \mathbb{N}$  τέτοιος, ώστε: για κάθε  $n \geq n_0$  ισχύει:

$$\left| \frac{\alpha_n}{\beta_n} - l \right| < \frac{l}{2} \Rightarrow 0 < l - \frac{l}{2} < \frac{\alpha_n}{\beta_n} < l + \frac{l}{2} \Rightarrow 0 < \frac{1}{2}l < \frac{\alpha_n}{\beta_n} < \frac{3}{2}l \quad (1)$$

Από την (1), επειδή  $\beta_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , έχουμε τελικά για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ :

$$0 < \frac{1}{2}l \cdot \beta_n < \alpha_n < \frac{3}{2}l \cdot \beta_n \quad (2)$$

Από τη (2), με εφαρμογή του κριτηρίου συγκρίσεως και έχοντας υπόψη την παρατήρηση 2 της § 105 και τις παρατηρήσεις της § 102, αποδεικνύουμε άμεσα τις προτάσεις α) και β).

**Εφαρμογές. 1η:** Η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(n+1)}$  συγκλίνει, επειδή:  $\frac{1}{2^n(n+1)} < \frac{1}{2^n}, n = 1, 2, \dots$  και η  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  συγκλίνει ως γεωμετρική σειρά με λόγο  $\omega = \frac{1}{2} < 1$ .

**2η:** Έστω μία ακολουθία  $(\alpha_n)$  με  $\alpha_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Νά αποδείξετε ότι: αν μία από τις δύο σειρές  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  και  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{1+\alpha_n}$  συγκλίνει στο  $\mathbb{R}$  (αντιστοίχως άπειρίζεται θετικά), τότε το ίδιο συμβαίνει και για την άλλη.

**Απόδειξη.** Πρώτα-πρώτα παρατηρούμε ότι οι:  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  και  $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ , όπου  $\beta_n = \frac{\alpha_n}{1+\alpha_n}$  είναι σειρές με θετικούς όρους. Εξάλλου ισχύει:  $0 < \beta_n = \frac{\alpha_n}{1+\alpha_n} < \alpha_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

α) Έστω ότι η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  συγκλίνει στο  $\mathbb{R}$ , τότε, σύμφωνα με το κριτήριο συγκρίσεως σειρών, και η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$  θα συγκλίνει στο  $\mathbb{R}$ , γιατί  $0 < \beta_n < \alpha_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

β) Έστω ότι η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$  συγκλίνει στο  $\mathbb{R}$ , τότε:

$$\beta_n \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\alpha_n}{1+\alpha_n} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1+\alpha_n-1}{1+\alpha_n} \rightarrow 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{1+\alpha_n} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{1+\alpha_n} \rightarrow 1, \text{ οπότε: } \lim_{n \rightarrow \infty} (1+\alpha_n) = 1.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1+\alpha_n) = 1$ , οπότε, σύμφωνα με το όριακό κριτήριο συγκρίσεως (§ 106), και επειδή η  $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$  συγκλίνει στο  $\mathbb{R}$ , έπεται ότι και η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  θα συγκλίνει επίσης στο  $\mathbb{R}$ .

γ) Έστω ότι  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$  και ότι  $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$  συγκλίνει στο  $\mathbb{R}$ , τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο θα έπρεπε η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  να συγκλίνει στο  $\mathbb{R}$ . Αυτό όμως είναι άτοπο.

δ) Έστω ότι  $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = +\infty$ , τότε και  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$ , γιατί  $0 < \beta_n < \alpha_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

**§ 107. Σειρές απόλυτως συγκλίνουσες.**— Έστω  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  μία σειρά πραγματικών αριθμών με όρους όχι υποχρεωτικά μη αρνητικούς. Είναι φανερό ότι η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$  έχει όλους τους όρους της  $\geq 0$  και συνεπώς αν συμβαίνει:  $|\alpha_n| \leq \beta_n$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  και επιπλέον η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$  συγκλίνει στο  $\mathbb{R}$ , τότε,



σύμφωνα με το κριτήριο συγκρίσεως (§ 105), και η  $\sum_{v=1}^{\infty} |\alpha_v|$  θα συγκλίνει στο  $\mathbf{R}$ .

Γεννάται όμως τώρα το ερώτημα: από τη σύγκλιση της  $\sum_{v=1}^{\infty} |\alpha_v|$  μπορούμε να συμπεράνουμε ότι και η σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  συγκλίνει; Την απάντηση στο ερώτημα αυτό μάς τη δίνει η παρακάτω βασική πρόταση.

Δίνουμε προηγουμένως έναν ορισμό.

**Ορισμός.** Θα λέμε ότι μία σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots$  συγκλίνει απόλυτως στο  $\mathbf{R}$ , τότε και μόνο τότε, αν η σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} |\alpha_v| = |\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| + \dots$  συγκλίνει στο  $\mathbf{R}$ .

Για συντομία:

$$\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v \text{ συγκλίνει απόλυτως} \iff \sum_{v=1}^{\infty} |\alpha_v| = a \in \mathbf{R}$$

Έτσι, π.χ., η σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v+1} \cdot \frac{1}{2^v}$  συγκλίνει απόλυτως στο  $\mathbf{R}$ , επειδή η σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \left| (-1)^{v+1} \cdot \frac{1}{2^v} \right| = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{2^v}$  συγκλίνει, ως γεωμετρική σειρά με λόγο  $\omega = \frac{1}{2} < 1$ . Αντίθετα η σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v+1} \cdot \frac{1}{v}$  δε συγκλίνει απόλυτως στο  $\mathbf{R}$ , γιατί η σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \left| (-1)^{v+1} \cdot \frac{1}{v} \right| = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v}$  δε συγκλίνει στο  $\mathbf{R}$ .

Είναι φανερό ότι: αν  $\alpha_v \geq 0$  για κάθε  $v \in \mathbf{N}$ , τότε  $|\alpha_v| = \alpha_v$  και συνεπώς:  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  συγκλίνει στο  $\mathbf{R}$ , τότε και μόνο τότε, αν  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  συγκλίνει απόλυτως, δηλαδή στις σειρές με όρους μη αρνητικούς η άπλη σύγκλιση μιᾶς σειράς και η απόλυτη σύγκλιση ταυτίζονται. Αν όμως μία σειρά δεν έχει όλους τους όρους της μη αρνητικούς, τότε οι έννοιες: *άπλη σύγκλιση* σειράς και *απόλυτη σύγκλιση* είναι δύο έννοιες τελείως διαφορετικές.

Σχετικά ισχύει η επόμενη βασική πρόταση, από την οποία φαίνεται ότι η έννοια της απόλυτης συγκρίσεως μιᾶς σειράς είναι «ισχυρότερη» από την έννοια της άπλης συγκρίσεως.

**§ 108. Πρόταση.**—Αν μία σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  είναι απόλυτως συγκλίνουσα στο  $\mathbf{R}$ , είναι και άπλως συγκλίνουσα. Το αντίστροφο δεν αληθεύει πάντοτε.

Δηλαδή:  $\left( \sum_{v=1}^{\infty} |\alpha_v| \text{ συγκλίνει στο } \mathbf{R} \right) \Rightarrow \left( \sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v \text{ συγκλίνει στο } \mathbf{R} \right)$

**Απόδειξη.** Έστω ότι η  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  συγκλίνει απόλυτως, τότε  $\sum_{v=1}^{\infty} |\alpha_v| = s \in \mathbf{R}$ .

Θεωρούμε τη σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$  με γενικό όρο  $\beta_v = |\alpha_v| - \alpha_v$ . Έχουμε για κάθε  $v \in \mathbf{N}$ :

$$0 \leq \beta_v = |\alpha_v| - \alpha_v \leq |\alpha_v| + |\alpha_v| \leq 2|\alpha_v| \quad (1)$$

Από την (1), σύμφωνα με το κριτήριο συγκρίσεως, προκύπτει ότι η σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$  συγκλίνει στο  $\mathbf{R}$ , γιατί η  $\sum_{v=1}^{\infty} |\alpha_v|$ , ἄρα και η  $\sum_{v=1}^{\infty} 2|\alpha_v|$ , συγκλίνει στο  $\mathbf{R}$ .

Τότε όμως και η σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  συγκλίνει στο  $\mathbf{R}$ , γιατί από τη  $\beta_v = |\alpha_v| - \alpha_v$  έχουμε:  $\alpha_v = |\alpha_v| - \beta_v$ , για κάθε  $v \in \mathbf{N}$  και οι σειρές  $\sum_{v=1}^{\infty} |\alpha_v|$ ,  $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$  συγκλίνουν.

Το αντίστροφο της παραπάνω προτάσεως δεν αληθεύει πάντοτε. Δηλαδή, αν μία σειρά συγκλίνει στο  $\mathbf{R}$ , δεν έπεται ότι θα συγκλίνει και απόλυτως στο  $\mathbf{R}$ .

Ωστε: η σύγκλιση στο  $\mathbf{R}$  της  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  δε συνεπάγεται πάντοτε και τη σύγκλιση στο

$\mathbf{R}$  της  $\sum_{v=1}^{\infty} |\alpha_v|$ . Αυτό φαίνεται και από το εξής παράδειγμα: Αποδεικνύεται ότι η σειρά:

$$\sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v+1} \cdot \frac{1}{v} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{v+1} \frac{1}{v} + \dots$$

συγκλίνει στο  $\mathbf{R}$ , ενώ η σειρά:  $\sum_{v=1}^{\infty} \left| (-1)^{v+1} \frac{1}{v} \right| = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v} = +\infty$ .

Από το παραπάνω παράδειγμα συμπεραίνουμε ακόμη πώς από τη μη σύγκλιση στο  $\mathbf{R}$  της σειράς  $\sum_{v=1}^{\infty} |\alpha_v|$  δεν έπεται ότι και η  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  δε συγκλίνει στο  $\mathbf{R}$ .

**Παρατηρήσεις.** 1) Αν η σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  συγκλίνει απόλυτως στο  $\mathbf{R}$ , τότε ισχύει:

$$\left| \sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v \right| \leq \sum_{v=1}^{\infty} |\alpha_v| \quad (\text{γιατί;})$$

Η τελευταία σχέση αποτελεί γενίκευση της:  $\left| \sum_{k=1}^v \alpha_k \right| \leq \sum_{k=1}^v |\alpha_k|$  (βλ. § 26, σημ.).

2) Από την παραπάνω πρόταση προκύπτει ακόμη ότι: αν μία σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  δε συγκλίνει στο  $\mathbf{R}$ , τότε και η σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} |\alpha_v|$  δε συγκλίνει στο  $\mathbf{R}$ , και η τελευταία ως σειρά με όρους μη αρνητικούς απειρίζεται θετικά. Ωστε:

$$\left( \sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v \text{ δε συγκλίνει στο } \mathbf{R} \right) \Rightarrow \left( \sum_{v=1}^{\infty} |\alpha_v| = +\infty \right)$$

**Εφαρμογή.** Νά αποδείξετε ότι η σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{\eta_{\mu\nu}}{2^v}$  συγκλίνει στο  $\mathbf{R}$ .



Απόδειξη. Πράγματι, η σειρά που μας δόθηκε είναι απολύτως συγκλίνουσα, γιατί

$$0 \leq \left| \frac{\eta_{n+1}}{\eta_n} \right| \leq \frac{1}{2^n} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

και η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  συγκλίνει, ως γεωμετρική με λόγο  $\omega = \frac{1}{2} < 1$ . Τότε όμως, σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση, η σειρά είναι και απλώς συγκλίνουσα στο  $\mathbb{R}$ .

**§ 109. Μία αξιοσημείωτη και χρήσιμη εφαρμογή του κριτηρίου συγκρίσεως σειρών. (Αρμονική σειρά ρ-τάξεως).** — Σ' αυτή την παράγραφο μελετάμε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots \quad (1)$$

όπου  $p$  είναι ένας ορισμένος ρητός αριθμός.

Η σειρά (1) μαζί με τη γεωμετρική σειρά, την οποία μελετήσαμε ως προς τη σύγκλιση στην § 96, προσφέρονται συχνά στις εφαρμογές του κριτηρίου συγκρίσεως, γι' αυτό συνιστούμε στον αναγνώστη να θυμάται τότε αυτές συγκλίνουν στο  $\mathbb{R}$  και τότε απειρίζονται θετικά.

Επειδή η (1) είναι μία σειρά με θετικούς όρους, θα είναι:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \sigma$ , όπου  $0 < \sigma \leq +\infty$ . Ακριβέστερα ισχύει η επόμενη πρόταση:

**Πρόταση.**—Για την αρμονική σειρά ρ-τάξεως ισχύει:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } p \leq 1 \\ \text{συγκλίνει στο } \mathbb{R}, & \text{αν } p > 1 \end{cases} \quad (p \in \mathbb{Q})$$

Απόδειξη. α) Έστω ότι είναι:  $p \leq 1$ . Ειδικά για  $p = 1$  η πρόταση ισχύει (§ 98, επ. 3).

Αν  $p < 1$ , τότε για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  έχουμε:  $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^p}$  και επειδή  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$  από το κριτήριο συγκρίσεως συμπεραίνουμε ότι:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = +\infty$ .

β) Έστω τώρα ότι  $p > 1$ . Χωρίζουμε τους όρους της σειράς (1) σε ομάδες ως εξής:

$$\underbrace{\frac{1}{1^p}}_{\beta_1} + \underbrace{\left( \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} \right)}_{\beta_2} + \underbrace{\left( \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} \right)}_{\beta_3} + \underbrace{\left( \frac{1}{8^p} + \frac{1}{9^p} + \dots + \frac{1}{15^p} \right)}_{\beta_4} + \dots \quad (2)$$

δηλαδή κάθε ομάδα περιλαμβάνει ένα πλήθος όρων της σειράς (1) που είναι διπλάσιο από το πλήθος των όρων της προηγούμενης.

Επειδή εξάλλου είναι:

$$\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} < \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} = \frac{2}{2^p} = \frac{1}{2^{p-1}},$$

$$\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} < \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} = \frac{4}{4^p} = \frac{1}{4^{p-1}} = \frac{1}{2^{2(p-1)}},$$

$$\frac{1}{8^p} + \frac{1}{9^p} + \dots + \frac{1}{15^p} < \frac{1}{8^p} + \frac{1}{8^p} + \dots + \frac{1}{8^p} = \frac{8}{8^p} = \frac{1}{8^{p-1}} = \frac{1}{2^{3(p-1)}}, \dots, \text{κ.ο.κ.}$$

συμπεραίνουμε ότι η νέα σειρά:  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots$  έχει όρους θετικούς και μικρότερους (εκτός από τον πρώτο) από τους αντίστοιχους όρους της σειράς:

$$1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^{2(p-1)}} + \frac{1}{2^{3(p-1)}} + \dots \quad (3)$$

Η σειρά (3), επειδή είναι  $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$ , συγκλίνει (γιατί); Τότε όμως, σύμφωνα με το πρώτο συμπέρασμα του κριτηρίου συγκρίσεως, θα συγκλίνει και η (2).

Ωστε, για  $p \in \mathbb{Q}$ ,  $p > 1$  η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  συγκλίνει στο  $\mathbb{R}$ .

**Σχόλιο.** Κατά την απόδειξη του β' μέρους της παραπάνω προτάσεως δεχθήκαμε σιωπηρά την εξής πρόταση: αν χωρίσουμε τους διαδοχικούς όρους μιας συγκλίνουσας σειράς σε διαδοχικές ομάδες, τότε σχηματίζουμε μία καινούργια σειρά, η οποία είναι επίσης συγκλίνουσα και αντιστρόφως.

**Σημείωση.** Σ' ένα από τα επόμενα κεφάλαια θα ορίσουμε τη δύναμη με εκθέτη πραγματικό αριθμό. Σ' αυτή την περίπτωση πάλι η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ , όπου όμως τώρα  $p \in \mathbb{R}$ , ονομάζεται **αρμονική σειρά ρ-τάξεως** και αποδεικνύεται ότι και στην περίπτωση αυτή η προηγούμενη πρόταση ισχύει. Δηλαδή με  $p \in \mathbb{R}$  ισχύει:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } p \leq 1 \\ \text{συγκλίνει}, & \text{αν } p > 1 \end{cases}$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Ομάδα Α'. 221.** Να βρείτε ποιές από τις επόμενες σειρές συγκλίνουν στο  $\mathbb{R}$  και ποιές δε συγκλίνουν:

$$\begin{array}{lll} 1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^4}, & 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n}, & 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-3n+2}{n^4} \\ 4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2}, & 5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}+1}{n^3}, & 6. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \end{array}$$

222. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω σειρές:

$$\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right), \quad \beta) \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{5}{2^n} + \frac{7}{3^n} \right), \quad \gamma) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{6^n}$$

συγκλίνουν στο  $\mathbb{R}$  και να βρείτε τα άθροισματά τους.

223. Αν  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n - 1}{\alpha_n + 1} = 0$ , να αποδείξετε ότι η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  δε συγκλίνει στο  $\mathbb{R}$ .

224. Με τη βοήθεια του οριακού κριτηρίου συγκρίσεως σειρών (§ 106) να μελετήσετε ως προς τη σύγκλιση τις επόμενες σειρές:

$$\begin{array}{l} 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-2n-1} \quad (\text{Υπόδειξη. Να πάρετε ως } \beta_n = \frac{1}{n^2}) \\ 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{2n^2-1}, \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+2}{2n^3+n^2-1}, \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n^4+1}. \end{array}$$

225. Να αποδείξετε ότι: αν μία σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  με όρους μη αρνητικούς συγκλίνει στο  $\mathbb{R}$ ,

τότε και η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{\alpha_n}}{n}$  συγκλίνει επίσης στο  $\mathbb{R}$ .



**Υπόδειξη.** Έπειδή  $\alpha_n \geq 0 \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$  θα ισχύει:  $\alpha_n + \frac{1}{n^2} \geq 2\sqrt{\alpha_n \cdot \frac{1}{n^2}}$ , κτλ

226. Νά αποδείξετε ότι: αν μία σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  συγκλίνει στο  $\mathbb{R}$ , τότε συγκλίνει στο  $\mathbb{R}$  και η σειρά:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\sqrt{n^3}}$ .

**Υπόδειξη.** Η  $(\alpha_n)$  ως μηδενική ακολουθία είναι φραγμένη. Στη συνέχεια νά εφαρμόσετε το κριτήριο συγκρίσεως σειρών.

227. Νά βρείτε ποιές από τις επόμενες σειρές συγκλίνουν απολύτως στο  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{array}{lll} 1. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n-2}{n^3+1}, & 2. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n)^2}, & 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{1+n^2}, \\ 4. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{3n-1}, & 5. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n}{n+1}, & 6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}. \end{array}$$

**Ομάδα Β'. 228.** Νά αποδείξετε ότι η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{n+2}}$  συγκλίνει στο  $\mathbb{R}$ , ενώ δε συμβαίνει το ίδιο και για τη σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{n+1}}$ .

229. Νά αποδείξετε ότι: αν η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$  συγκλίνει στο  $\mathbb{R}$ , τότε συγκλίνει στο  $\mathbb{R}$  και η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ . Τό αντίστροφο δεν αληθεύει πάντοτε (παράδειγμα;).

230. "Αν  $\alpha_n > 0 \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$  και  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \alpha$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 = \beta$ , νά αποδείξετε ότι:  $\alpha^2 > \beta$ .

231. "Αν  $\alpha_n > 0 \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$  και  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ), νά αποδείξετε ότι καθεμία από τις σειρές:  $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + \alpha_{n+1})$  και  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_n \alpha_{n+1}}$  συγκλίνει στο  $\mathbb{R}$ . "Υστερα νά βρείτε το άθροισμα της σειράς με γενικό όρο:  $\beta_n = \frac{1}{2}(\alpha_n + \alpha_{n+1})$ .

**Υπόδειξη.** Νά εφαρμόσετε την ιδιότητα IV (§ 102) και νά λάβετε υπόψη σας ότι:

$$\sqrt{\alpha_n \alpha_{n+1}} \leq \frac{1}{2}(\alpha_n + \alpha_{n+1}), \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}.$$

232. Νά αποδείξετε ότι η σειρά:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n\sqrt{n}}$ , όπου  $\alpha_1 = \sqrt{2}$  και  $\alpha_{n+1} = \sqrt{2 + \alpha_n}$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , συγκλίνει στο  $\mathbb{R}$ . (**Υπόδειξη.** Νά λάβετε υπόψη σας την εφαρμογή 2 της §67).

233. "Εστω η ακολουθία  $(\alpha_n)$  με  $\alpha_1 = 5$  και  $\alpha_{n+1} = \sqrt{4\alpha_n + 3}$ ,  $\forall \quad n \in \mathbb{N}$ . Νά αποδείξετε ότι η σειρά με γενικό όρο:  $\beta_n = n^{-3/5} \cdot \alpha_n$  απειρίζεται θετικά.

**Υπόδειξη.** Νά λάβετε υπόψη σας την άσκηση 122.

## \* Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο VI

### ΑΚΕΡΑΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

#### I. ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

**§ 110. Η έννοια του άκέραιου πολυωνύμου — Έννοιες συναφείς με αυτή.** — α) **Εισαγωγή.** Η έννοια του άκέραιου πολυωνύμου με πραγματικούς συντελεστές μας είναι γνωστή από τα μαθήματα της Γ' τάξεως του Γυμνασίου. Εκεί όμως θεωρήσαμε τα άκέραια πολυώνυμα ως συναρτήσεις της μεταβλητής  $x$ , ή όποια έπαιρνε τιμές από ένα δοσμένο σύνολο  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}$ . Σ' αυτή την παράγραφο θα όρίσουμε πίο γενικά, αλλά και πίο αυστηρά — από Μαθηματική άποψη — την έννοια του άκέραιου πολυωνύμου μιās μεταβλητής, με τέτοιο όμως τρόπο, ώστε οι σχέσεις πού θα προκύψουν παρακάτω νά ισχύουν και όταν στο  $x$  δίνουμε τιμές από ένα σύνολο αριθμών, δηλαδή όταν θεωρούμε τα πολυώνυμα ως συναρτήσεις του  $x$  άφοϋ, όπως θα δοϋμε άμέσως παρακάτω, οι πράξεις επί τών πολυωνύμων θα όρισθούν κατά τέτοιο τρόπο σάν νά ήταν τό  $x$  στοιχείο του έν λόγω συνόλου.

β) **Έννοια άκέραιου πολυωνύμου.** "Εστω  $C$  τό σύνολο τών μιγαδικών αριθμών και ένα σύμβολο  $x$  πού τό λέμε : ή «**μεταβλητή**» ή ό «**άπροσδιόριστος**» και πού είναι στην πραγματικότητα τό άρχικό πολυώνυμο πού σχηματίζουμε. Τό  $x$ , βέβαια, δέν παριστάνει κανένα πραγματικό ή γενικότερα μιγαδικό αριθμό, πλην όμως μπορούμε νά σημειώνουμε πράξεις τών στοιχείων του  $C$ , σάν νά ήταν και τό  $x$  ένας πραγματικός ή γενικότερα ένας μιγαδικός αριθμός. "Ετσι ή έκφραση  $x^k$ , όπου  $k$  είναι φυσικός αριθμός, θα συμβολίζει άπλώς μία μορφή γινομένου  $x \cdot x \cdot \dots \cdot x$ , όπου τό  $x$  θα λαμβάνεται ως παράγοντας γινομένου  $k$  φορές. "Ομοίως ή έκφραση:  $\alpha x^k$ , όπου  $\alpha \in C$  και  $k \in \mathbb{N}$  θα συμβολίζει μία μορφή γινομένου του μιγαδικού αριθμού  $\alpha$  επί τό σύμβολο  $x^k$ . "Ορίζουμε άκόμη ότι  $x^0 = 1$ , όπότε  $\alpha x^0 = \alpha$  για κάθε  $\alpha \in C$ .

Δίνουμε τώρα τόν άκόλουθο όρισμό:

\* Μέ τόν όρο «**μεταβλητή**»  $x$  έννοοϋμε ένα σύμβολο  $x$ , τό όποιο μπορεί νά αντιπροσωπεϋει τό όποιοδήποτε στοιχείο ενός συνόλου αριθμών. "Υπάρχει διαφορά άνάμεσα στη μεταβλητή  $x$  και στόν άγνωστο  $x$  πού συναντάμε στίς εξισώσεις και τούτο γιατί ή μεταβλητή είναι άπλώς ένα σύμβολο και συνεπώς έχει άπροσδιόριστη τιμή, ενώ ό άγνωστος  $x$  έχει τιμή πού προσδιορίζεται.



**Όρισμός.** Ονομάζουμε **άκέραιο πολυώνυμο του x** κάθε έκφραση της μορφής:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (1)$$

όπου  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  και  $+$ ,  $x$  σύμβολα **άκαθόριστα**.

Οι αριθμοί  $a_0, a_1, \dots, a_n$  ονομάζονται **συντελεστές** \* του πολυωνύμου (1). Τό  $a_0$  θεωρείται ως συντελεστής του  $x^0$  και λέγεται **σταθερός όρος** του πολυωνύμου. Οι εκφράσεις της μορφής:  $a_k x^k$ , όπου  $k$  **άκέραιος**  $\geq 0$ , ονομάζονται **άκέραια μονώνυμα** του  $x$  και αποτελούν τους **όρους** του πολυωνύμου. Ειδικά ο όρος  $a_n x^n$  (αν  $a_n \neq 0$ ) ονομάζεται **πρώτος όρος** και ο  $a_0$  **πρώτος συντελεστής** του πολυωνύμου.

Γιά να παραστήσουμε ένα **άκέραιο πολυώνυμο** της μορφής (1) χρησιμοποιούμε, συνήθως, τους συμβολισμούς:  $f(x)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $g(x)$ ,  $\pi(x)$ ,  $u(x)$ , κλπ., όπου για τό  $f(x)$ , π.χ., διαβάζουμε «*f* του *x*» θέλοντας με αυτό τον τρόπο να τονίσουμε την εξάρτηση του πολυωνύμου  $f$  από τό βασικό πολυώνυμο  $x$ . Έτσι για συντομία γράφουμε:

$$f(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (2)$$

όπου τό σύμβολο:  $\equiv$  σημαίνει **έδω** ότι: **μέ τό  $f(x)$  παριστάνουμε τό πολυώνυμο, τό οποίο αναγράφεται στό β' μέλος, ισοδύναμα σημαίνει ότι: συντόμως συμβολίζουμε τό πολυώνυμο (1) μέ τό  $f(x)$ .**

Τό σύνολο τών **άκέραιων πολυωνύμων** του  $x$  μέ μιγαδικούς συντελεστές θά τό παριστάνουμε μέ  $\mathbb{C}[x]$ . Τά στοιχεία του  $\mathbb{C}[x]$ , δηλαδή τά **άκέραια πολυώνυμα** του  $x$ , τά συμβολίζουμε, όπως είπαμε και προηγουμένως, μέ:  $f(x)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $g(x)$ ,  $\pi(x)$ ,  $u(x)$  ... κλπ.

Θά έχουμε λοιπόν την **ισοδυναμία**:

$$f(x) \in \mathbb{C}[x] \iff f(x) \text{ άκέραιο πολυώνυμο του } x \text{ μέ μιγαδ. συντελεστές.}$$

Όπως ξέρουμε οί **άκέραιοι αριθμοί**, οί **ρητοί**, αλλά και **πιό γενικά** οί **πραγματικοί αριθμοί** είναι στοιχεία του συνόλου  $\mathbb{C}$  τών **μιγαδικών αριθμών** και μάλιστα **ισχύουν** οί παρακάτω σχέσεις **εγκλεισμού**:

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}. \quad (3)$$

Τό σύνολο λοιπόν  $\mathbb{C}[x]$  αποτελεί την **εuryτέρη κατηγορία** πού περιλαμβάνει όλα τά **άκέραια πολυώνυμα** του  $x$ , **οτιδήποτε αριθμοί** και **αν είναι** οί **συντελεστές** τους.

Ειδικότερα όμως θά παριστάνουμε μέ:

$\mathbb{R}[x]$ : **τό σύνολο τών άκέραιων πολυωνύμων μέ πραγματικούς συντελεστές**

$\mathbb{Q}[x]$ : **τό σύνολο τών άκέραιων πολυωνύμων μέ ρητούς συντελεστές**

$\mathbb{Z}[x]$ : **τό σύνολο τών άκέραιων πολυωνύμων μέ άκέραιους συντελεστές.**

Είναι φανερό τώρα ότι **ισχύει**:

$$\mathbb{Z}[x] \subset \mathbb{Q}[x] \subset \mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x]. \quad (4)$$

\* Γενικότερα οί **συντελεστές** μπορεί να είναι **παραστάσεις** πού **δέν περιέχουν** τό  $x$ .

Όπως ξέρουμε (§ 6) ή **έννοια** του συνόλου **συνδέεται στενά** μέ την έννοια **μιάς σχέσεως βασικής ισότητας**, πού τή **συμβολίζουμε** μέ  $\equiv$ . Η **βασική ισότητα** **ορίζεται** στό  $\mathbb{C}[x]$  ως **έξης**:

Αν  $f(x), \varphi(x) \in \mathbb{C}[x]$  και είναι:

$$f(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$\varphi(x) \equiv \beta_n x^n + \beta_{n-1} x^{n-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0,$$

τότε θά λέμε ότι: **τά πολυώνυμα  $f(x), \varphi(x)$  είναι ίσα** και θά γράφουμε  $f(x) = \varphi(x)$ , **τότε και μόνο τότε, αν οί συντελεστές τών ίσων «δυνάμεων» του  $x$  είναι ίσοι.** Έτσι:

$$f(x) = \varphi(x) \iff a_k = \beta_k \text{ για κάθε } k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

Από την παραπάνω **ισοδυναμία** συμπεραίνουμε ότι ή **συνθήκη  $f(x) = \varphi(x)$**  της **ισότητας** δύο **άκέραιων πολυωνύμων** **εκφράζεται** μέ την **ισοδύναμη συνθήκη** της **ισότητας** τών **αντίστοιχων συντελεστών** τών δύο πολυωνύμων. Αυτό έχει **σάν συνέπεια**, όπως θά δούμε παρακάτω (βλ. § 114, μέθοδος τών **προσδιοριστέων συντελεστών**), να **ανάγει** ένα **πρόβλημα πολυωνύμων** σε **ισοδύναμο** **πρόβλημα** πού **αναφέρεται** στους **συντελεστές** του.

**Παραδείγματα άκέραιων πολυωνύμων:** Οί παρακάτω εκφράσεις:

$$f(x) \equiv x^4 - 2x^3 + 5x^2 - (3 + 2i)x + 10i$$

$$\varphi(x) \equiv (2 + 3i)x^3 - \frac{4}{3}x^2 + (5 - \sqrt{3})x + 2$$

$$g(x) \equiv x^3 + 3ax^2 + 3bx + \gamma, \text{ όπου } a, b, \gamma \in \mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C}$$

είναι **όλες άκέραια πολυώνυμα** του  $x$ . **Απεναντίας** οί εκφράσεις:

$$2x^3 - 5x^{-2} + 4x^{3/2} - 3x^{-1}, \quad 3x^{-2} - 2x^{-1} + 7, \quad 5x^2 + x + 4x^{2/3} + 1$$

**δέν είναι** **άκέραια πολυώνυμα** της **μεταβλητής  $x$ .**

**Σχόλια:** α) Από τά παραπάνω παραδείγματα και από τόν **όρισμό** πού δώσαμε για τό **άκέραιο πολυώνυμο** συμπεραίνουμε ότι ο **χαρακτηρισμός** ενός πολυωνύμου ως «**άκέραιο**» **δέν έχει** καμιά **απολύτως σχέση** μέ τό αν είναι ή **δέν είναι** οί **συντελεστές** του πολυωνύμου **άκέραιοι αριθμοί**. Η **απόδοση** του **επιθέτου «άκέραιο»** στον **όρο «πολυώνυμο»** **οφείλεται** στό **έξης**: όπως θά δούμε **στις άμέσως επόμενες παραγράφους**, τό σύνολο  $\mathbb{C}[x]$  τών **άκέραιων πολυωνύμων** του  $x$  έχει **πολλές ιδιότητες τελείως ανάλογες** μέ **έκείνες** πού έχουμε **συναντήσει** στό σύνολο  $\mathbb{Z}$  τών **άκέραιων αριθμών**. Έτσι, π.χ. στό σύνολο  $\mathbb{C}[x]$  **ισχύει** ή **ιδιότητα** της **διαγραφής**, **έπίσης ορίζεται** στό σύνολο  $\mathbb{C}[x]$  **τέλεια διαίρεση**, **αλγοριθμική διαίρεση** κλπ, μέ **ιδιότητες** **ανάλογες** μέ **έκείνες** πού έχουμε **μάθει** στην **Α' τάξη** του **Γυμνασίου** για τούς **άκέραιους αριθμούς**.

β) Η **έκφραση** (1), δηλαδή ή:  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  **δέ σημαίνει** **πρόσθεση** **ούτε κάποια άλλη πράξη** μεταξύ τών **μιγαδικών αριθμών**  $a_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ) και της **μεταβλητής  $x$** , αλλά είναι ένα **νέο σύμβολο** μέ τό  $x$  και τό  $+$  **άκαθόριστα σύμβολα**. Η **σημασία** της **παραστάσεως** (1), δηλαδή του **άκέραιου πολυωνύμου** **μιάς μεταβλητής  $x$** , θά **προκύψει** παρακάτω **κατόπιν** **ορισμένων ιδιοτήτων**, **καθεμία** από τίς **όποιες** θά **οριστεί** **έπ' αυτού**.

**Γενική παρατήρηση.** Σ' αυτό τό βιβλίο **πολλές φορές** **αντί** να λέμε «**άκέραιο πολυώνυμο**» θά λέμε, για **συντομία**, **άπλως «πολυώνυμο»** και θά **έννοούμε** **πάντοτε «άκέραιο πολυώνυμο μιάς μεταβλητής»**.



γ) Τό μηδενικό πολυώνυμο. "Αν  $\sigma'$  ένα πολυώνυμο όλοι οί συντελεστές του είναι μηδέν, δηλαδή μία έκφραση τής μορφής:

$$0x^v + 0x^{v-1} + \dots + 0x + 0$$

ονομάζεται **μηδενικό πολυώνυμο** του  $x$  και συμβολίζεται με  $0(x)$  ή πιο απλά με  $0$ , αν δεν υπάρχει κίνδυνος για παρερμηνεία. "Ωστε:

$$0(x) \equiv 0x^v + 0x^{v-1} + \dots + 0x + 0 \quad (6)$$

"Αμεση συνέπεια τής ισότητας δύο πολυωνύμων είναι ή ακόλουθη βασική πρόταση:

"Ένα πολυώνυμο  $f(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$  είναι ίσο με τό μηδενικό πολυώνυμο, τότε και μόνο τότε, αν:  $a_v = a_{v-1} = \dots = a_1 = a_0 = 0$ .

"Ωστε:

$$f(x) = 0(x) \iff a_v = a_{v-1} = \dots = a_1 = a_0 = 0 \quad (7)$$

**Προσέξτε!** στην παραπάνω ισοδυναμία τό = του άριστερου μέλους παριστάνει τή βασική ισότητα στό σύνολο  $C[x]$ , ενώ τό = του δεξιού μέλους παριστάνει τή βασική ισότητα στό σύνολο  $C$  των μιγαδικών αριθμών.

Γιά νά δηλώσουμε ότι τό πολυώνυμο  $f(x)$  δεν είναι τό μηδενικό πολυώνυμο γράφουμε:  $f(x) \neq 0(x)$  ή πιο απλά:  $f(x) \neq 0$ .

"Από τήν (7) συμπεραίνουμε άμέσως ότι:  $f(x) \neq 0(x)$ , τότε και μόνο τότε, αν ένας (τουλάχιστο) από τούς συντελεστές του  $f(x)$  είναι διάφορος από τό μηδέν.

δ) **Βαθμός ενός μή μηδενικού πολυωνύμου.** "Ονομάζουμε **βαθμό** ενός άκέραιου πολυωνύμου  $f(x) \neq 0$  τό μεγαλύτερο εκθέτη τής μεταβλητής  $x$ , τής οποίας ό συντελεστής είναι διάφορος του μηδενός.

Γιά νά δηλώσουμε τό βαθμό ενός πολυωνύμου  $f(x)$  θά γράφουμε: **βαθμ.  $f(x)$** .

"Ετσι, αν  $f(x) \equiv a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , έχουμε τήν ισοδυναμία:

$$\text{βαθμ. } f(x) = v \iff a_v \neq 0 \quad (8)$$

όπου  $v$  μή άρνητικός άκέραιος, δηλαδή  $v \in N_0$ .

"Ετσι, π.χ. του πολυωνύμου  $f(x) \equiv 5x^3 - 2x^2 + 3x - 1$  ό βαθμός είναι 3, ενώ του πολυωνύμου  $\varphi(x) \equiv 0x^4 + 0x^3 - 5x^2 + \sqrt{3}x + 10i$  ό βαθμός είναι 2.

"Η ισοδυναμία (8) μάς οδηγεί νά δώσουμε γιά τό βαθμό ενός μή μηδενικού πολυωνύμου και τόν εξής ισοδύναμο όρισμό:

**Βαθμός ενός μή μηδενικού πολυωνύμου  $f(x)$**  ονομάζεται ό δείκτης  $v$  του πρώτου συντελεστή  $a_v$  ( $a_v \neq 0$ ) του πολυωνύμου.

Στό μηδενικό πολυώνυμο  $0(x) \equiv 0x^v + 0x^{v-1} + \dots + 0x + 0$  δεν επιτινάπτουμε βαθμό. "Εξάλλου από τήν ισοδυναμία (8) συμπεραίνουμε ότι πο-

λυώνυμα **μηδενικού βαθμού** είναι τά σταθερά πολυώνυμα  $f(x) \equiv a_0$  με  $a_0 \neq 0$ . "Ετσι π.χ. τό (μοναδιαίο) πολυώνυμο  $f(x) \equiv 1$  είναι μηδενικού βαθμού. **Προσέξτε!** όλα τά σταθερά πολυώνυμα δεν έχουν βαθμό, καθόσον σ' αυτά υπάρχει και τό μηδενικό πολυώνυμο, στό όποιο, όπως είπαμε, δεν αποδίδουμε βαθμό.

"Ωστε: **βαθμό έχουν όλα τά μή μηδενικά πολυώνυμα και μόνο αυτά.**

**Σημείωση.** Δεν πρέπει νά συγχέουμε τίς έννοιες: **μηδενικό πολυώνυμο** και **πολυώνυμο μηδενικού βαθμού**. "Επίσης τίς έννοιες: **σταθερά**  $a_0$  ( $a_0 \in C$ ) και **σταθερό πολυώνυμο**  $a_0 = a_0 x^0$ , καθόσον τό τελευταίο είναι στοιχείο του  $C[x]$ .

Μετά τήν εισαγωγή τής έννοιας του βαθμού ενός πολυωνύμου, ό όρισμός τής ισότητας δύο πολυωνύμων διατυπώνεται πιο γενικά ως εξής:

**"Ορισμός.** Δύο άκέραια πολυώνυμα:

$$f(x) \equiv a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$\varphi(x) \equiv \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0$$

θά λέμε ότι είναι ίσα και θά γράφουμε:  **$f(x) = \varphi(x)$** , τότε και μόνο τότε, αν είναι και τά δύο τό μηδενικό πολυώνυμο  **$0(x)$**  ή

**βαθμ.  $f(x) = \text{βαθμ. } \varphi(x)$** , δηλ.  $v = \mu$  και  $a_k = \beta_k$  γιά κάθε  $k = 0, 1, 2, \dots, v$ .

"Αν όλοι οί συντελεστές ενός πολυωνύμου:

$$f(x) \equiv a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad (a_v \neq 0) \quad (9)$$

είναι διάφοροι από τό μηδέν, τότε τό  $f(x)$ , όπως ξέρουμε, ονομάζεται «πλήρες» ενώ αν ένας τουλάχιστο συντελεστής, διάφορος από τό  $a_v$ , είναι μηδέν, τότε τό  $f(x)$  ονομάζεται «έλλιπές». "Ετσι, π.χ. τό πολυώνυμο  $f(x) \equiv 5x^3 - 2x^2 + 3x - 1$  είναι πλήρες, ενώ τό  $\varphi(x) \equiv 3x^5 - 2x^3 + x^2 - 4$  είναι έλλιπές.

Τό πολυώνυμο (9) μπορεί επίσης νά γραφεί και ως εξής:

$$f(x) \equiv a_0 + a_1 x + \dots + a_{v-1} x^{v-1} + a_v x^v, \quad (a_v \neq 0) \quad (10)$$

δηλ. κατά τίς άντιούσες δυνάμεις του  $x$ .

Καθεμία από τίς έκφράσεις (9) και (10) ονομάζεται **συνήθης μορφή** του  $f(x)$  διατεταγμένου κατά τίς κατιούσες δυνάμεις του  $x$  (στήν (9)) ή κατά τίς άντιούσες δυνάμεις του  $x$  (στή (10)).

Κάθε πολυώνυμο μπορεί νά επεκταθεί και πέρα από τό βαθμό του, άρκει γιά τό σκοπό αυτό νά επισυνάψουμε όρους που έχουν συντελεστή τό μηδέν.

"Ετσι τό πολυώνυμο (10), βαθμού  $v$ , μπορεί νά γραφεί:

$$f(x) \equiv a_0 + a_1 x + \dots + a_v x^v + 0x^{v+1} + 0x^{v+2} + \dots \quad (11)$$

"Η (11) μάς οδηγεί νά θεωρήσουμε, πιο γενικά, τά πολυώνυμα σαν έκφράσεις τής μορφής:  $f(x) \equiv a_0 + a_1 x + \dots + a_v x^v + \dots$  με  $a_k \in C$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$  και  $v \in N_0$ , όπου ένα πεπερασμένο πλήθος μόνο από τούς συντελεστές  $a_0, a_1, \dots, a_v, \dots$  είναι διάφοροι από τό μηδέν.

**Σημείωση.** "Από τά παραπάνω συμπεραίνουμε τώρα ότι: μπορούμε νά γράφουμε πάντοτε δύο πολυώνυμα με τό ίδιο πλήθος όρων, επισυνάπτοντας στό πολυώνυμο που έχει τό μικρότερο βαθμό όρους με συντελεστή τό μηδέν.



Ας θεωρήσουμε τώρα ένα πολυώνυμο  $f(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ . Αυτό ανάλογα με το βαθμό του, μπορεί να είναι:

- i) δευτέρου βαθμού, αν  $\alpha \neq 0$ . Ειδικά το  $f(x)$  είναι τριώνυμο, αν:  $\alpha\beta\gamma \neq 0$ .
- ii) πρώτου βαθμού, αν  $\alpha = 0$  και  $\beta \neq 0$ .
- iii) μηδενικού βαθμού, αν  $\alpha = \beta = 0$  και  $\gamma \neq 0$ .
- iv) το μηδενικό πολυώνυμο, αν  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ .

Στά επόμενα, αντί να γράφουμε τις περιπτώσεις (i) - (iv) θα λέμε, για συντομία, ότι το  $f(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ δύο.

Πιο γενικά: Θα ονομάζουμε **άκέραιο πολυώνυμο βαθμού το πολύ  $n$**  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ) κάθε έκφραση της μορφής:

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n + \dots \quad (12)$$

στην οποία είναι:  $\alpha_{n+1} = \alpha_{n+2} = \dots = 0$ .

Συνήθως σ' ένα τέτοιο πολυώνυμο οι όροι  $\alpha_{n+1}x^{n+1}$ ,  $\alpha_{n+2}x^{n+2}$ , ... παραλείπονται, οπότε η γενική μορφή ενός άκέραιου πολυωνύμου  $f(x)$  βαθμού το πολύ  $n$  είναι:

$$f(x) \equiv \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n \quad (13)$$

ή ισοδύναμα:

$$f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 \quad (14)$$

**§ 111. "Αλγεβρα (λογισμός) των πολυωνύμων.**— Έστω  $C[x]$  το σύνολο των άκέραιων πολυωνύμων του  $x$  με συντελεστές μιγαδικούς αριθμούς.

Μεταξύ των στοιχείων του  $C[x]$ , δηλαδή μεταξύ των άκέραιων πολυωνύμων, εκτελούνται πράξεις με έντελως όμοιες ιδιότητες με εκείνες που ξέρουμε για την πρόσθεση, την αφαίρεση και τον πολλαπλασιασμό των αριθμών. Γι' αυτό και τις πράξεις στο  $C[x]$  τις ονομάζουμε: *πρόσθεση*, *αφαίρεση* και *πολλαπλασιασμό* και τις παριστάνουμε αντίστοιχα με τα ίδια σύμβολα  $+$ ,  $-$ ,  $\cdot$ . Έτσι μεταξύ των στοιχείων του  $C[x]$  μπορούμε να ορίσουμε το *άθροισμα* \*, *τή διαφορά* και το *γινόμενο* δύο άκέραιων πολυωνύμων του  $x$ , ως ένα επίσης άκέραιο πολυώνυμο του  $x$ , δηλ. ως ένα στοιχείο του  $C[x]$ . Ακριβέστερα, αν  $f(x)$ ,  $\varphi(x)$  είναι δύο οποιαδήποτε στοιχεΐα του  $C[x]$ , δηλ. δύο άκέραια πολυώνυμα του  $x$ , τότε \*\*:

α) Ονομάζουμε **άθροισμα** των πολυωνύμων:

$$f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 \quad (1)$$

\* Δεν πρέπει να συγχέουμε τις έννοιες: *πρόσθεση*, *αφαίρεση*, *πολλαπλασιασμός* με τις έννοιες: *άθροισμα*, *διαφορά*, *γινόμενο*. Οι πρώτες είναι *πράξεις*, ενώ οι δεύτερες είναι *τό αποτέλεσμα* των αντίστοιχων πράξεων (πολυώνυμο).

\*\* Δεχόμαστε, χωρίς αυτό να περιορίζει τη γενικότητα, ότι τα πολυώνυμα  $f(x)$  και  $\varphi(x)$  έχουν το ίδιο πλήθος όρων. Αν τα  $f(x)$ ,  $\varphi(x)$  δεν έχουν το ίδιο πλήθος όρων, τότε επισυνάπτουμε στο πολυώνυμο με το μικρότερο βαθμό όρους με συντελεστή μηδέν, ώστε τα δύο πολυώνυμα να έχουν το ίδιο πλήθος όρων (βλ. και Σημείωση § 110).

$$\varphi(x) \equiv \beta_n x^n + \beta_{n-1} x^{n-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0 \quad (2)$$

και το συμβολίζουμε με:  $f(x) + \varphi(x)$ , το πολυώνυμο:

$$(\alpha_n + \beta_n)x^n + (\alpha_{n-1} + \beta_{n-1})x^{n-1} + \dots + (\alpha_1 + \beta_1)x + (\alpha_0 + \beta_0) \quad (3)$$

δηλαδή το άθροισμα δύο πολυωνύμων είναι το πολυώνυμο που έχει συντελεστή του  $x^k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) το άθροισμα των συντελεστών του  $x^k$  στα δύο πολυώνυμα.

β) Ονομάζουμε **αντίθετο** του πολυωνύμου  $\varphi(x)$  και το συμβολίζουμε με:  $-\varphi(x)$ , το πολυώνυμο που έχει συντελεστές τους αντίθετους των συντελεστών του  $\varphi(x)$ . Έστω:

$$-\varphi(x) \equiv -\beta_n x^n - \beta_{n-1} x^{n-1} - \dots - \beta_1 x - \beta_0 \quad (4)$$

γ) Ονομάζουμε **διαφορά** του πολυωνύμου  $\varphi(x)$  από το πολυώνυμο  $f(x)$  και τη συμβολίζουμε με:  $f(x) - \varphi(x)$ , το πολυώνυμο:  $f(x) + [-\varphi(x)]$ . Έστω:

$$f(x) - \varphi(x) \equiv (\alpha_n - \beta_n)x^n + (\alpha_{n-1} - \beta_{n-1})x^{n-1} + \dots + (\alpha_1 - \beta_1)x + (\alpha_0 - \beta_0) \quad (5)$$

Από τον παραπάνω ορισμό και την ισοδυναμία (7) της προηγούμενης παραγράφου συμπεραίνουμε άμέσως ότι:

$$f(x) = \varphi(x) \iff f(x) - \varphi(x) = 0(x) \quad (6)$$

δ) Ονομάζουμε **γινόμενο ενός αριθμού** (πραγμ. ή μιγαδικού)  $\lambda$  επί το πολυώνυμο  $f(x)$  και το συμβολίζουμε με:  $\lambda f(x)$ , το πολυώνυμο:

$$\lambda f(x) \equiv (\lambda \alpha_n)x^n + (\lambda \alpha_{n-1})x^{n-1} + \dots + (\lambda \alpha_1)x + (\lambda \alpha_0) \quad (7)$$

ε) Ονομάζουμε **γινόμενο** του πολυωνύμου  $f(x)$  επί το πολυώνυμο  $\varphi(x)$  και το συμβολίζουμε με:  $f(x) \cdot \varphi(x)$ , το άκέραιο πολυώνυμο του  $x$  που έχει συντελεστή του  $x^k$  ( $k = 0, 1, \dots, 2n$ ) το άθροισμα των γινομένων των συντελεστών τους με άθροισμα δεικτών ίσο με  $k$ . Δηλαδή:

$$f(x) \cdot \varphi(x) \equiv \alpha_0 \beta_0 + (\alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0)x + (\alpha_0 \beta_2 + \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_0)x^2 + \dots + \alpha_n \beta_n x^{2n} \quad (8)$$

**Αξιόλογη παρατήρηση.** Έπειδή τα άκέραια μονώνυμα του  $x$  (βλ. § 110) είναι και αυτά επίσης στοιχεΐα του  $C[x]$ , δηλαδή άκέραια πολυώνυμα του  $x$ , συμπεραίνουμε, ύστερα από τους παραπάνω ορισμούς, ότι: *κάθε πολυώνυμο είναι «άθροισμα» των όρων του και κάθε όρος του είναι «γινόμενο» του συντελεστή του επί παράγοντες ίσους με  $x$ .*

Γιά τις πράξεις της προσθέσεως και του πολλαπλασιασμού, που ορίσαμε παραπάνω, ισχύουν, όπως εύκολα διαπιστώνει κανείς, ό *αντιμεταθετικός*, *προσεταιριστικός* και *επιμεριστικός νόμος*. Επιπλέον υπάρχει *ουδέτερο στοιχείο* για την πρόσθεση και αυτό είναι το μηδενικό πολυώνυμο  $0(x) \equiv 0$ , καθώς επίσης υπάρχει *ουδέτερο στοιχείο* για τον πολλαπλασιασμό και μάλιστα αυτό είναι το σταθερό πολυώνυμο 1. Τέλος, ό πολλαπλασιασμός ( $\cdot$ ) είναι μέσα στο  $C[x]$  πράξη *επιμεριστική* και ως προς την αφαίρεση. Έτσι έχουμε:

$$f(x)[\varphi(x) - g(x)] = f(x) \cdot \varphi(x) - f(x) \cdot g(x).$$



στ) 'Ονομάζουμε **v-οστή δύναμη** ενός πολυωνύμου  $f(x) \neq 0(x)$  και τη συμβολίζουμε με  $[f(x)]^v$ , τό πολυώνυμο:

$$[f(x)]^v \stackrel{\text{ορσ}}{=} f(x) \cdot f(x) \cdots f(x), \quad (9)$$

όπου οι παράγοντες του δεύτερου μέλους είναι v.

'Από τόν παραπάνω όρισμό προκύπτει τώρα ότι:

$$1. [f(x)]^v \cdot [f(x)]^u = [f(x)]^{v+u}$$

$$2. [[f(x)]^u]^v = [f(x)]^{uv}$$

$$3. [f(x) \cdot g(x)]^v = [f(x)]^v \cdot [g(x)]^v.$$

**Σχόλιο.** Συνοψίζοντας τὰ παραπάνω υπογραμμίζουμε τὰ βασικότερα σημεία:

i) 'Η πρόσθεση, ή αφαίρεση και ό πολλαπλασιασμός πολυωνύμων είναι πράξεις «κλειστές» στο σύνολο  $C[x]$ , καθόσον τό άθροισμα, ή διαφορά και τό γινόμενο δύο άκέραιων πολυωνύμων είναι επίσης άκέραιο πολυώνυμο.

ii) Τό ούδέτερο στοιχείο της προσθέσεως, δηλαδή τό μηδενικό πολυώνυμο, καθώς επίσης και τό ούδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού, δηλαδή τό σταθερό πολυώνυμο 1, είναι άκέραια πολυώνυμα, δηλαδή  $0(x) \in C[x]$  και  $1 \in C[x]$ . 'Επίσης τό αντίθετο πολυώνυμο:  $-f(x)$  ενός πολυωνύμου  $f(x)$  είναι και αυτό άκέραιο πολυώνυμο του x.

iii) Οι πράξεις (+) και (·) είναι μέσα στο  $C[x]$  αντιμεταθετικές και προσεταιριστικές. 'Επιπλέον ή πράξη (·) είναι έπιμεριστική ως προς τίς πράξεις + και -.

'Ολα τὰ παραπάνω χαρακτηρίζουν τό σύνολο  $C[x]$  των άκέραιων πολυωνύμων ως ένα «δακτύλιο μέ μοναδιαίο στοιχείο». 'Ο δακτύλιος αυτός ονομάζεται: **ό δακτύλιος των πολυωνύμων επάνω στο C** και συμβολίζεται μέ  $C[x]$ .

Γιά τό βαθμό του άθροίσματος, της διαφοράς και του γινομένου δύο άκέραιων πολυωνύμων  $f(x)$  και  $\varphi(x)$ , όπως εύκολα διαπιστώνει κανείς, ισχύουν:

$$\alpha) \text{βαθμ.}[f(x) \pm \varphi(x)] \leq \max \{ \text{βαθμ.} f(x), \text{βαθμ.} \varphi(x) \} \quad (10)$$

$$\beta) \text{βαθμ.}[\lambda f(x)] = \text{βαθμ.} f(x), \text{ για κάθε } \lambda \in C \text{ με } \lambda \neq 0 \quad (11)$$

$$\gamma) \text{βαθμ.}[f(x) \cdot \varphi(x)] = \text{βαθμ.} f(x) + \text{βαθμ.} \varphi(x). \quad (12)$$

Είναι φανερό ότι οι παραπάνω σχέσεις: (10), (11) και (12) ισχύουν μέ την προϋπόθεση ότι:  $f(x), \varphi(x), f(x) \pm \varphi(x)$ , είναι όλα μή μηδενικά πολυώνυμα του x.

**'Ασκηση.** Νά εξετάσετε πότε ή (10) ισχύει μέ τό ίσον;

'Η γνωστή ιδιότητα που ξέρουμε για τούς άκέραιους, αλλά και πιο γενικά για τούς πραγματικούς και μιγαδικούς αριθμούς, σύμφωνα μέ την οποία:  $\alpha \cdot \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$  είτε  $\beta = 0$ , ισχύει και για άκέραια πολυώνυμα. 'Ακριβέστερα ισχύει ή πρόταση:

**Πρόταση.** 'Αν  $f(x), \varphi(x)$  άκέραια πολυώνυμα και  $f(x) \cdot \varphi(x) = 0$ , τότε ένα τουλάχιστο άπ' αυτά θά είναι τό μηδενικό πολυώνυμο.

'Η απόδειξη της παραπάνω προτάσεως είναι άπλή, άρκεί νά εφαρμόσουμε τή μέθοδο της «εις άτοπον» άπαγωγής και νά παρατηρήσουμε ότι ό πρώτος συντελεστής του γινομένου  $f(x) \cdot \varphi(x)$  είναι τότε διάφορος από τό μηδέν. 'Αρα  $f(x) \cdot \varphi(x) \neq 0$  (άτοπο).

'Αμεσες συνέπειες της παραπάνω προτάσεως είναι τὰ πορίσματα:

**Πόρισμα 1ο.**—Τό γινόμενο δύο μή μηδενικών πολυωνύμων ποτέ δέ μπορεί νά γίνει τό μηδενικό πολυώνυμο.

$$\text{Δηλαδή: } f(x) \neq 0 \wedge g(x) \neq 0 \Rightarrow f(x) \cdot g(x) \neq 0 \quad (13)$$

Πράγματι: άν ήταν  $f(x) \cdot g(x) = 0$ , τότε  $f(x) = 0 \vee g(x) = 0$  (άτοπο).

**Πόρισμα 2ο.** (*Νόμος της άπλοποιήσεως ή διαγραφής*).— 'Αν  $f(x), g(x)$  και  $\varphi(x) \in C[x]$ , τότε ισχύει ή συνεπαγωγή:

$$\varphi(x) \neq 0 \wedge f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x) \Rightarrow f(x) = g(x) \quad (14)$$

**'Απόδειξη.** Διαδοχικά έχουμε:

$$f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x) \Rightarrow f(x) \varphi(x) - g(x) \cdot \varphi(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) \cdot [f(x) - g(x)] = 0$$

και έπειδή  $\varphi(x) \neq 0$ , σύμφωνα μέ την προηγούμενη πρόταση, θά έχουμε:

$$f(x) - g(x) = 0(x) \text{ και συνεπώς } f(x) = g(x).$$

**\* Σχόλιο.** 'Οπως θά δοϋμε σ' ένα από τὰ επόμενα κεφάλαια (βλ. Κεφ. IX, § 188, παρατήρηση) υπάρχουν σύνολα στα όποια ή γνωστή ιδιότητα:  $\alpha\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \vee \beta = 0$  δέν ισχύει. Πιο συγκεκριμένα: υπάρχουν σύνολα στα όποια τό γινόμενο δύο παραγόντων μπορεί νά είναι ίσο μέ τό 0, άν και οι δύο παράγοντες είναι διάφοροι του μηδενός.

Στοιχεία  $\alpha \neq 0$  και  $\beta \neq 0$  μέ την ιδιότητα  $\alpha\beta = 0$  ονομάζονται **διαιρέτες του μηδενός** ή μέ μία λέξη **μηδενοδιαιρέτες**.

'Εχοντας τώρα υπόψη την προηγούμενη πρόταση και κυρίως τό πόρισμα 1 συμπεραίνουμε ότι τό σύνολο  $C[x]$  των άκέραιων πολυωνύμων του x δέν έχει μηδενοδιαιρέτες. 'Εξάλλου, όπως είπαμε και στο προηγούμενο σχόλιο, τό  $C[x]$  είναι ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μοναδιαίο στοιχείο τό άκέραιο πολυώνυμο  $f(x) = 1 = 1x^0$ .

'Ολα τὰ παραπάνω χαρακτηρίζουν τό σύνολο  $C[x]$  των άκέραιων πολυωνύμων ως μία «**άκέραια περιοχή**». 'Η έννοια του δακτύλιου και της άκέραιας περιοχής αποτελούν δύο θεμελιώδεις έννοιες της μοντέρνας (σύγχρονης) 'Αλγεβρας.

**§ 112. Πολυωνυμική συνάρτηση - 'Αριθμητική τιμή και ρίζα άκέραιου πολυωνύμου.**— α) 'Οπως είπαμε και στην άρχή αυτού του Κεφαλαίου, μπορούμε νά θεωρούμε την έκφραση ενός άκέραιου πολυωνύμου  $f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$  σαν τύπο συναρτήσεως μέ ανεξάρτητη μεταβλητή τό x. Θεωρούμε δηλαδή τή συνάρτηση:

$$\hat{f}: A \rightarrow C, \text{ όπου } A \subset C, \text{ με τύπο: } f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0.$$

'Ακριβέστερα θεωρούμε τή (μονοσήμαντη) απεικόνιση:

$$\hat{f}: A \rightarrow C: x \mapsto \hat{f}(x) = f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 \quad (1)$$

όπου  $A \subset C$  και  $f(x) \in C[x]$ .

Οι συναρτήσεις της μορφής (1) ονομάζονται **πολυωνυμικές συναρτήσεις** του x και θά τίς παριστάνουμε στα επόμενα μέ  $f(x)$  αντί  $\hat{f}(x)$ .

β) 'Ας θεωρήσουμε τώρα ένα οποιοδήποτε, αλλά σταθερό στοιχείο του A, π.χ. τό ξ. 'Η εικόνα  $f(\xi)$  του ξ κατά την απεικόνιση (1), δηλαδή τό στοιχείο:  $\alpha_n \xi^n + \alpha_{n-1} \xi^{n-1} + \cdots + \alpha_1 \xi + \alpha_0$  του C ονομάζεται **αριθμητική τιμή της πο-**



λυνωνμικής συναρτήσεως (1) για  $x = \xi$ . Συχνά όμως στα επόμενα για συντομία θα λέμε ότι :  $\eta f(\xi)$  είναι η αριθμητική τιμή του πολωνύμου  $f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$  για  $x = \xi$  και θα γράφουμε:

$$f(\xi) = \alpha_n \xi^n + \alpha_{n-1} \xi^{n-1} + \dots + \alpha_1 \xi + \alpha_0.$$

**Προσέξτε!** η τιμή  $f(\xi)$  δεν προκύπτει από το πολωνύμο για  $x = \xi$ , αλλά με αντικατάσταση του  $x$  από το  $\xi$  και εκτέλεση των αντίστοιχων αριθμητικών πράξεων και όχι πράξεων μεταξύ πολωνύμων.

Είναι τώρα άμεσως φανερό ότι: η αριθμητική τιμή του άθροισματος (άντ. του γινομένου) δύο πολωνύμων ισούται με το άθροισμα (άντ. το γινόμενο) των αριθμητικών τιμών των πολωνύμων.

Επίσης η αριθμητική τιμή του μηδενικού πολωνύμου είναι σταθερή και ίση με 0 για κάθε τιμή της μεταβλητής  $x$ , δηλ.  $0(x) = 0, \forall x \in \mathbb{C}$ .

Τέλος, από τον όρισμό της ισότητας δύο πολωνύμων καταλαβαίνουμε άμεσως ότι : δύο πολώνυμα ίσα έχουν ίσες αριθμητικές τιμές, δηλαδή, αν  $f(x) = \varphi(x)$ , τότε ισχύει η πρόταση:

$$\forall x \in \mathbb{C}, f(x) = \varphi(x) \quad (2)$$

Στήν περίπτωση που η πρόταση (2) είναι αληθής, λέμε ακόμη ότι τα πολώνυμα  $f(x)$  και  $\varphi(x)$  είναι «**εκ ταυτότητας ίσα**», γράφουμε συμβολικά:  $f(x) \equiv \varphi(x)$  και διαβάζουμε:  $f(x)$  *εκ ταυτότητας ίσο με το  $\varphi(x)$* .

Στήν περίπτωση που  $f(x) = 0(x)$ , ισχύει η πρόταση:

$$\forall x \in \mathbb{C}, f(x) = 0 \quad (3)$$

Όταν η πρόταση (3) είναι αληθής, λέμε ότι το  $f(x)$  «**μηδενίζεται εκ ταυτότητας**» ή αλλιώς το  $f(x)$  είναι «**εκ ταυτότητας ίσο με το μηδέν**», γράφουμε συμβολικά:  $f(x) \equiv 0$  και διαβάζουμε:  $f(x)$  *εκ ταυτότητας μηδέν*.

Γιά τα «**εκ ταυτότητας μηδέν**» και τα «**εκ ταυτότητας ίσα**» πολώνυμα ισχύει η επόμενη βασική πρόταση:

**Πρόταση.** Μέ  $f(x) \in \mathbb{C}[x], \varphi(x) \in \mathbb{C}[x]$  είναι αληθής καθεμία από τις προτάσεις:

$$\alpha). \quad f(x) = 0(x) \iff f(x) \equiv 0 \quad (4)$$

$$\beta). \quad f(x) = \varphi(x) \iff f(x) \equiv \varphi(x) \quad (5)$$

**Απόδειξη της α:** (i) Έστω  $f(x) = 0(x)$ , τότε:  $\forall x \in \mathbb{C}, f(x) = 0$ , επειδή όλοι οι συντελεστές του  $f(x)$  είναι μηδέν. Άρα  $f(x) \equiv 0$ .

(ii) Έστω  $f(x) \equiv 0$ , δηλαδή:  $\forall x \in \mathbb{C}, f(x) = 0$ , τότε  $f(x) = 0(x)$ , γιατί αλλιώς θα υπήρχε ένας τουλάχιστο συντελεστής του  $f(x)$ , έστω ο  $a_k$ , που θα ήταν διάφορος από το μηδέν. Τότε όμως με  $x = \xi \neq 0$  θα είχαμε:  $f(\xi) \neq 0$ . Αυτό όμως είναι άτοπο, επειδή  $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{C}$ .

**Απόδειξη της β:** (i) Έστω  $f(x) = \varphi(x)$ , τότε:  $\forall x \in \mathbb{C}, f(x) = \varphi(x)$ , δηλ.

\* Ο συμβολισμός:  $x = \xi$  δέ σημαίνει ισότητα, καθώςον το πολώνυμο  $x$  δεν είναι σταθερό πολώνυμο, άρα με καμιά σταθερά δεν μπορεί να ισούται, αλλά απλώς σημαίνει την αντικατάσταση του  $x$  με τη σταθερά  $\xi$  του  $A \subset \mathbb{C}$ .

$f(x) \equiv \varphi(x)$ . (ii) Έστω τώρα  $f(x) \equiv \varphi(x)$  δηλαδή:  $\forall x \in \mathbb{C}, f(x) = \varphi(x)$ , τότε:  $\forall x \in \mathbb{C}, f(x) - \varphi(x) = 0$ , δηλαδή:  $f(x) - \varphi(x) \equiv 0$  και σύμφωνα με την (α):  $f(x) - \varphi(x) = 0(x)$ , όποτε:  $f(x) = \varphi(x)$ .

**Γενική παρατήρηση.** Επειδή, όπως είδαμε στην παραπάνω πρόταση οι ισοδυναμίες (4) και (5) είναι ταυτολογίες (βλ. Κεφ. I, § 5), οι:  $f(x) = 0(x)$  και  $f(x) \equiv 0$  είναι ταυτολογικά ισοδύναμες (βλ. Κεφ. I, § 5), γι' αυτό στα επόμενα οι όροι: **μηδενικό πολώνυμο** και **πολώνυμο εκ ταυτότητας μηδέν** θα χρησιμοποιούνται με την ίδια σημασία, χωρίς διάκριση. Τό ίδιο θα ισχύει, λόγω της ισοδυναμίας (5), και για τους όρους: **πολώνυμα ίσα** και **πολώνυμα εκ ταυτότητας ίσα**.

**Σημείωση.** Για να δηλώσουμε ότι το  $f(x)$  δεν είναι το μηδενικό πολώνυμο στα επόμενα συχνά θα γράφουμε:  $f(x) \neq 0$ .

**γ) Έννοια της ρίζας ενός άκέραιου πολωνύμου.** Ένας αριθμός πραγματικός ή μιγαδικός, δηλ. ένα στοιχείο  $\rho$  του  $\mathbb{C}$  ονομάζεται **ρίζα** ενός άκέραιου πολωνύμου  $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ , τότε και μόνο τότε, αν η αριθμητική τιμή του πολωνύμου για  $x = \rho$  είναι μηδέν, δηλ. αν:  $f(\rho) = 0$ .

Ώστε:

$$\text{Ο } \rho \text{ είναι ρίζα του } f(x) \iff_{\text{ορσ}} f(\rho) = 0. \quad (6)$$

Έτσι, π.χ. του πολωνύμου:  $f(x) \equiv x^3 + 4x^2 + x - 6$  ρίζες είναι οι αριθμοί: 1, -2, -3, καθώςον ισχύει:  $f(1) = 0, f(-2) = 0, f(-3) = 0$ . Επίσης του πολωνύμου:  $\varphi(x) \equiv x^3 + 1$  ρίζες είναι οι αριθμοί:

$$-1, \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Από τον παραπάνω όρισμό της ρίζας ενός πολωνύμου καταλαβαίνουμε άμεσως ότι το μηδενικό πολώνυμο δέχεται σάν ρίζες όλους τους μιγαδικούς αριθμούς. Απεναντίας ένα σταθερό μη μηδενικό πολώνυμο  $f(x) \equiv a (\neq 0)$ , δηλ. ένα άκέραιο πολώνυμο μηδενικού βαθμού δέ δέχεται κανένα μιγαδικό αριθμό σάν ρίζα του.

Τό σύνολο των ριζών ενός πολωνύμου  $f(x) \in \mathbb{C}[x]$  ονομάζεται **σύνολο αλήθειας** του πολωνύμου  $f(x)$ . Έτσι, αν με  $P$  συμβολίσουμε τό σύνολο αλήθειας του  $f(x)$ , θα έχουμε:  $P = \{z \in \mathbb{C}: f(z) = 0\}$  και συνεπώς:  $\rho \in P \iff f(\rho) = 0$ .

Είναι φανερό τώρα ότι: αν τό  $f(x)$  είναι τό μηδενικό πολώνυμο, τότε  $P = \mathbb{C}$ , ενώ αν βαθμ.  $f(x) = 0$ , τότε  $P = \emptyset$ .

Μία εξίσωση της μορφής:  $f(x) = 0$ , όπου  $f(x)$  άκέραιο πολώνυμο του  $\mathbb{C}[x]$ , ονομάζεται **άλγεβρική εξίσωση**.

Ο βαθμός του πολωνύμου  $f(x)$  ονομάζεται και **βαθμός** της άλγεβρικής εξίσώσεως. **Ρίζα** ή **λύση** μιās άλγεβρικής εξίσώσεως λέγεται κάθε στοιχείο του συνόλου αλήθειας του  $f(x)$ , δηλαδή κάθε ρίζα του πολωνύμου  $f(x)$ .

Μία άλγεβρική εξίσωση:  $f(x) = 0$  λέγεται **αόριστη**, τότε και μόνο τότε, αν τό  $f(x)$  είναι τό μηδενικό πολώνυμο και **αδύνατη**, τότε και μόνο τότε, αν



τό  $f(x)$  είναι ένα σταθερό μη μηδενικό πολυώνυμο, δηλαδή αν  $\text{βαθμ.} f(x) = 0$ .  
 'Η ρίζα αλγεβρικής εξίσωσης με ρητούς συντελεστές ονομάζεται **άλγεβρικός αριθμός**. Ωστε :

"Ενας αριθμός  $\zeta \in \mathbb{C}$  ονομάζεται **άλγεβρικός**, τότε και μόνο τότε, αν υπάρχει άκერαιο πολυώνυμο  $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ ,  $f(x) \neq 0$  με  $f(\zeta) = 0$ .

"Ετσι, π.χ. οι αριθμοί: 3, i,  $\sqrt{2}$  είναι αλγεβρικοί, γιατί ικανοποιούν αντίστοιχα τις αλγεβρικές εξισώσεις με ρητούς συντελεστές:  $x - 3 = 0$ ,  $x^2 + 1 = 0$ ,  $x^2 - 2 = 0$ .

"Υπάρχουν βέβαια και αριθμοί που δεν είναι αλγεβρικοί. "Ενας μη αλγεβρικός αριθμός ονομάζεται **υπερβατικός**. "Ενας τέτοιος, λ.χ., είναι ο γνωστός μας από τη Γεωμετρία αριθμός  $\pi = 3,14159 \dots$  (λόγος μιάς περιφέρειας προς τη διάμετρό της). Ο  $\pi$  είναι πραγματικός, αλλά δεν είναι αλγεβρικός αριθμός. "Υπερβατικός επίσης είναι ο αριθμός  $e = 2,7182 \dots$  για τον οποίο κάνουμε λόγο στο επόμενο κεφάλαιο.

**Σημείωση.** Δεν πρέπει να συγχέουμε τις έννοιες: πολυώνυμο εκ ταυτότητας μηδέν [ $f(x) \equiv 0$ ] και αλγεβρική εξίσωση [ $f(x) = 0$ ]: και τούτο γιατί:  $f(x) \equiv 0 \iff \forall x \in \mathbb{C}, f(x) = 0$ , ενώ στην αλγεβρική εξίσωση:  $f(x) = 0$  ζητάμε να βρούμε τα στοιχεία εκείνα του  $\mathbb{C}$  για τα οποία μηδενίζεται το πολυώνυμο  $f(x)$ .

Σχετικά με τις ρίζες των πολυωνύμων υπάρχει το παρακάτω βασικό θεώρημα που αποδεικνύεται στην "Ανώτερη "Αλγεβρα και τη Θεωρία των Μιγαδικών Συναρτήσεων και που είναι γνωστό στη διεθνή βιβλιογραφία ως **θεμελιώδες θεώρημα της "Αλγεβρας ή θεώρημα του D' Alembert \***, έπειδή αυτός πρώτος προσπάθησε, το 1746, να το αποδείξει. "Η πρώτη όμως αυστηρή απόδειξη οφείλεται στον Gauss\*\* (1799).

**§ 113. Θεώρημα του D' Alembert.** (Θεμελιώδες θεώρημα της "Αλγεβρας).— Κάθε άκერαιο πολυώνυμο, με πραγματικούς ή πιο γενικά με μιγαδικούς συντελεστές, βαθμού  $n \geq 1$ , έχει μία τουλάχιστο μιγαδική ρίζα.

Δηλαδή:  $\forall f(x) \in \mathbb{C}[x] \text{ με βαθμ. } f(x) \geq 1 \exists \rho \in \mathbb{C} : f(\rho) = 0$

Μία ισοδύναμη διατύπωση του θεμελιώδους θεωρήματος της "Αλγεβρας είναι και η εξής: Τό σύνολο αλήθειας ενός άκერიου πολυωνύμου  $f(x) \in \mathbb{C}[x]$  βαθμού  $n \geq 1$ , είναι  $\neq \emptyset$ .

Παρατηρούμε ότι το παραπάνω θεώρημα μάς εξασφαλίζει μὲν τὴν ὑπαρξὴ ρίζας (πραγματικής ή μιγαδικής) για κάθε πολυώνυμο βαθμού  $n \geq 1$ , δὲ μᾶς λείπει ὅμως τίποτε σχετικό οὔτε γιὰ τὸν τρόπο πού θά τὴ βρούμε, οὔτε γιὰ τὸ πλῆθος τῶν ριζῶν τοῦ πολυωνύμου.

Μὲ ἄλλα λόγια τὸ πιὸ πάνω θεώρημα μᾶς εξασφαλίζει τὴν ὑπαρξὴ μιάς τουλάχιστο λύσεως τῆς αλγεβρικής εξίσωσης:

\* Jean D' Alembert (1717 - 1783). Γάλλος μαθηματικός και φιλόσοφος.  
 \*\* Karl Fr. Gauss (1777 - 1855). Πολύ μεγάλος Γερμανός μαθηματικός.

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0 \quad (1)$$

για οποιοδήποτε φυσικό αριθμό  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

**Σημείωση.** Αποδεικνύεται ότι για  $n = 2, 3, 4$  μπορούμε να υπολογίσουμε τις λύσεις της εξίσωσης (1) με τη βοήθεια κατάλληλου τύπου. Ο Abel απόδειξε ότι δεν είναι δυνατό να βρεθούν γενικοί τύποι που να δίνουν τις λύσεις μιάς εξίσωσης της μορφής (1) για  $n \geq 5$ .

**§ 114. Εφαρμογές στα έκ ταυτότητος ἴσα πολυώνυμα – Μέθοδος τῶν προσδιοριστέων συντελεστῶν.**— Όπως είπαμε και στην § 110 ἡ συνθήκη  $f(x) = \varphi(x)$  τῆς ἰσότητος δύο ἀκέραιων πολυωνύμων ἐκφράζεται με τὴν ἰσοδύναμη συνθήκη τῆς ἰσότητος τῶν συντελεστῶν τῶν ἴσων δυνάμεων τοῦ  $x$  αὐτῶν τῶν δύο πολυωνύμων. Ἡ συνθήκη αὐτὴ μᾶς παρέχει τὴ δυνατότητα νὰ μπορούμε νὰ προσδιορίζουμε τοὺς συντελεστές ἑνὸς πολυωνύμου, ἄρα καὶ τὸ πολυώνυμο ὅταν γνωρίζουμε τὸ βαθμὸ του, ὥστε τοῦτο νὰ ἱκανοποιεῖ ὁρισμένες συνθήκες. Αὐτὴ ἡ μέθοδος εἶναι γνωστὴ ὡς *μέθοδος τῶν προσδιοριστέων συντελεστῶν*. Γιὰ τὴν ἐφαρμογὴ αὐτῆς τῆς μεθόδου τὰ πολυώνυμα τοῦ προβλήματος ἐκφράζονται με τὴ μορφή (9) ἢ (10) τῆς § 110, δηλαδή με τὴ συνήθη, ὅπως λέμε, *μορφή* τους.

"Ας δοῦμε τώρα πῶς αὐτὴ ἡ μέθοδος ἐφαρμόζεται σὲ συγκεκριμένα παραδείγματα:

**Εφαρμογή 1η:** Δίνονται τὰ πολυώνυμα:

$$f(x) \equiv 2x^3 + \alpha x^2 - 13x + \beta, \quad \varphi(x) \equiv 2x^3 + (\gamma - 2)x^2 - (\gamma + 12)x - 6\gamma.$$

Νὰ προσδιορίσετε τοὺς συντελεστές  $\alpha, \beta, \gamma$ , ὥστε νὰ ἔχουμε:  $f(x) \equiv \varphi(x)$ .

**Λύση.** Όπως ξέρουμε (§ 112):  $f(x) \equiv \varphi(x) \iff f(x) = \varphi(x)$  καὶ ὅπως είπαμε παραπάνω ἡ συνθήκη τῆς ἰσότητος δύο πολυωνύμων εἶναι ἰσοδύναμη με τὴ συνθήκη τῆς ἰσότητος τῶν συντελεστῶν τῶν ἴσων δυνάμεων τοῦ  $x$  τῶν πολυωνύμων  $f(x)$  καὶ  $\varphi(x)$ . "Ετσι παίρνουμε τὸ παρακάτω (γραμμικὸ) σύστημα:

$$\left. \begin{array}{l} \gamma - 2 = \alpha \\ -(\gamma + 12) = -13 \\ -6\gamma = \beta \end{array} \right\} \iff \left. \begin{array}{l} \gamma - 2 = \alpha \\ \gamma + 12 = 13 \\ 6\gamma = -\beta \end{array} \right\}$$

"Από τὴν ἐπίλυση τοῦ τελευταίου συστήματος βρίσκουμε:

$$\alpha = -1, \quad \beta = -6, \quad \gamma = 1.$$

**Εφαρμογή 2η:** Νὰ βρεῖτε ἀκέραιο πολυώνυμο τρίτου βαθμοῦ  $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ , τέτοιο, ὥστε: νὰ δέχεται ὡς ρίζα τὸν ἀριθμὸ μηδέν καὶ νὰ ἱκανοποιεῖ τὴν ταυτότητα:  $f(x) - f(x-1) \equiv x^2$ .

Στὴ συνέχεια νὰ βρεῖτε τὸ νιοστὸ μερικὸ ἄθροισμα  $\sum_{v=1}^n a_v$  με  $a_v = v^2$ .

**Λύση.** Τὸ πολυώνυμο πού ζητᾶμε θά εἶναι τῆς μορφῆς:

$$f(x) \equiv \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

ὅπου  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  συντελεστές πού πρέπει νὰ προσδιοριστοῦν. "Επειδὴ  $f(0) = 0$  θά πρέπει  $\delta = 0$  καὶ τὸ πολυώνυμο γίνεται:  $f(x) \equiv \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x$ .

"Από τὴν ὑπόθεση ἔχουμε:

$$\begin{aligned} f(x) - f(x-1) &\equiv \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x - \alpha(x-1)^3 - \beta(x-1)^2 - \gamma(x-1) \equiv \\ &\equiv 3\alpha x^2 - (3\alpha - 2\beta)x + (\alpha - \beta + \gamma) \equiv x^2. \end{aligned}$$



Από την τελευταία σχέση, σύμφωνα με τον ορισμό της ισότητας δύο πολυωνύμων, λαμβάνουμε το (γραμμικό) σύστημα:

$$\{3\alpha = 1 \wedge 3\alpha - 2\beta = 0 \wedge \alpha - \beta + \gamma = 0\}$$

τό οποίο έχει τη μοναδική λύση:  $\alpha = \frac{1}{3}, \beta = \frac{1}{2}, \gamma = \frac{1}{6}$ .

Άρα: 
$$f(x) \equiv \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x. \quad (1)$$

Τό νιοστό μερικό άθροισμα  $\sigma_n$  της σειράς  $\sum_{v=1}^n \alpha_v$  με  $\alpha_v = v^2$  είναι:

$$\sigma_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \quad (2)$$

Από την ταυτότητα:  $f(x) - f(x-1) \equiv x^2$  για  $x = 1, 2, \dots, n$  βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} f(1) - f(0) &= 1^2 \\ f(2) - f(1) &= 2^2 \\ f(3) - f(2) &= 3^2 \\ &\dots \\ f(n) - f(n-1) &= n^2. \end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη αυτές τις ισότητες και έχοντας υπόψη τις (1), (2) και ακόμη ότι  $f(0) = 0$  τελικά βρίσκουμε:

$$\sigma_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = f(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

**Εφαρμογή 3η:** Νά προσδιορίσετε τους συντελεστές  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  ενός άκέραιου πολυωνύμου:  $f(x) \equiv \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ , ώστε να ισχύει:

$$f(1) + f(2) + \dots + f(v) \equiv v^4$$

Λύση. Από τη μορφή του  $f(x)$  για  $x = 1, 2, \dots, v$  βρίσκουμε:

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= \alpha \cdot 1^3 + \beta \cdot 1^2 + \gamma \cdot 1 + \delta \\ f(2) &= \alpha \cdot 2^3 + \beta \cdot 2^2 + \gamma \cdot 2 + \delta \\ &\dots \\ f(v) &= \alpha \cdot v^3 + \beta \cdot v^2 + \gamma \cdot v + \delta \end{aligned} \right\}$$

Προσθέτοντας τώρα κατά μέλη αυτές τις ισότητες και λαμβάνοντας υπόψη τους τύπους (1), (2) και (3) της § 78 έχουμε:

$$\alpha \frac{v^2(v+1)^2}{4} + \beta \frac{v(v+1)(2v+1)}{6} + \gamma \frac{v(v+1)}{2} + v \cdot \delta \equiv v^4$$

ή 
$$\frac{\alpha}{4}v^4 + \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3}\right)v^3 + \left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)v^2 + \left(\frac{\beta}{6} + \frac{\gamma}{2} + \delta\right)v \equiv v^4.$$

Για να είναι δύο πολυώνυμα ως προς  $v$  «έκ ταυτότητας ίσα» θα πρέπει να ισχύει:

$$\left\{ \frac{\alpha}{4} = 1 \wedge \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3} = 0 \wedge \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 0 \wedge \frac{\beta}{6} + \frac{\gamma}{2} + \delta = 0 \right\}.$$

Από την επίλυση του παραπάνω συστήματος βρίσκουμε:

$$\alpha = 4, \beta = -6, \gamma = 4, \delta = -1.$$

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Ομάδα Α'. 234.** Νά προσδιορίσετε τους συντελεστές  $\alpha, \beta, \gamma$  ώστε τό:

$$f(x) \equiv (2\alpha + 1)x^2 + (3\beta - 1)x + (2\gamma + \beta - \alpha)$$

νά είναι τό μηδενικό πολυώνυμο.

**235.** Νά εξετάσετε αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta$ , ώστε τό:

$$f(x) \equiv (\alpha - 1)x^2 + (2\beta + 2)x + (\alpha + \beta - 3)$$

νά είναι τό μηδενικό πολυώνυμο.

**236.** Αν είναι  $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$  και  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ , όπου  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , νά αποδείξετε ότι τό:  $f(x) \equiv (\alpha - \beta)x^2 + (\beta - \gamma)x + (\gamma - \alpha)$  είναι τό μηδενικό πολυώνυμο.

**237.** Νά προσδιορίσετε τούς πραγματικούς αριθμούς  $\alpha, \beta, \gamma$  αν ξέρουμε ότι αυτοί ικανοποιούν την ισότητα:  $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$  και ότι τό πολυώνυμο:

$$f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

έχει αριθμητική τιμή 7 για  $x = 1$ .

**238.** Νά προσδιορίσετε τούς πραγματικούς αριθμούς  $\alpha, \beta, \gamma$ , ώστε τό πολυώνυμο:  $f(x) \equiv x^4 - 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 4$  νά είναι τό τετράγωνο του τριωνύμου:  $x^2 - x + \gamma$ .

**239.** Νά βρείτε την άναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε τό πολυώνυμο  $f(x) \equiv x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$  νά είναι τετράγωνο άλλου πολυωνύμου.

**240.** Λέμε πώς ένα πολυώνυμο  $f(x) \equiv \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$  είναι τέλειος κύβος, τότε και μόνο τότε, αν μπορεί νά πάρει τη μορφή:  $\alpha(x+k)^3$ ,  $k \in \mathbb{R}$ . Νά αποδείξετε τώρα ότι: τό  $f(x)$  είναι τέλειος κύβος, τότε και μόνο τότε, αν:  $\beta^3 = 27\alpha^2\delta$   $\wedge$   $\beta^2 = 3\alpha\gamma$ . Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τό προηγούμενο αποτέλεσμα, νά αποδείξετε ότι τό πολυώνυμο:  $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$  είναι τέλειος κύβος.

**241.** Αν είναι  $\alpha + \beta + \gamma = 30$ , νά προσδιορίσετε τούς πραγματικούς αριθμούς  $\alpha, \beta, \gamma$ , ώστε ή συνάρτηση  $f$  με τύπο:

$$f(x) = \frac{(\alpha - 2)x^2 + (\beta - 4)x + \gamma - 6}{x^2 + 2x + 3}$$

νά είναι σταθερή για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Ομάδα Β'. 242.** Δίνονται τά πολυώνυμα:

$$f(x) \equiv \alpha x^3 + 4x^2 + \gamma x + \delta, \quad \varphi(x) \equiv 2x^3 + \beta x^2 + 3x + 1.$$

Ποιές τιμές πρέπει νά πάρουν οι πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  ώστε τό πολυώνυμο:

$$F(x) \equiv f(x) + \varphi(x)$$

νά είναι:

i) βαθμού 3, ii) βαθμού τό πολύ 3, iii) μηδενικού βαθμού, iv) μηδενικό πολυώνυμο.

**243.** Νά βρείτε όλα τά πολυώνυμα δεύτερου βαθμού (τριώνυμα) που ικανοποιούν τη συνθήκη:

$$\alpha) \forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(-x), \quad \beta) \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x).$$

**244.** Νά προσδιορίσετε άκέραιο πολυώνυμο τέταρτου βαθμού  $f(x) \in \mathbb{R}[x]$  τέτοιο, ώστε: νά δέχεται ως ρίζα τόν αριθμό μηδέν και νά ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - f(x-1) = x^3.$$

Στή συνέχεια νά υπολογίσετε με τη βοήθεια αυτού του πολυωνύμου τό άθροισμα:

$$\Sigma_3 \equiv 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3, (n \in \mathbb{N}).$$

**245.** Νά προσδιορίσετε άκέραιο πολυώνυμο τρίτου βαθμού  $f(x) \in \mathbb{R}[x]$  τέτοιο, ώστε:

$$(i) f(0) = 0 \text{ και } (ii) f(x+1) - f(x) \equiv x(x+1).$$

Στή συνέχεια νά βρείτε, με τη βοήθεια αυτού του πολυωνύμου, τό νιοστό μερικό άθροισμα της σειράς  $\sum_{v=1}^n v(v+1)$ .

**246.** Νά προσδιορίσετε τούς πραγματικούς αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$  έτσι, ώστε ή εξίσωση:

$$x^3 - 24x - 72 = 0$$

νά μπορεί νά πάρει τη μορφή:  $\left(\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right)^3 = \frac{\alpha}{\beta}$ .



Κατόπιν νά βρείτε τό σύνολο ἀλήθειας τοῦ πολυωνύμου  $f(x) \equiv x^3 - 24x - 72$ .

247. Ἐστω ὅτι εἶναι  $f(x), \varphi(x) \in \mathbb{R}[x]$  μέ σύνολα ἀλήθειας  $S, T$  ἀντιστοίχως. Ἄν  $A$ , καί  $\Gamma$  εἶναι ἀντιστοίχως τά σύνολα ἀλήθειας τῶν πολυωνύμων:  $F(x) \equiv f(x) + \varphi(x)$  καί  $G(x) \equiv f(x) \cdot \varphi(x)$ , νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$(i) \Gamma = S \cup T, \quad (ii) S \cap T = \emptyset \Rightarrow A \cap \Gamma = \emptyset.$$

Ἐπιπλέον: ἂν  $\Pi, P$  καί  $\Sigma$  εἶναι ἀντιστοίχως τά σύνολα τῶν πραγματικῶν ριζῶν τῶν πολυωνύμων:  $f(x), \varphi(x)$  καί  $\sigma(x) \equiv f^2(x) + \varphi^2(x)$ , νά ἀποδείξετε ὅτι:  $\Sigma = \Pi \cap P$ .

Τέλος, νά ἐξετάσετε ἂν μπορεῖ νά ἰσχύει:  $\Sigma = \Pi \cap P$  καί στήν περίπτωση πού τά  $\Pi, P$  καί  $\Sigma$  παριστάνουν τά σύνολα τῶν γνήσιων μιγαδικῶν ριζῶν τῶν πολυωνύμων  $f(x), \varphi(x)$  καί  $\sigma(x) \equiv f^2(x) + \varphi^2(x)$  ἀντιστοίχως.

248. Ἐστω τό πολυώνυμο:

$$f(x) \equiv \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

i) Νά προσδιορίσετε τοὺς συντελεστές  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  ὥστε νά ἰσχύει:

$$p: \quad \forall n \in \mathbb{N}, f(1) + f(2) + \dots + f(n) = n^2(n^2 + 1).$$

ii) Ἀφοῦ προσδιορίσετε τοὺς συντελεστές τοῦ  $f(x)$  νά ἀποδείξετε στή συνέχεια μέ τή μέθοδο τῆς τέλειαις ἐπαγωγῆς τήν πρόταση p.

#### ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

**§ 115. Τέλεια διαίρεση.**— Ἐστω ὅτι  $f(x)$  καί  $\varphi(x)$  εἶναι δύο ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ  $\mathbb{C}[x]$ . Δίνουμε τοὺς ἐπόμενους ὁρισμούς:

**Ὁρισμός 1.** Θά λέμε ὅτι τό  $\varphi(x)$  διαιρεῖ τό πολυώνυμο  $f(x)$  καί συμβολίζουμε τοῦτο μέ  $\varphi(x) | f(x)$ , τότε καί μόνο τότε, ἂν  $\varphi(x) \neq 0$  καί ὑπάρχει ἀκέραιο πολυώνυμο  $\pi(x) \in \mathbb{C}[x]$  τέτοιο, ὥστε νά ἰσχύει:  $f(x) \equiv \varphi(x)\pi(x)$ .

Γιά συντομία λοιπόν γράφουμε:

$$\varphi(x) | f(x) \iff \varphi(x) \neq 0 \wedge \exists \pi(x) \in \mathbb{C}[x] : f(x) \equiv \varphi(x)\pi(x) \quad (1)$$

Σ' αὐτή τήν περίπτωση λέμε ἐπίσης ὅτι: τό  $f(x)$  διαιρεῖται ἢ εἶναι διαιρετό ἀπό τό  $\varphi(x)$ , ἢ τό  $f(x)$  εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ  $\varphi(x)$  ἢ ἀκόμη τό  $\varphi(x)$  εἶναι διαιρέτης τοῦ  $f(x)$ .

Ἡ πράξη μέ τήν ὁποία βρίσκεται τό  $\pi(x)$  λέγεται, ὅπως ξέρομε, τέλεια διαίρεση τοῦ  $f(x)$  διά τοῦ  $\varphi(x) \neq 0$  καί συμβολίζεται μέ  $f(x) : \varphi(x)$ .

Σέ μιά τέλεια διαίρεση τά πολυώνυμα  $f(x), \varphi(x)$  καί  $\pi(x)$  ὀνομάζονται ἀντιστοίχως διαιρετέος, διαιρέτης καί πηλίκο τῆς  $f(x) : \varphi(x)$ .

Γιά νά δηλώσουμε ὅτι τό πολυώνυμο  $\varphi(x) \neq 0$  δέ διαιρεῖ τό  $f(x)$  γράφουμε:  $\varphi(x) \nmid f(x)$  καί διαβάζουμε: τό  $\varphi(x)$  δέ διαιρεῖ τό (δέν εἶναι διαιρέτης τοῦ)  $f(x)$ .

Ἀπό τήν (1) συμπεραίνουμε ὅτι: ἂν  $f(x) \equiv 0$  καί  $\varphi(x) \neq 0$ , τότε  $\varphi(x) | f(x)$  μέ  $\pi(x) \equiv 0$ . Δηλαδή: τό μηδενικό πολυώνυμο διαιρεῖται ἀπό κάθε μή μηδενικό πολυώνυμο  $\varphi(x)$  καί δίνει πηλίκο μηδέν.

**Προσέξτε!** τό μηδενικό πολυώνυμο δέ διαιρεῖ κανένα πολυώνυμο.

Ἀμεσες συνέπειες τοῦ ὁρισμοῦ 1 εἶναι καθεμία ἀπό τίς ἐπόμενες ἀληθεῖς προτάσεις:

α) Κάθε πολυώνυμο  $f(x)$  διαιρεῖται ἀπό κάθε σταθερό ἀλλά μή μηδενικό πολυώνυμο  $\varphi(x) = c$  ( $c \neq 0$ )\*.

Πράγματι, ἂν  $f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ , ἔχουμε τήν ταυ-τότητα:

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 \equiv c \cdot \left\{ \frac{\alpha_n}{c} x^n + \frac{\alpha_{n-1}}{c} x^{n-1} + \dots + \frac{\alpha_1}{c} x + \frac{\alpha_0}{c} \right\},$$

ὅπου τό ἀκέραιο πολυώνυμο μέσα στά ἄγκιστρα εἶναι τό πηλίκο.

β) Κάθε πολυώνυμο  $f(x) \neq 0$  εἶναι διαιρέτης τοῦ ἑαυτοῦ του.

γ) Ὁ βαθμός τοῦ πηλίκου ἰσοῦται μέ τή διαφορά τῶν βαθμῶν διαιρετέου καί διαιρέτη. Πράγματι, ἂν  $\varphi(x) | f(x)$  καί εἶναι  $f(x) \neq 0$ , τότε ἀπό τήν (1) ἔχουμε:  $f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi(x)$  καί  $\pi(x) \neq 0$ . Τότε ὅμως, σύμφωνα μέ τή (12) τῆς § 111, θά ἔχουμε:  $\text{βαθμ.} f(x) = \text{βαθμ.} \varphi(x) + \text{βαθμ.} \pi(x)$  καί συνεπῶς:

$$\text{βαθμ.} \pi(x) = \text{βαθμ.} f(x) - \text{βαθμ.} \varphi(x) \quad (2)$$

**Σχόλιο.** Ἀπό τή (2) καί ἐπειδή  $\pi(x) \neq 0$ , ὁπότε  $\text{βαθμ.} \pi(x) \geq 0$ , λαμβάνουμε:  $\text{βαθμ.} f(x) \geq \text{βαθμ.} \varphi(x)$ . Ἄν πάλι εἶναι  $\pi(x) \equiv 0$ , τότε καί  $f(x) \equiv 0$ .

**Προσέξτε!** ἡ μοναδική περίπτωση νά ἔχει ἕνα πολυώνυμο  $f(x)$ , βαθμοῦ τό πολύ  $n$ , διαίρετη μέ βαθμό μεγαλύτερο τοῦ  $n$ , εἶναι ὅταν  $f(x) \equiv 0$ .

δ) Ἄν  $\varphi(x) | f(x)$ , τότε  $f(x) \equiv 0(x)$  ἢ  $\text{βαθμ.} f(x) \geq \text{βαθμ.} \varphi(x)$ .

Αὐτό προκύπτει ἀμέσως ἂν λάβουμε ὑπόψη τό παραπάνω σχόλιο.

ε) Τό πηλίκο  $\pi(x)$  τῆς τέλειαις διαιρέσεως  $f(x) : \varphi(x)$  εἶναι μοναδικό.

Πράγματι, ἂν ὑπῆρχε καί ἄλλο πηλίκο  $\pi_1(x) \in \mathbb{C}[x]$  τῆς τέλειαις διαιρέσεως  $f(x) : \varphi(x)$  θά εἶχαμε:  $f(x) \equiv \varphi(x) \pi(x) \wedge f(x) \equiv \varphi(x) \pi_1(x)$ . Ἀπ' αὐτή τή σύζευξη βρίσκουμε:  $\varphi(x) \pi_1(x) \equiv \varphi(x) \pi(x)$  καί ἐπειδή  $\varphi(x) \neq 0$  θά εἶναι  $\pi_1(x) \equiv \pi(x)$  (βλ. Πόρισμα 2, § 111).

στ) Ἡ σχέση τῆς διαιρετότητας δύο πολυωνύμων εἶναι μεταβατική.

Δηλαδή: ἂν  $\varphi(x) | f(x)$  καί  $f(x) | g(x)$ , τότε  $\varphi(x) | g(x)$ .

Πράγματι, ἀπό τή σύζευξη:  $f(x) \equiv \varphi(x) \pi_1(x) \wedge g(x) \equiv f(x) \pi_2(x)$  ἔπεται:  $g(x) \equiv \varphi(x) [\pi_1(x) \cdot \pi_2(x)]$ .

ζ) Γιά  $\sigma(x) \neq 0$  ἰσχύει:  $\varphi(x) | f(x) \iff \varphi(x) \sigma(x) | f(x) \sigma(x)$ .

Ἡ ἀπόδειξη εἶναι ἀπλή καί γι' αὐτό τήν παραλείπουμε.

Προσέξτε ιδιαίτερα τήν περίπτωση:  $\sigma(x) \equiv c \neq 0$ .

η) Ἄν  $\varphi(x) | f(x)$ , τότε  $\varphi(x) | f(x) \cdot \sigma(x) \forall \sigma(x) \in \mathbb{C}[x]$ .

Πράγματι, ἀπό τήν:  $f(x) \equiv \varphi(x) \pi(x)$ , ἔπεται:  $f(x) \sigma(x) \equiv \varphi(x) [\pi(x) \sigma(x)]$ .

**Παρατήρηση.** Γιά  $\sigma(x) \equiv c$  ἰσχύει:  $\varphi(x) | f(x) \Rightarrow c \varphi(x) | c f(x)$ ,  $c \in \mathbb{C}$ . Ἐξάλλου γιά  $\sigma(x) \equiv c \neq 0$  ἰσχύει:  $\varphi(x) | f(x) \Rightarrow c \cdot \varphi(x) | f(x)$ .

θ) Ἄν  $\varphi(x) | f_1(x)$  καί  $\varphi(x) | f_2(x)$ , τότε:  $\varphi(x) | f_1(x) \pm f_2(x)$ .

\* Τό γράμμα  $c$  εἶναι τό πρώτο γράμμα τῆς λέξεως constant = σταθερά καί δέν πρέπει νά συγχέεται μέ τό σύμβολο  $\mathbb{C}$  πού παριστάνει τό σύνολο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν (Complex numbers).



Πράγματι, από τη σύζευξη:  $f_1(x) \equiv \varphi(x)\pi_1(x) \wedge f_2(x) \equiv \varphi(x)\pi_2(x)$  έπεται:  $f_1(x) \pm f_2(x) \equiv \varphi(x) \cdot [\pi_1(x) \pm \pi_2(x)]$  και έπειδή  $\varphi(x) \not\equiv 0$  είναι:

$$\varphi(x)/f_1(x) \pm f_2(x).$$

Μέ τον ίδιο ακριβώς τρόπο αποδεικνύεται και η πρόταση:

i) "Αν  $\varphi_1(x)/f_1(x)$  και  $\varphi_2(x)/f_2(x)$ , τότε:  $\varphi_1(x)\varphi_2(x)/f_1(x)f_2(x)$ .

"Αμεσες τώρα συνέπειες των παραπάνω προτάσεων είναι οι εξής:

ia) "Αν τό  $\varphi(x)$  διαιρεί καθένα από τά πολυώνυμα:  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ , τότε  $\varphi(x)/c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \dots + c_nf_n(x)$ , όπου  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ .

ib) "Αν  $\varphi(x)/f_1(x) \pm f_2(x)$  και  $\varphi(x)/f_1(x)$ , τότε  $\varphi(x)/f_2(x)$ .

iy) "Αν  $\varphi(x)/f_1(x)$  και  $\varphi(x)/f_2(x)$ , τότε  $\varphi(x)/f_1(x)\sigma_1(x) \pm f_2(x)\sigma_2(x)$ ,  $\forall \sigma_1(x), \sigma_2(x) \in \mathbb{C}[x]$ .

id)  $\varphi(x)/f_1(x) \vee \varphi(x)/f_2(x) \vee \dots \vee \varphi(x)/f_n(x) \Rightarrow \varphi(x)/f_1(x)f_2(x) \dots f_n(x)$ .

ie) "Αν  $\varphi(x)/f(x)$ , τότε  $\varphi(x)/[f(x)]^n \forall n \in \mathbb{N}$ .

Μία αξιόλογη πρόταση πάνω στη διαιρετότητα των πολυωνύμων είναι η εξής:

ιστ) "Αν  $\varphi(x)/f(x)$  και  $f(x)/\varphi(x)$ , τότε  $f(x) \equiv c \cdot \varphi(x)$ , όπου  $c$  κατάλληλη σταθερά διάφορη του μηδενός.

"Απόδειξη. Πράγματι, από τη σύζευξη:  $f(x) \equiv \varphi(x)\pi_1(x) \wedge \varphi(x) \equiv f(x)\pi_2(x)$  λαμβάνουμε:  $f(x) \equiv f(x) \cdot \pi_1(x)\pi_2(x)$  και έπειδή  $f(x) \not\equiv 0$  είναι:  $\pi_1(x)\pi_2(x) \equiv 1$ . Τότε όμως:  $\text{βαθμ.}\pi_1(x) + \text{βαθμ.}\pi_2(x) = \text{βαθμ.}1 = 0$ . "Αλλά  $\text{βαθμ.}\pi_1(x) \geq 0$ ,  $\text{βαθμ.}\pi_2(x) \geq 0$ . "Αρα  $\text{βαθμ.}\pi_1(x) = \text{βαθμ.}\pi_2(x) = 0$  και συνεπώς:  $\pi_1(x) = c_1$  και  $\pi_2(x) = c_2$ , όπου  $c_1, c_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$ . Τότε όμως έχουμε:

$$f(x) \equiv c_1 \cdot \varphi(x) \quad \text{και} \quad \varphi(x) \equiv c_2 \cdot f(x) \iff f(x) \equiv \frac{1}{c_2} \varphi(x).$$

Δηλαδή:  $f(x) \equiv c \cdot \varphi(x)$ .

"Από τις παραπάνω προτάσεις συμπεραίνουμε τώρα ότι: διαιρέτες ενός οποιουδήποτε άκέραιου πολυωνύμου  $f(x)$  είναι τά πολυώνυμα μηδενικού βαθμού, δηλ. τά  $\neq 0$  στοιχεία του  $\mathbb{C}$ , επίσης τό ίδιο τό  $f(x)$ , αν  $f(x) \not\equiv 0$  καθώς και όλα τά πολυώνυμα της μορφής:  $c f(x)$ , ( $c \neq 0$ ). Οι διαιρέτες αυτοί ονομάζονται **προφανείς διαιρέτες** του  $f(x)$ . Κάθε άλλος διαιρέτης του  $f(x)$  ονομάζεται **γνήσιος διαιρέτης** του πολυωνύμου  $f(x)$ .

Τελειώνοντας αυτή την παράγραφο δίνουμε και τούς επόμενους όρισμούς:

**Όρισμός 2.** "Ενα πολυώνυμο  $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ , βαθμού  $n > 0$ , ονομάζεται **ανάγωγο**, τότε και μόνο τότε, αν έχει μόνο προφανείς διαιρέτες.

Γιά την "Αλγεβρα τά ανάγωγα πολυώνυμα είναι ότι οι πρώτοι αριθμοί στην "Αριθμητική. Στο σύνολο  $\mathbb{C}[x]$  τά μόνα ανάγωγα πολυώνυμα είναι τά πολυώνυμα πρώτου βαθμού:  $ax + \beta$ ,  $a \neq 0$ , ενώ στο σύνολο  $\mathbb{R}[x]$  ανάγωγα πολυώνυμα είναι τά:  $ax + \beta$ , μέ  $a \neq 0$  καθώς και τά πολυώνυμα δεύτερου βαθμού (τριώνυμα) μέ μιγαδικές ρίζες.

**Όρισμός 3.** "Ενα πολυώνυμο  $\sigma(x) \in \mathbb{C}[x]$  ονομάζεται **κοινός διαιρέτης** των πολυωνύμων  $f(x), g(x)$ , τότε και μόνο τότε, αν διαιρεί και τά δύο πολυώνυμα  $f(x), g(x)$ .

**Όρισμός 4.** "Ενα πολυώνυμο  $\delta(x) \in \mathbb{C}[x]$  ονομάζεται **μέγιστος κοινός διαιρέτης** (συντομ. ΜΚΔ) δύο μή μηδενικών πολυωνύμων  $f(x), g(x) \in \mathbb{C}[x]$ , τότε και μόνο τότε, αν:

- (i) είναι κοινός διαιρέτης των  $f(x), g(x)$ .
- (ii) τό  $\delta(x)$  διαιρείται από κάθε άλλο κοινό διαιρέτη των  $f(x), g(x)$ .
- (iii) ο πρώτος συντελεστής του είναι τό 1.

Εύκολα τώρα μπορεί νά αποδείξει κανείς ότι: ο μέγιστος κοινός διαιρέτης δύο πολυωνύμων, αν υπάρχει, είναι μοναδικός.

"Από τη συνθήκη (ii) του παραπάνω ορισμού συμπεραίνουμε ότι ο βαθμός του  $\delta(x)$  είναι ο πιό μεγάλος (μέγιστος) ανάμεσα στους βαθμούς όλων των κοινών διαιρετών των πολυωνύμων  $f(x), g(x)$ . Σ' αυτό ακριβώς τό γεγονός οφείλεται και η ονομασία του: ΜΚΔ.

Τό μέγιστο κοινό διαιρέτη  $\delta(x)$  δύο πολυωνύμων  $f(x), g(x)$  τόν παριστάνουμε συνήθως ως εξής:  $[f(x), g(x)]$ .

**Όρισμός 5.** Δύο μή μηδενικά πολυώνυμα  $f(x), g(x)$  ονομάζονται **«πρώτα μεταξύ τους»**, τότε και μόνο τότε, αν ο ΜΚΔ τους  $\delta(x)$  είναι ίσος μέ τό 1.

"Ωστε:

$$f(x), g(x) \text{ πρώτα μεταξύ τους} \iff [f(x), g(x)] = 1$$

**§ 116. "Η ταυτότητα της αλγοριθμικής διαιρέσεως.**—Γενικά ή διαίρεση δύο άκέραιων πολυωνύμων δέν είναι τέλεια. "Ενας τρόπος γιά νά ελέγξουμε, αν ένα πολυώνυμο διαιρεί ένα άλλο, είναι ο ακόλουθος:

"Εστω, π.χ., τά πολυώνυμα  $2x^2 - 7x + 6$  και  $3x + 1$ . Γιά νά διαιρεί τό δεύτερο πολυώνυμο τό πρώτο, πρέπει νά υπάρχει άκέραιο πολυώνυμο  $\pi(x)$  τέτοιο, ώστε:

$$2x^2 - 7x + 6 \equiv (3x + 1) \cdot \pi(x) \quad (1)$$

"Επειδή, όπως είπαμε (§ 115), ο βαθμός του πηλίκου ίσοῦται μέ τη διαφορά των βαθμών διαιρετέου και διαιρέτη, συμπεραίνουμε ότι τό  $\pi(x)$  πρέπει νά είναι πρώτου βαθμού, δηλαδή νά έχει τη μορφή:  $ax + \beta$ . Τότε ή (1) γίνεται:

$$2x^2 - 7x + 6 \equiv (3x + 1)(ax + \beta) \equiv 3ax^2 + (\alpha + 3\beta)x + \beta,$$

όπότε, σύμφωνα μέ τόν όρισμό της ισότητας δύο πολυωνύμων, θά έχουμε:

$$\begin{array}{l|l} 3\alpha = 2 & \text{"Η πρώτη άπ' αυτές δίνει } \alpha = \frac{2}{3}. \text{ Γιά } \alpha = \frac{2}{3} \text{ και } \beta = 6 \\ \alpha + 3\beta = -7 & \text{ή δεύτερη δέν άληθεύει, έπειδή:} \\ \beta = 6. & \frac{2}{3} + 3 \cdot 6 = \frac{2}{3} + 18 = 18 \frac{2}{3} \neq -7. \end{array}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι οι εξισώσεις του συστήματος δέν είναι συμβιβαστές και συνεπώς δέν υπάρχει άκέραιο πολυώνυμο  $\pi(x)$  πού νά ικανοποιεί την (1). "Αρα τό  $3x + 1$  δέ διαιρεί τό  $2x^2 - 7x + 6$ .

"Από τό παραπάνω παράδειγμα καταλαβαίνουμε ότι ή διαίρεση δύο άκέραιων πολυωνύμων γενικά δέν είναι τέλεια.

"Ετσι, στη γενική περίπτωση, αντί γιά την ταυτότητα (1) της § 115,



ισχύει ή ταυτότητα της αλγοριθμικής διαιρέσεως, της οποίας ή μορφή δίνεται από τό παρακάτω σπουδαίο θεώρημα, πού ή διατύπωσή του μάς είναι γνωστή από τά μαθήματα της Γ' τάξως του Γυμνασίου. Έδω τώρα θά μάθουμε καί νά τό αποδεικνύουμε.

**Θεώρημα (της αλγοριθμικής διαιρέσεως).**— **Αν μάς δοθούν δύο άκέραια πολυώνυμα  $f(x)$ ,  $\varphi(x)$  του  $C[x]$  μέ  $\varphi(x) \neq 0$ , τότε μπορούμε πάντοτε νά βρούμε δύο μονοσημάντως\* όρισμένα πολυώνυμα  $\pi(x)$ ,  $u(x) \in C[x]$  τέτοια, ώστε :**

$$f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi(x) + u(x) \quad (\tau)$$

όπου  $u(x) \equiv 0$  ή  $\text{βαθμ.}u(x) < \text{βαθμ.}\varphi(x)$ .

**Απόδειξη.** Έστω ότι είναι:

$$f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

$$\varphi(x) \equiv \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0 \quad \text{μέ} \quad \beta_\mu \neq 0.$$

Θά αποδείξουμε: α) Τήν ύπαρξη των  $\pi(x)$  καί  $u(x)$  καί β) τό μονοσήμαντο (τή μοναδικότητα) των πολυωνύμων  $\pi(x)$  καί  $u(x)$ , τά όποια ικανοποιούν τήν (τ).

α) **Υπαρξη των  $\pi(x)$  καί  $u(x)$ .** Διακρίνουμε τίς περιπτώσεις:

$\alpha_1$ : Έστω ότι:  $f(x) \equiv 0$  ή  $\text{βαθμ.}f(x) < \text{βαθμ.}\varphi(x)$ . Σ' αυτή τήν περίπτωση τό θεώρημα ισχύει μέ  $\pi(x) \equiv 0$  καί  $u(x) \equiv f(x)$ , καθόσον έχουμε:

$$f(x) \equiv 0 \cdot \varphi(x) + f(x).$$

$\alpha_2$ : Έστω ότι:  $\text{βαθμ.}f(x) = v \geq \mu = \text{βαθμ.}\varphi(x)$ , τότε διαιρώντας τόν πρώτο όρο  $\alpha_n x^n$  του  $f(x)$  μέ τόν πρώτο όρο  $\beta_\mu x^\mu$  του  $\varphi(x)$  λαμβάνουμε ως πηλίκο τό άκέραιο μονώνυμο  $\frac{\alpha_n}{\beta_\mu} x^{n-\mu}$ , πού τό ονομάζουμε  $\pi_1(x)$ , δηλαδή:

$$\pi_1(x) \equiv \frac{\alpha_n}{\beta_\mu} x^{n-\mu}.$$

Πολλαπλασιάζοντας τώρα τό  $\varphi(x)$  επί τό  $\pi_1(x)$  λαμβάνουμε ως γινόμενο τό πολυώνυμο:

$$\varphi(x) \pi_1(x) \equiv \alpha_n x^n + \frac{\alpha_n}{\beta_\mu} \beta_{\mu-1} x^{n-1} + \frac{\alpha_n}{\beta_\mu} \beta_{\mu-2} x^{n-2} + \dots + \frac{\alpha_n}{\beta_\mu} \beta_0 x^{n-\mu},$$

τό όποιο έχει μέ τό  $f(x)$  κοινό τόν πρώτο όρο  $\alpha_n x^n$ .

Σχηματίζουμε τή διαφορά:

$$f(x) - \varphi(x) \cdot \pi_1(x) \equiv \left( \alpha_{n-1} - \frac{\alpha_n}{\beta_\mu} \beta_{\mu-1} \right) x^{n-1} + \left( \alpha_{n-2} - \frac{\alpha_n}{\beta_\mu} \beta_{\mu-2} \right) x^{n-2} + \dots \quad (1)$$

Αν ονομάσουμε  $u_1(x)$  τό πολυώνυμο του δεύτερου μέλους της (1), έχουμε:

$$f(x) - \varphi(x) \pi_1(x) \equiv u_1(x)$$

ή  $f(x) \equiv \varphi(x) \pi_1(x) + u_1(x)$ , μέ  $u_1(x) \equiv 0$  ή  $\text{βαθμ.}u_1(x) \leq n-1$ . (2)

Τότε: (i) Αν  $u_1(x) \equiv 0$  ή  $\text{βαθμ.}u_1(x) \leq n-1 < \mu$ , τότε ή (2) αποδεικνύει τό θεώρημα.

(ii) Αν  $\text{βαθμ.}u_1(x) \geq \text{βαθμ.}\varphi(x)$ , όπότε από τήν (2)  $n-1 \geq \mu$ , τότε εργαζόμενοι όπως καί προηγουμένως (περίπτωση  $\alpha_2$ ), μέ τό πολυώνυμο  $u_1(x)$  καί  $\varphi(x)$  βρίσκουμε ότι ύπάρχει ζεύγος πολυωνύμων  $\pi_2(x)$ ,  $u_2(x)$ , ώστε:

$$u_1(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi_2(x) + u_2(x), \quad \text{μέ} \quad u_2(x) \equiv 0 \quad \text{ή} \quad \text{βαθμ.}u_2(x) < \text{βαθμ.}u_1(x). \quad (3)$$

\* δηλαδή ύπάρχει ένα καί μόνο ένα ζεύγος πολυωνύμων  $\pi(x)$ ,  $u(x) \in C[x]$ .

Τότε: (i) αν  $u_2(x) \equiv 0$  ή  $\text{βαθμ.}u_2(x) < \text{βαθμ.}\varphi(x)$  τό θεώρημα ισχύει, καθόσον αν προσθέσουμε κατά μέλη τίς (2) καί (3) λαμβάνουμε:

$$f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \{\pi_1(x) + \pi_2(x)\} + u_2(x) \quad (3')$$

μέ  $u_2(x) \equiv 0$  ή  $\text{βαθμ.}u_2(x) < \text{βαθμ.}\varphi(x)$ .

(ii) Αν  $\text{βαθμ.}u_2(x) \geq \mu (= \text{βαθμ.}\varphi(x))$ , τότε συνεχίζοντας τήν ίδια εργασία στά  $u_2(x)$  καί  $\varphi(x)$ , θά καταλήξουμε σέ μία ταυτότητα της μορφής:

$$u_2(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi_3(x) + u_3(x), \quad \text{μέ} \quad u_3(x) \equiv 0 \quad \text{ή} \quad \text{βαθμ.}u_3(x) < \text{βαθμ.}\varphi(x).$$

Οί βαθμοί των  $u_1(x)$ ,  $u_2(x)$ ,  $u_3(x)$ , αν δέν είναι μηδενικά πολυώνυμα, ελαττώνονται διαδοχικά, άρα θά φθάσουμε τελικά σ' ένα πολυώνυμο μέ βαθμό μικρότερο από τό βαθμό  $\mu$  του  $\varphi(x)$ , όπότε καί θά σταματήσει ή εργασία αυτή. Έτσι θά έχουμε τίς ισότητες:

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv \varphi(x) \pi_1(x) + u_1(x) \\ u_1(x) &\equiv \varphi(x) \pi_2(x) + u_2(x) \\ u_2(x) &\equiv \varphi(x) \pi_3(x) + u_3(x) \\ &\dots \dots \dots \\ u_k(x) &\equiv \varphi(x) \pi_{k+1}(x) + u_{k+1}(x), \end{aligned} \quad (4)$$

όπου τό  $u_{k+1}(x)$  είναι τό μηδενικό πολυώνυμο ή πολυώνυμο μέ βαθμό μικρότερο από τό βαθμό  $\mu$  του  $\varphi(x)$ .

Αθροίζοντας τίς ισότητες (4) κατά μέλη λαμβάνουμε μετά τίς άπλοποιήσεις:

$$f(x) \equiv \varphi(x) \{ \pi_1(x) + \pi_2(x) + \dots + \pi_{k+1}(x) \} + u_{k+1}(x).$$

Θέτοντας:  $\pi_1(x) + \pi_2(x) + \dots + \pi_{k+1}(x) \equiv \pi(x)$  καί  $u_{k+1}(x) \equiv u(x)$ , φθάνουμε στην ταυτότητα πού θέλαμε νά αποδείξουμε:

$$f(x) \equiv \varphi(x) \pi(x) + u(x), \quad \text{μέ} \quad u(x) \equiv 0 \quad \text{ή} \quad \text{βαθμ.}u(x) < \mu (= \text{βαθμ.}\varphi(x)).$$

**β) Τό μονοσήμαντο των  $\pi(x)$  καί  $u(x)$  στη (2)**

Τό ζεύγος των πολυωνύμων  $\pi(x)$  καί  $u(x)$  είναι τό μόνο γιά τό όποιο ισχύει ή (τ), γιατί, αν είναι καί:

$$f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi'(x) + u'(x), \quad \text{μέ} \quad u'(x) \equiv 0 \quad \text{ή} \quad \text{βαθμ.}u'(x) < \text{βαθμ.}\varphi(x)$$

τότε:  $\pi'(x) \equiv \pi(x)$  καί  $u'(x) \equiv u(x)$ .

Πράγματι, έπειδή:

$$\varphi(x) \cdot \pi(x) + u(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi'(x) + u'(x),$$

έχουμε:

$$[\pi(x) - \pi'(x)] \varphi(x) \equiv u'(x) - u(x). \quad (5)$$

Τά πολυώνυμα των δύο μελών της (5) δέν μπορεί νά είναι έκ ταυτότητας ίσα παρά μόνο αν:  $\pi(x) - \pi'(x) \equiv 0$ , όπότε:  $u'(x) - u(x) \equiv 0$ , δηλαδή:  $\pi(x) \equiv \pi'(x)$  καί  $u(x) \equiv u'(x)$ , γιατί άλλιώς, δηλαδή αν  $\pi(x) \neq \pi'(x)$ , τότε έπειδή είναι  $\varphi(x) \neq 0$  ό βαθμός του πολυωνύμου του πρώτου μέλους της (5) είναι  $\geq \text{βαθμ.}\varphi(x) = \mu$ , ενώ τό πολυώνυμο του δεύτερου μέλους της (5) είναι βαθμού τό πολύ  $(\mu - 1)$ . Αυτό όμως, σύμφωνα μέ τό γενικό όρισμό της ισότητας δύο πολυωνύμων (§ 110), είναι άδύνατο (βλ. καί σχόλιο της § 115). Άρα  $\pi(x) \equiv \pi'(x)$  καί συνεπώς  $u(x) \equiv u'(x)$ .

**Αξιόλογες παρατηρήσεις. 1)** Ό τρόπος αποδείξεως του πρώτου μέρους του θεωρήματος πού άφορούσε τήν ύπαρξη των  $\pi(x)$  καί  $u(x)$  μάς δείχνει ταυτόχρονα καί τόν τρόπο μέ τόν όποιο μπορούμε νά βρούμε τά (μοναδικά) πολυώνυμα  $\pi(x)$  καί  $u(x)$ .

2) Η εύρεση των  $\pi(x)$  καί  $u(x)$  ονομάζεται **αλγοριθμική ή Εύκλειδια διαιρεση** του  $f(x)$  διά του  $\varphi(x)$  [συμβ.  $f(x) : \varphi(x)$ ]. Τά πολυώνυμα:  $f(x)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $\pi(x)$  καί  $u(x)$  γιά τά όποια ισχύει ή (τ), ή όποια ονομάζεται **ταυτότητα της (αλγοριθμικής διαιρέσεως  $f(x) : \varphi(x)$ )**, ονομάζονται αντίστοιχα: **διαιρετέος, διαιρέτης, αλγοριθμικό ή άκέραιο πηλίκο** (σύντομα: πηλίκο) καί **υπόλοιπο** της διαιρέσεως  $f(x) : \varphi(x)$ .



**Προσέξτε!** σέ μία αλγοριθμική διαίρεση  $f(x) : \varphi(x)$  τό  $\varphi(x)$  ονομάζεται, όπως είπαμε, διαιρέτης τῆς διαιρέσεως καί ὄχι διαιρέτης τοῦ  $f(x)$ .

3) Ἄν  $u(x) \equiv 0$ , τότε καί μόνο τότε ἡ διαίρεση  $f(x) : \varphi(x)$  λέγεται *τέλεια* (§ 115).

4) Ὁ βαθμός τοῦ ἀκέραιου πηλίκου τῆς διαιρέσεως  $f(x) : \varphi(x)$  δύο μὴ μηδενικῶν πολυωνύμων ἰσοῦται μέ τῇ διαφορᾷ τῶν βαθμῶν διαιρετέου καί διαιρέτη, δηλαδή  $\text{βαθμ.} \pi(x) = \text{βαθμ.} f(x) - \text{βαθμ.} \varphi(x)$ .

5) Ἀπό τήν (τ) προκύπτει:  $\varphi(x) \mid f(x) - u(x)$ .

6) Ἀπό τόν τρόπο ἀποδείξεως τοῦ παραπάνω θεωρήματος καί κυρίως ἀπό τίς σχέσεις (2) καί (3') καταλαβαίνουμε ὅτι: γιά νά συμπεράνουμε ἀπό τήν ταυτότητα:  $f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi(x) + u(x)$  ὅτι τά  $\pi(x)$  καί  $u(x)$  εἶναι ἀντιστοίχως τό πηλίκο καί τό ὑπόλοιπο τῆς  $f(x) : \varphi(x)$  πρέπει ἀκόμη νά ξέρομε ὅτι:  $u(x) \equiv 0$  ἢ  $\text{βαθμ.} u(x) < \text{βαθμ.} \varphi(x)$ .

7) Τά πολυώνυμα  $\pi_1(x), \pi_2(x), \dots, \pi_{k+1}(x)$  πού παρουσιάζονται στίς σχέσεις (4) τοῦ παραπάνω θεωρήματος ονομάζονται **μερικά πηλίκα** καί τά  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_k(x)$  ονομάζονται **μερικά ὑπόλοιπα** τῆς διαιρέσεως  $f(x) : \varphi(x)$ .

8) Ἄν τά  $f(x), \varphi(x) \in R[x]$  ἀντίστοιχα  $Q[x]$ , τότε καί τά  $\pi(x), u(x) \in R[x]$  ἀντίστοιχα  $Q(x)$ , ἐνῶ ἂν τά  $f(x), \varphi(x) \in Z[x]$  καί εἶναι  $\beta_\mu = \pm 1$ , τότε καί τά  $\pi(x), u(x) \in Z[x]$ .

Ἄμεσες συνέπειες τοῦ θεωρήματος τῆς αλγοριθμικῆς διαιρέσεως εἶναι οἱ ἐπόμενες ἀληθεῖς προτάσεις:

**Πόρισμα 1ο:** Τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως ἑνός ἀκέραιου πολυωνύμου  $f(x) \in C[x]$  διά τοῦ διωνύμου  $x - a$ ,  $a \in C$  εἶναι  $f(a)$  καί συνεπῶς ἔχουμε τήν ταυτότητα:

$$f(x) \equiv (x - a) \pi(x) + f(a) \quad (1)$$

**Ἀπόδειξη.** Ἐχουμε:  $f(x) \equiv (x - a) \pi(x) + u(x)$  μέ  $u(x) \equiv 0$  ἢ  $\text{βαθμ.} u(x) < \text{βαθμ.} (x - a) = 1$ . Ἄρα  $u(x) = c$ . Ἐχουμε συνεπῶς:

$\forall x \in C, f(x) = (x - a) \pi(x) + c$ . Ἀπ' αὐτή γιά  $x = a$  λαμβάνουμε:  $c \doteq f(a)$ .

Ἄρα:  $f(x) \equiv (x - a) \pi(x) + f(a)$ .

**Σημείωση.** Ἀπό τήν (1) ἔχουμε:  $f(x) - f(a) = (x - a) \pi(x)$ .

Μέ τόν ἴδιο τρόπο ἀποδεικνύεται καί ἡ ἐπόμενη, πιο γενική, πρόταση:

**Πόρισμα 2ο:** Τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως  $f(x) : ax + \beta$ , μέ  $a \neq 0$  εἶναι:

$$u = f\left(-\frac{\beta}{a}\right) \quad (2)$$

Ἐχοντας τώρα ὑπόψη τόν ὅρισμό τῆς ρίζας ἑνός ἀκέραιου πολυωνύμου καί τό πιο πάνω πόρισμα 1 συμπεραίνουμε ἀμέσως τό ἐπόμενο πόρισμα:

**Πόρισμα 3ο:** Ἐνα πολυώνυμο  $f(x) \in C[x]$  διαιρεῖται διά τοῦ διωνύμου  $x - \rho$ ,  $\rho \in C$ , τότε καί μόνο τότε, ἂν τό  $\rho$  εἶναι ρίζα τοῦ  $f(x)$ .

Δηλαδή:  $x - \rho \mid f(x) \iff f(\rho) = 0 \quad (3)$

**Παρατήρηση.** Ἐχοντας ὑπόψη καί τόν ὅρισμό 1 τῆς § 115 ἡ (3) γράφεται πιο γενικά ὡς ἑξῆς:

$$f(\rho) = 0 \iff x - \rho \mid f(x) \iff f(x) \equiv (x - \rho) \pi(x) \quad (3')$$

ὅπου  $\pi(x)$  ἀκέραιο πολυώνυμο τοῦ  $C[x]$ .

Ἀποδεικνύουμε παρακάτω δύο χαρακτηριστικές προτάσεις πού εἶναι ἄμεσες συνέπειες τοῦ θεωρήματος τῆς αλγοριθμικῆς διαιρέσεως καί τοῦ τελευταίου πορίσματος:

**§ 117. Πρόταση I.**—Ἄν  $u_1(x)$  καί  $u_2(x)$  εἶναι τά ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων  $f_1(x) : \delta(x)$  καί  $f_2(x) : \delta(x)$ ,  $\delta(x) \neq 0$ , ἀντιστοίχως, τότε ἰσχύει:

$$\delta(x) \mid f_1(x) - f_2(x) \iff u_1(x) \equiv u_2(x)$$

**Ἀπόδειξη.** Ἄν  $\pi_1(x), \pi_2(x)$  εἶναι ἀντιστοίχως τά πηλίκα τῶν διαιρέσεων  $f_1(x) : \delta(x)$  καί  $f_2(x) : \delta(x)$  θά ἔχουμε, σύμφωνα μέ τό προηγούμενο θεώρημα:

$$f_1(x) \equiv \delta(x) \pi_1(x) + u_1(x), \text{ μέ } u_1(x) \equiv 0 \text{ ἢ } \text{βαθμ.} u_1(x) < \text{βαθμ.} \delta(x) \quad (1)$$

$$f_2(x) \equiv \delta(x) \pi_2(x) + u_2(x), \text{ μέ } u_2(x) \equiv 0 \text{ ἢ } \text{βαθμ.} u_2(x) < \text{βαθμ.} \delta(x) \quad (2)$$

Ἀπό τίς (1) καί (2) λαμβάνουμε:

$$f_1(x) - f_2(x) \equiv \delta(x) [\pi_1(x) - \pi_2(x)] + u_1(x) - u_2(x) \quad (3)$$

(i) Ἐστω τώρα ὅτι  $\delta(x) \mid f_1(x) - f_2(x)$ . Τότε (§ 115):  $f_1(x) - f_2(x) \equiv \delta(x) \pi(x)$ , (4) ὅπου  $\pi(x) \in C[x]$ . Ἀπό τήν (4) καταλαβαίνουμε ὅτι ἡ διαίρεση:  $f_1(x) - f_2(x) : \delta(x)$  εἶναι τέλεια καί συνεπῶς (§ 116, παρατήρηση 3)  $u_1(x) - u_2(x) \equiv 0$ , ὁπότε:  $u_1(x) \equiv u_2(x)$ .

(ii) Ἐστω ὅτι  $u_1(x) \equiv u_2(x)$ , τότε ἀπό τήν (3) ἔχουμε:

$$f_1(x) - f_2(x) \equiv \delta(x) \cdot [\pi_1(x) - \pi_2(x)] \text{ καί συνεπῶς (§ 115) : } \delta(x) \mid f_1(x) - f_2(x).$$

**Πόρισμα.**—Σέ κάθε αλγοριθμική διαίρεση  $f(x) : \varphi(x)$  ὁ διαιρετέος  $f(x)$  καί τό ὑπόλοιπο  $u(x)$  ὅταν διαιρεθοῦν μέ τό διαιρέτη  $\varphi(x)$  ἀφήνουν τό ἴδιο ὑπόλοιπο.

Αὐτό εἶναι ἄμεση συνέπεια τῆς παραπάνω προτάσεως καί τοῦ γεγονότος ὅτι ἰσχύει:

$$f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi(x) + u(x) \iff f(x) - u(x) \equiv \varphi(x) \pi(x) \iff \varphi(x) \mid f(x) - u(x).$$

**§ 118. Πρόταση II.**—Ἀκέραιο πολυώνυμο  $f(x)$ , βαθμοῦ  $\geq n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  διαιρεῖται διά τοῦ  $(x - a)^n$ , τότε καί μόνο τότε, ἂν:

$$f(a) = 0, f_1(a) = 0, f_2(a) = 0, \dots, f_{n-1}(a) = 0,$$

ὅπου  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_{n-1}(x)$  εἶναι ἀντιστοίχως τά πηλίκα τῶν διαιρέσεων:

$$f(x) : (x - a), f_1(x) : (x - a), \dots, f_{n-2}(x) : (x - a).$$

**Ἀπόδειξη.** Ἐστω  $\varphi(x)$  τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ  $f(x)$  διά τοῦ  $(x - a)^n$ . Τότε ἔχουμε:

$$f(x) \equiv (x - a)^n \cdot \varphi(x) \quad (1)$$

Γιά  $x = a$  ἡ (1) δίνει  $f(a) = 0$ , καί συνεπῶς (§ 116, Πόρισμα 3) τό  $f(x)$  διαιρεῖται διά  $x - a$ . Ἄν  $f_1(x)$  εἶναι τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ  $f(x)$  διά  $x - a$ , τότε, διαιρώντας τά δύο μέλη τῆς (1) διά  $x - a$ , λαμβάνουμε τήν ταυτότητα:

$$f_1(x) \equiv (x - a)^{n-1} \cdot \varphi(x) \quad (2)$$

Γιά  $x = a$  ἡ (2) δίνει  $f_1(a) = 0$ , πού σημαίνει ὅτι τό  $f_1(x)$  διαιρεῖται διά  $x - a$ . Ἄν  $f_2(x)$  εἶναι τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως  $f_1(x) : x - a$ , τότε, διαιρώντας τά δύο μέλη τῆς (2) διά  $x - a$ , λαμβάνουμε τήν ταυτότητα:  $f_2(x) \equiv (x - a)^{n-2} \cdot \varphi(x)$  (3)



Γιά  $x = \alpha$  ή (3) δίνει  $f_2(\alpha) = 0$ , που σημαίνει ότι τό  $f_2(x)$  διαιρείται διά  $x - \alpha$ .  
 "Αν προχωρήσουμε μέ τόν ίδιο τρόπο, βρίσκουμε ότι τό πηλίκο τής  $v - 1$  τάξεως είναι:

$$f_{v-1}(x) \equiv (x - \alpha) \cdot \varphi(x) \quad (v)$$

Γιά  $x = \alpha$  ή (v) γίνεται  $f_{v-1}(\alpha) = 0$ , δηλαδή τό πολυώνυμο  $f_{v-1}(x)$  διαιρείται διά  $x - \alpha$ .

**Αντιστρόφως:** "Επειδή  $f(\alpha) = 0, f_1(\alpha) = 0, \dots, f_{v-1}(\alpha) = 0$ , σύμφωνα μέ τό πόρισμα 3 τής § 116 θά έχουμε:

|                                        |                                                                          |
|----------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| $f(x) \equiv (x - \alpha)f_1(x)$       | Πολλαπλασιάζοντας τίς σχέσεις αὐτές κατά μέλη, λαμβάνουμε τήν ταυτότητα: |
| $f_1(x) \equiv (x - \alpha)f_2(x)$     |                                                                          |
| $f_2(x) \equiv (x - \alpha)f_3(x)$     |                                                                          |
| .....                                  |                                                                          |
| $f_{v-1}(x) \equiv (x - \alpha)f_v(x)$ |                                                                          |

$$f(x) \equiv (x - \alpha)^v f_v(x),$$

πού φανερώνει ότι τό πολυώνυμο  $f(x)$  διαιρείται διά  $(x - \alpha)^v$ .

**Εφαρμογή.** "Αν  $v$  είναι φυσικός αριθμός, νά αποδείξετε ότι τό πολυώνυμο:

$$f(x) = vx^{v+1} - (v + 1)x^v + 1$$

διαιρείται διά τοῦ  $(x - 1)^2$ .

**Λύση.** Γιά  $x = 1$  έχουμε:  $f(1) = v - (v + 1) + 1 = 0$ . "Αρα τό  $f(x)$  διαιρείται διά τοῦ  $(x - 1)$ . Κάνοντας τή διαίρεση  $f(x) : (x - 1)$  βρίσκουμε πηλίκο:  $f_1(x) \equiv vx^v - (x^{v-1} + x^{v-2} + \dots + x + 1)$  καί συνεπώς έχουμε τήν ταυτότητα:

$$f(x) \equiv (x - 1) \cdot f_1(x) \quad (1)$$

Παρατηροῦμε τώρα ότι:  $f_1(1) = v - (1 + 1 + \dots + 1 + 1) = v - v = 0$ . "Αρα τό  $f_1(x)$  διαιρείται διά τοῦ  $(x - 1)$  καί συνεπώς, ἂν  $\pi(x)$  εἶναι τό πηλίκο τής τέλειαις διαιρέσεως  $f_1(x) : (x - 1)$ , θά έχουμε τήν ταυτότητα:

$$f_1(x) \equiv (x - 1)\pi(x) \quad (2)$$

"Η (1), λόγω τής (2), γίνεται:  $f(x) \equiv (x - 1)^2 \pi(x)$  πού φανερώνει ότι τό πολυώνυμο  $f(x)$  πού μᾶς δόθηκε διαιρείται διά τοῦ  $(x - 1)^2$ .

**Σημείωση.** Οἱ συνθήκες:  $f(1) = 0 \wedge f_1(1) = 0$  εξασφαλίζουν ἐπίσης, σύμφωνα μέ τήν παραπάνω πρόταση (§ 118), ὅτι:  $(x - 1)^2 / f(x)$ .

**Παρατήρηση.** Γιά νά αποδείξουμε ότι τό ἀκέραιο πολυώνυμο διαιρείται διά μᾶς δυνάμεως τοῦ  $x - \alpha$ , πολλές φορές ἐργαζόμαστε ὡς ἐξῆς:

**Μέθοδος τής ἀντικατάστασης.** "Εστω ότι τό πολυώνυμο  $f(x)$  διαιρείται διά  $(x - \alpha)^2$ . Τότε θά έχουμε τήν ταυτότητα:

$$f(x) \equiv (x - \alpha)^2 \cdot \varphi(x) \quad (1)$$

Θεωροῦμε τό μετασχηματισμό:

$$x - \alpha = y \iff x = y + \alpha \quad (2)$$

καί ἡ (1) γίνεται:

$$f(y + \alpha) \equiv y^2 \cdot \varphi(y + \alpha), \quad (3)$$

ὅπου  $f(y + \alpha)$  καί  $\varphi(y + \alpha)$  ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ  $y$ .

"Από τήν (3) προκύπτει ότι τό  $f(y + \alpha)$  διαιρείται ἀκριβῶς διά τοῦ  $y^2$ . Γιά νά συμβαίνει ὅμως αὐτό ἀρκεῖ τό  $f(y + \alpha)$  νά μήν ἔχει σταθερό καί πρωτοβάθμιο ὄρο, δηλ. νά εἶναι τής μορφῆς:

$$f(y + \alpha) \equiv \alpha_v y^v + \alpha_{v-1} y^{v-1} + \dots + \alpha_3 y^3 + \alpha_2 y^2.$$

"Ομοίως, γιά νά διαιρείται τό  $f(x)$  διά  $(x - \alpha)^3$ , πρέπει καί ἀρκεῖ τό  $f(y + \alpha)$  νά διαιρείται διά  $y^3$ , δηλ. νά εἶναι τής μορφῆς:  $f(y + \alpha) \equiv \alpha_v y^v + \alpha_{v-1} y^{v-1} + \dots + \alpha_4 y^4 + \alpha_3 y^3$ , ἐπειδή μέ τό μετασχηματισμό (2) προκύπτει ὅτι:

$$f(x) \equiv (x - \alpha)^3 \cdot \pi(x) \iff f(y + \alpha) \equiv y^3 \cdot \pi(y + \alpha).$$

**Εφαρμογή:** Νά ἀποδείξετε ότι τό πολυώνυμο:

$$f(x) = x^4 - 9x^3 + 25x^2 - 24x + 4$$

διαιρείται διά τοῦ  $(x - 2)^2$ .

**Απόδειξη:** Κάνουμε τήν ἀντικατάσταση:  $x - 2 = y \iff x = y + 2$  καί έχουμε:

$$f(y + 2) = (y + 2)^4 - 9(y + 2)^3 + 25(y + 2)^2 - 24(y + 2) + 4.$$

"Εκτελώντας τώρα τίς πράξεις βρίσκουμε:

$$f(y + 2) \equiv y^4 - y^3 - 5y^2 = y^2(y^2 - y - 5)$$

ἡ μέ τήν ἀντικατάσταση  $y = x - 2$  έχουμε:

$$f(x) \equiv (x - 2)^2 \cdot [(x - 2)^2 - (x - 2) - 5],$$

ἡ ὁποία φανερώνει ότι τό  $f(x)$  διαιρείται διά τοῦ  $(x - 2)^2$ .

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Ομάδα Α'. 249.** Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἂν τό ἀκέραιο πολυώνυμο  $f(x)$  διαιρείται διά τοῦ  $x - 3$ , τότε τό πολυώνυμο  $f(4x - 5)$  διαιρείται διά τοῦ  $x - 2$ .

**250.** Νά βρεῖτε τό ὑπόλοιπο τής διαιρέσεως  $f(x) : (x - 2)(x - 3)$ , ἂν εἶναι γνωστό ὅτι τό πολυώνυμο  $f(x)$  ὅταν διαιρεῖται μέ τό  $x - 2$  ἀφήνει ὑπόλοιπο 12 καί ὅταν διαιρεῖται μέ τό  $x - 3$  ἀφήνει ὑπόλοιπο 17.

**251.** "Αν τό ὑπόλοιπο τής διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου  $f(x) \equiv ax^4 + bx^3 - 18x^2 + 15x - 5$  διά τοῦ  $\varphi(x) \equiv x^2 - 3x + 2$  εἶναι  $v(x) \equiv 4x - 7$ , νά βρεῖτε τοὺς ἀριθμούς  $\alpha, \beta$ .

**252.** Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ὑπόλοιπο τής διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου  $f(x)$  διά τοῦ  $x^2 - \alpha^2$  εἶναι:

$$v(x) \equiv \frac{f(\alpha) - f(-\alpha)}{2\alpha} x + \frac{f(\alpha) + f(-\alpha)}{2}.$$

**253.** Νά ἀποδείξετε ὅτι τό πολυώνυμο:  $f(x) \equiv x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 7x + 6$  διαιρείται διά τοῦ  $(x - 1)^2$ .

**Ομάδα Β'. 254.** Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἂν τό πολυώνυμο  $x^3 + ax + \beta$  εἶναι διαιρετό διά τοῦ  $(x - k)^2$ , τότε οἱ συντελεστές  $\alpha, \beta$  ικανοποιοῦν τήν:

$$\left(\frac{\alpha}{3}\right)^3 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 = 0.$$

**255.** Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἂν  $\alpha \neq \beta$ , τότε τό ὑπόλοιπο τής διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου  $f(x)$ , βαθμ.  $f(x) \geq 2$ , διά τοῦ  $\varphi(x) \equiv (x - \alpha)(x - \beta)$  εἶναι:

$$v(x) \equiv \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} x + \frac{\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)}{\beta - \alpha}.$$

Ποιό εἶναι τό ὑπόλοιπο τής πιό πάνω διαιρέσεως, ὅταν  $\alpha = \beta$ ;

**255.** Νά ἀποδείξετε ὅτι δέν μπορεῖ νά ὑπάρχουν τρία μὴ μηδενικά πολυώνυμα  $\varphi(x), \sigma(x)$  καί  $\tau(x)$ , βαθμοῦ  $v$ , τὰ ὁποία ικανοποιοῦν τήν ταυτότητα.

$$\varphi(x)f^2(x) + \sigma(x)f(x) + \tau(x) \equiv 0,$$

ὅπου  $f(x)$  μὴ μηδενικό πολυώνυμο μέ βαθμ.  $f(x) > v$ .

**Υπόδειξη.** Νά μελετήσετε ξανά τό σχόλιο τής § 115.

**257.** Νά βρεῖτε, συναρτήσῃ τοῦ  $v$ , τοὺς συντελεστές  $\alpha, \beta$  τοῦ πολυωνύμου  $f(x) \equiv x^{v+1} + \alpha x + \beta$ , ἂν ξέρομε ὅτι ἡ διαίρεση  $f(x) : (x - 1)^2$  εἶναι τέλεια. Στή συνέχεια νά βρεῖτε τό ἀντίστοιχο πηλίκο.

**258.** Νά προσδιορίσετε τοὺς πραγματικούς ἀριθμούς  $\alpha, \beta$  ὥστε τό πολυώνυμο:  $f(x) \equiv ax^{v+1} + bx^v + 1$  νά διαιρεῖται διά τοῦ  $(x - 1)^2$  καί κατόπιν νά βρεῖτε τό ἀντίστοιχο πηλίκο.



Σ' αυτή την ένότητα θα αναφέρουμε προτάσεις (ιδιότητες) που ισχύουν για τα πολυώνυμα με μιγαδικούς συντελεστές, δηλαδή για όλα τα πολυώνυμα. Στις επόμενες ένότητες με τίτλους: *ακέραια πολυώνυμα με πραγματικούς, αντίστοιχα ρητούς, αντίστ. ακέραιους συντελεστές*, θα αναφέρουμε εκείνες τις προτάσεις (ιδιότητες) που δεν ισχύουν για κάθε ακέραιο πολυώνυμο, αλλά μόνο όταν το πολυώνυμο ανήκει στο  $R[x]$ , αντίστ. στο  $Q[x]$ , αντίστ. στο  $Z[x]$ .

**§ 119. Ίδιότητα I.**— 'Αν ένα ακέραιο πολυώνυμο  $f(x), f(x) \in C[x]$ , διαιρείται με καθένα από τα διώνυμα:  $(x - \rho_1), (x - \rho_2), \dots, (x - \rho_n)$ , όπου  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$  αριθμοί διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, τότε το  $f(x)$  θα διαιρείται και με το γινόμενο:

$$(x - \rho_1)(x - \rho_2) \cdots (x - \rho_n)$$

και αντίστροφως.

'Απόδειξη: Από το πόρισμα 3 της § 116 και από την υπόθεση, λαμβάνουμε:

$$f(\rho_1) = 0, f(\rho_2) = 0, \dots, f(\rho_n) = 0 \quad (1)$$

Εξάλλου, επειδή  $(x - \rho_1)/f(x)$ , θα είναι:

$$f(x) \equiv (x - \rho_1) \cdot f_1(x) \quad (2)$$

Η (2) για  $x = \rho_2$  γίνεται:  $f(\rho_2) = (\rho_2 - \rho_1) \cdot f_1(\rho_2)$ . 'Αλλά  $f(\rho_2) = 0$  και  $\rho_1 \neq \rho_2$ , οπότε  $f_1(\rho_2) = 0$ . Τότε όμως, σύμφωνα με το (ίδιο) πόρισμα 3 της § 116, έχουμε  $f_1(x) \equiv (x - \rho_2) \cdot f_2(x)$ , οπότε η (2) γίνεται:

$$f(x) \equiv (x - \rho_1)(x - \rho_2) \cdot f_2(x) \quad (3)$$

Με τον ίδιο τρόπο, η (3) για  $x = \rho_3$  γίνεται:

$$f(\rho_3) = (\rho_3 - \rho_1)(\rho_3 - \rho_2) \cdot f_2(\rho_3).$$

'Αλλά  $f(\rho_3) = 0$  και  $\rho_3 \neq \rho_1, \rho_3 \neq \rho_2$ , οπότε  $f_2(\rho_3) = 0$ .

'Αρα:  $f_2(x) \equiv (x - \rho_3) \cdot f_3(x)$  και συνεπώς η (3) γίνεται:

$$f(x) \equiv (x - \rho_1)(x - \rho_2)(x - \rho_3)f_3(x).$$

'Αν εργαστούμε με όμοιο τρόπο και μετά  $n - 3$  βήματα, τελικά λαμβάνουμε:

$$f(x) \equiv (x - \rho_1)(x - \rho_2) \cdots (x - \rho_n)f_n(x) \quad (v)$$

'Από την τελευταία ταυτότητα συμπεραίνουμε (§ 115) ότι:

$$(x - \rho_1)(x - \rho_2) \cdots (x - \rho_n)/f(x), \text{ όπου } \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$$

αριθμοί διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο.

Τό αντίστροφο είναι προφανές.

**Άσκηση:** Νά αποδείξετε την παραπάνω ιδιότητα και με τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής.

**Παρατήρηση.** Με τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής αποδεικνύεται η επόμενη πιο γενική πρόταση: 'Αν ένα ακέραιο πολυώνυμο  $f(x)$  διαιρείται με καθένα από τα πολυώνυμα:  $(x - \rho_1)^{\lambda_1}, (x - \rho_2)^{\lambda_2}, \dots, (x - \rho_n)^{\lambda_n}$ , όπου  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{N}$  και  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$  αριθμοί διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, τότε το  $f(x)$  θα διαιρείται και με το γινόμενό τους.

Γιά  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 1$  παίρνουμε την ιδιότητα I.

\*Άμεση συνέπεια της προηγούμενης ιδιότητας είναι η εξής:

**§ 120. Ίδιότητα II.** (*τύπος παραγοντοποίησης*).— 'Αν το ακέραιο πολυώνυμο:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

βαθμού  $n \geq 1$ , δέχεται ως ρίζες τους  $n$  διαφορετικούς μεταξύ τους ανά δύο αριθμούς:  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ , τότε ισχύει η ταυτότητα:

$$f(x) = a_n(x - \rho_1)(x - \rho_2) \cdots (x - \rho_n) \quad (1)$$

'Απόδειξη. 'Επειδή  $f(\rho_1) = f(\rho_2) = \dots = f(\rho_{n-1}) = f(\rho_n) = 0$ , το πολυώνυμο  $f(x)$ , σύμφωνα με τ' πόρισμα 3 της § 116, θα διαιρείται με καθένα από τα διώνυμα:  $(x - \rho_1), (x - \rho_2), \dots, (x - \rho_{n-1}), (x - \rho_n)$ .

'Επειδή  $\rho_1 \neq \rho_2 \neq \dots \neq \rho_{n-1} \neq \rho_n \neq \rho_1$ ,

τό  $f(x)$  θα διαιρείται τότε, σύμφωνα με την ιδιότητα I, και με το γινόμενο:

$$(x - \rho_1)(x - \rho_2) \cdots (x - \rho_n).$$

'Ετσι θα έχουμε (§ 115) την ταυτότητα:

$$f(x) \equiv (x - \rho_1)(x - \rho_2) \cdots (x - \rho_n) \cdot \pi(x) \quad (2)$$

όπου  $\pi(x)$  το πηλίκο της διαιρέσεως  $f(x) : (x - \rho_1)(x - \rho_2) \cdots (x - \rho_n)$ .

'Επειδή ο διαιρετέος και ο διαιρέτης είναι βαθμού  $n$ , το πηλίκο  $\pi(x)$  είναι βαθμού 0 (γιατί;). Τό  $\pi(x)$  λοιπόν δεν έχει ρίζα, είναι απλώς ένα σταθερό μη μηδενικό πολυώνυμο. 'Εστω λοιπόν ότι:  $\pi(x) \equiv c$ . Τότε η (2) γίνεται:

$$f(x) \equiv c(x - \rho_1)(x - \rho_2) \cdots (x - \rho_n) \quad (3)$$

'Αλλά:  $f(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  (4)

'Από την (3) και (4) αν εξισώσουμε τους συντελεστές του  $x^n$  βρίσκουμε  $c = a_n$ .

'Αρα:  $f(x) \equiv a_n(x - \rho_1)(x - \rho_2) \cdots (x - \rho_n)$ .

**Παρατήρηση.** Τό  $f(x)$  γράφεται με τη μορφή (1) κατά ένα και μόνο ένα τρόπο. Γιατί διαφορετικά, αν τό  $f(x)$  γραφόταν και με τη μορφή:

$$f(x) \equiv a_n(x - \xi_1)(x - \xi_2) \cdots (x - \xi_n)$$

όπου οι αριθμοί  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, τότε θα υπήρχε ένας (τουλάχιστο) αριθμός  $\xi_k, k = 1, 2, \dots, n$ , διαφορετικός από όλους τους αριθμούς:  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ . Τότε όμως θα είχαμε ταυτόχρονα:  $f(\xi_k) \neq 0$  και  $f(\xi_k) = 0$ . Αυτό όμως αποκλείεται να συμβαίνει (βλ. Σημ. § 5).

'Από την ιδιότητα II προκύπτει άμεσα με άτοπο απαγωγή τό παρακάτω

**Πόρισμα.**—Κάθε ακέραιο πολυώνυμο  $f(x) \in C[x]$ , βαθμού  $n \geq 2$ , έχει  $n$  τό πολύ διαφορετικές (διακεκριμένες) ρίζες.

**§ 121. Βαθμός πολλαπλότητας ρίζας πολυωνύμου.**— 'Από τό πόρισμα 3 της § 116 έχουμε ότι: αν ο αριθμός  $\rho \in C$  είναι ρίζα του πολυωνύμου  $f(x)$ , τότε  $x - \rho/f(x)$  και συνεπώς:  $f(x) \equiv (x - \rho)\pi_1(x)$ , όπου  $\pi_1(x) \in C[x]$ .



Ενδέχεται τώρα ο αριθμός  $\rho$  να είναι και ρίζα του  $\pi_1(x)$ , οπότε  $\pi_1(x) \equiv (x - \rho)\pi_2(x)$  και συνεπώς  $f(x) \equiv (x - \rho)^2\pi_2(x)$ . Αν και  $\pi_2(\rho) = 0$ , τότε συνεχίζοντας θα καταλήξουμε στη σχέση:  $f(x) \equiv (x - \rho)^k \cdot \pi_k(x)$  με  $\pi_k(\rho) \neq 0$ . Λέμε τότε ότι ο αριθμός  $\rho \in \mathbb{C}$  είναι ρίζα του πολυωνύμου  $f(x)$  **βαθμού** **πολλαπλότητας**  **$k$**  ( $k \geq 1$ ).

Ακριβέστερα δίνουμε τον επόμενο ορισμό:

**Όρισμός 1.** Θα λέμε ότι ο αριθμός  $\rho \in \mathbb{C}$  είναι **ρίζα** **βαθμού** **πολλαπλότητας**  **$k$**  ( $k \geq 1$ ) του πολυωνύμου  $f(x)$ , τότε και μόνο τότε, αν υπάρχει άκραιο πολυώνυμο  $\varphi(x)$  τέτοιο, ώστε:

$$f(x) \equiv (x - \rho)^k \varphi(x) \wedge \varphi(\rho) \neq 0 \quad (1)$$

Για τις πολλαπλές ρίζες δίνουμε και τον εξής ορισμό:

**Όρισμός 2.** Θα λέμε ότι ο αριθμός  $\rho \in \mathbb{C}$  είναι **ρίζα** **βαθμού** **πολλαπλότητας**  **$k$**  ( $k \geq 1$ ) του πολυωνύμου  $f(x)$ , τότε και μόνο τότε, αν:

$$(x - \rho)^k \nmid f(x) \wedge (x - \rho)^{k+1} \nmid f(x) \quad (2)$$

Οι ορισμοί 1 και 2 είναι ισοδύναμοι:

**Απόδειξη.** (1)  $\Rightarrow$  (2): Πράγματι, αν η (1) ισχύει, τότε:  $(x - \rho)^k \mid f(x)$ .

Εξάλλου  $(x - \rho)^{k+1} \nmid f(x)$ , γιατί αν είχαμε και  $(x - \rho)^{k+1} \mid f(x)$ , τότε:

$$f(x) \equiv (x - \rho)^{k+1} g(x) \equiv (x - \rho)^k [(x - \rho) g(x)] \quad (3)$$

Συγκρίνοντας τις (1), (3) έχουμε:  $\varphi(x) \equiv (x - \rho) g(x)$  (4)

Αλλά:  $\varphi(\rho) = (\rho - \rho)g(\rho) = 0$ . Αυτό όμως, λόγω της (1), είναι άτοπο.

(2)  $\Rightarrow$  (1): Πράγματι, αν η (2) είναι αληθής, τότε:  $f(x) \equiv (x - \rho)^k \cdot \varphi(x)$ . Εξάλλου  $\varphi(\rho) \neq 0$ , γιατί αλλιώς, δηλ. αν  $\varphi(\rho) = 0$ , τότε σύμφωνα με το πόρισμα 3 της § 116, θα είχαμε:  $\varphi(x) \equiv (x - \rho)\pi(x)$ , οπότε:  $f(x) \equiv (x - \rho)^{k+1} \cdot \pi(x)$  και συνεπώς:  $(x - \rho)^{k+1} \mid f(x)$ , αλλά αυτό είναι άτοπο, λόγω της (2).

**Σημείωση.** Αν  $k = 1$ , τότε η ρίζα  $\rho$  λέγεται **άπλη**, αν  $k = 2$ , **διπλή** κ.ο.κ. Γενικά μία ρίζα  $\rho$  ενός πολυωνύμου  $f(x)$  βαθμού πολλαπλότητας  $k \geq 2$  ονομάζεται **πολλαπλή ρίζα** του  $f(x)$ . Μία τέτοια ρίζα είναι τουλάχιστο διπλή.

**Παρατηρήσεις. α)** Αν ένα πολυώνυμο  $f(x)$  έχει μία ρίζα πολλαπλή με βαθμό πολλαπλότητας  $k$ , τότε:  $\text{βαθμ.} f(x) \geq k$ .

**β)** Αν ξέρουμε μόνο ότι:  $f(x) \equiv \text{πολ.}(x - \rho)^k$ , δηλαδή αν ισχύει μόνο η πρώτη συνθήκη της (2), συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός  $\rho$  είναι ρίζα του  $f(x)$  με βαθμό πολλαπλότητας τουλάχιστο  $k$ .

**γ)** Από τους παραπάνω ισοδύναμους ορισμούς συμπεραίνουμε ότι: σε κάθε ρίζα ενός άκραιο πολυωνύμου  $f(x)$  αντιστοιχεί ακριβώς ένας μέγιστος άκραιο αριθμός  $k \geq 1$ , πού όπως είδαμε ονομάζεται **βαθμός πολλαπλότητας** της ρίζας.

**Σχόλιο.** Στην επόμενη τάξη θα όρισουμε την έννοια της παραγώγου ενός πολυωνύμου, ακριβέστερα της παραγώγου μιας πολυωνυμικής συνάρτησης και τότε εύκολα κανείς,στηριζόμενος στους παραπάνω ορισμούς, μπορεί να αποδείξει την πρόταση: **Ρίζα βαθμού πολλαπλότητας  $k > 1$  για ένα πολυώνυμο, είναι ρίζα βαθμού πολλαπλότητας  $k - 1$  για την παράγωγο του.**

**§ 122. Ίδιότητα III.**— Κάθε άκραιο πολυώνυμο  $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ , βαθμού  $v \geq 1$ , έχει  $v$  ακριβώς ρίζες (ίσες ή διαφορετικές) μέσα στο σύνολο  $\mathbb{C}$  των μιγαδικών αριθμών.

**Απόδειξη.** Έστω  $f(x) \equiv a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$  ένα άκραιο πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές, βαθμού  $v \geq 1$ , οπότε (§ 110)  $a_v \neq 0$ .

Σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας (§ 113) το  $f(x)$  έχει μία τουλάχιστο ρίζα στο σύνολο  $\mathbb{C}$ . Έστω ότι είναι:  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$  όλες οι διαφορετικές μεταξύ τους ανά δύο ρίζες του  $f(x)$  στο  $\mathbb{C}$  με βαθμό πολλαπλότητας:  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  αντιστοίχως. Τότε έχουμε:

$$(x - \rho_1)^{\lambda_1} \mid f(x) \wedge (x - \rho_2)^{\lambda_2} \mid f(x) \wedge \dots \wedge (x - \rho_k)^{\lambda_k} \mid f(x)$$

οπότε (βλ. παρατήρηση της § 119) και:  $(x - \rho_1)^{\lambda_1} \cdot (x - \rho_2)^{\lambda_2} \cdot \dots \cdot (x - \rho_k)^{\lambda_k} \mid f(x)$ .

$$\text{Άρα: } f(x) \equiv (x - \rho_1)^{\lambda_1} \cdot (x - \rho_2)^{\lambda_2} \cdot \dots \cdot (x - \rho_k)^{\lambda_k} \pi(x) \quad (1)$$

όπου  $\pi(x) \in \mathbb{C}[x]$  με  $\pi(\rho_1) \neq 0 \wedge \pi(\rho_2) \neq 0 \wedge \dots \wedge \pi(\rho_k) \neq 0$ .

Το  $\pi(x)$  δεν έχει ρίζα στο  $\mathbb{C}$ , γιατί αλλιώς, δηλαδή αν το  $\pi(x)$  είχε ρίζα στο  $\mathbb{C}$ , τότε αυτή θα ήταν ρίζα και του  $f(x)$  και έπειδή οι αριθμοί:  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$  είναι όλες οι διακεκριμένες ρίζες του  $f(x)$  στο  $\mathbb{C}$ , τότε θα υπήρχε ένας απ' αυτούς τους αριθμούς, έστω ο  $\rho_i$ , για τον οποίο θα είχαμε ταυτόχρονα:  $\pi(\rho_i) = 0$  και  $\pi(\rho_i) \neq 0$ . Αυτό όμως είναι άτοπο.

Για το  $\pi(x)$  συνεπώς δεν είναι δυνατό να ισχύει:  $\text{βαθμ.} \pi(x) \geq 1$  (γιατί;) Θα είναι λοιπόν  $\text{βαθμ.} \pi(x) = 0$ , δηλαδή  $\pi(x) \equiv c$ , όπου  $c \in \mathbb{C}$  με  $c \neq 0$ .

Τότε η (1) γράφεται:

$$f(x) \equiv c \cdot (x - \rho_1)^{\lambda_1} \cdot (x - \rho_2)^{\lambda_2} \cdot \dots \cdot (x - \rho_k)^{\lambda_k} \quad (2)$$

Από τη (2) έχουμε τώρα, αν λάβουμε υπόψη και τη (12) της § 111:

$$\text{βαθμ.} f(x) = \text{βαθμ.} c + \text{βαθμ.}(x - \rho_1)^{\lambda_1} + \dots + \text{βαθμ.}(x - \rho_k)^{\lambda_k}$$

δηλαδή:  $v = 0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$ .

$$\text{Ώστε: } \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = v \quad (3)$$

Η (3) αποδεικνύει την παραπάνω ιδιότητα.

Έχοντας τώρα υπόψη τη (2) και ότι:

$$f(x) \equiv a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

βρίσκουμε, αν εξισώσουμε τους συντελεστές του  $x^v$ , ότι:  $c = a_v$ , οπότε:

$$f(x) \equiv a_v (x - \rho_1)^{\lambda_1} \cdot (x - \rho_2)^{\lambda_2} \cdot \dots \cdot (x - \rho_k)^{\lambda_k} \quad (4)$$

όπου είναι:  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = v$  ( $k \leq v$ ).

Αποδείξαμε λοιπόν συγχρόνως και την εξής:

**§ 123. Ίδιότητα IV.**— Αν το άκραιο πολυώνυμο:

$$f(x) \equiv a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

βαθμού  $v \geq 1$ , έχει μέσα στο  $\mathbb{C}$  ρίζες τους αριθμούς:  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$  με βαθμούς πολλαπλότητας:  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  αντίστοιχως, τότε ισχύει η ταυτότητα:

$$f(x) \equiv a_v (x - \rho_1)^{\lambda_1} \cdot (x - \rho_2)^{\lambda_2} \cdot \dots \cdot (x - \rho_k)^{\lambda_k} \quad (1)$$

όπου είναι:  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = v$  ( $k \leq v$ ).

**Παρατηρήσεις. α)** Για  $k = v$  και  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_v = 1$  παίρνουμε τον τύπο (1) της § 120.

**β)** Το  $f(x)$  γράφεται με τη μορφή (1) κατά ένα και μόνο ένα τρόπο. Η παράσταση (1) πού όπως είπαμε είναι μονοσημάντως ορισμένη για κάθε πολυώνυμο  $f(x)$ , αν δε λαμβάνεται υπόψη η θέση των παραγόντων σ' αυτή, ονομάζεται «*ανάλυση του πολυωνύμου  $f(x)$  σε γινόμενο πρώτων παραγόντων*».

**γ)** Αν θέσουμε:  $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{\lambda_1} = \rho_1, \xi_{\lambda_1+1} = \dots = \xi_{\lambda_1+\lambda_2} = \rho_2, \dots$  κ.ο.κ. συμπεραίνουμε ότι: Κάθε άκραιο πολυώνυμο  $f(x) \equiv a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , με  $a_v \neq 0$  μπορεί να λάβει τη μορφή:



$$f(x) \equiv \alpha_n(x - \xi_1)(x - \xi_2) \cdots (x - \xi_n) \quad (2)$$

όπου  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  οι ρίζες (πραγματικές ή μιγαδικές) του  $f(x)$ , όχι υποχρεωτικά διαφορετικές μεταξύ τους ανά δύο, όπως είχαμε υποθέσει στην ιδιότητα II τής § 120.

δ) Στή μορφή (2) θα μπορούσαμε, ανεξάρτητα από την ιδιότητα IV, να φθάσουμε και ως εξής: Μέ  $n \geq 1$ , σύμφωνα με το θεώρημα του D' Alembert το  $f(x)$  έχει μία (τουλάχιστο) ρίζα  $\xi_1 \in \mathbb{C}$ . Άρα:  $f(x) \equiv (x - \xi_1)f_1(x)$  με βαθμ. $f_1(x) = n - 1$ .

Μέ  $n - 1 \geq 1$ , το  $f_1(x)$  έχει, σύμφωνα με το ίδιο θεώρημα (§ 113), μία ρίζα  $\xi_2 \in \mathbb{C}$  και επομένως:  $f_1(x) \equiv (x - \xi_2)f_2(x)$  με βαθμ. $f_2(x) = n - 2$ .

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο λαμβάνουμε μετά από  $n - 2$  βήματα:

$$f_{n-1}(x) \equiv (x - \xi_n) \cdot f_n \text{ με βαθμ. } f_n = n - n = 0, \text{ δηλ. } f_n \equiv c, c \neq 0.$$

Πολλαπλασιάζοντας αυτές τις ιδιότητες κατά μέλη και εξισώνοντας τους συντελεστές του  $x^n$  βρίσκουμε, μετά από σχετικές απλοποιήσεις, τη (2).

**Εφαρμογή:** Τό πολυώνυμο:  $f(x) \equiv x^6 + 3x^5 - 4x^4 - 6x^3 + x^2 + 3x + 2$  αναλύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ως εξής:

$$f(x) \equiv (x - 1)^2(x + 1)^3(x + 2),$$

δηλαδή έχει ως ρίζες τους αριθμούς: 1, -1, -2 με βαθμούς πολλαπλότητας: 2, 3, 1 αντίστοιχως.

Η επόμενη πρόταση μάς δίνει μία συνθήκη για να είναι ένα πολυώνυμο μηδενικό:

**§ 124. Ιδιότητα V.**— "Αν ένα άκέραιο πολυώνυμο  $f(x)$ , βαθμού τό πολύ  $n$ , μηδενίζεται για  $n+1$  διαφορετικές μεταξύ τους ανά δύο τιμές του  $x$ , τότε τό  $f(x)$  είναι τό μηδενικό πολυώνυμο.

**Απόδειξη.** Έστω ότι τό άκέραιο πολυώνυμο  $f(x)$  είναι:

$$f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

μέ βαθμ. $f(x) \leq n$  ή  $f(x) \equiv 0$ .

Έστω ακόμη ότι:  $f(\rho_1) = f(\rho_2) = \cdots = f(\rho_n) = f(\rho_{n+1}) = 0$ , όπου  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \rho_{n+1}$  αριθμοί διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο.

Έστω ότι τό  $f(x) \not\equiv 0$ , τότε υπάρχει ένας τουλάχιστο συντελεστής, έστω  $\alpha_k$ , μέ  $\alpha_k \neq 0$ . Τότε τό  $f(x)$  θά ήταν βαθμού  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) και σύμφωνα με την ιδιότητα II τής § 120 θά είχαμε την ταυτότητα:

$$f(x) \equiv \alpha_k(x - \rho_1)(x - \rho_2) \cdots (x - \rho_k) \quad (1)$$

Η (1) για  $x = \rho_{k+1}$  γίνεται:

$$f(\rho_{k+1}) = \alpha_k(\rho_{k+1} - \rho_1)(\rho_{k+1} - \rho_2) \cdots (\rho_{k+1} - \rho_k) = 0 \quad (2)$$

Αλλά:  $(\rho_{k+1} - \rho_1)(\rho_{k+1} - \rho_2) \cdots (\rho_{k+1} - \rho_k) \neq 0$ , όποτε από τη (2) έπεται ότι  $\alpha_k = 0$ , γεγονός πού μάς οδηγεί στην αντίφαση:  $\alpha_k \neq 0$  και  $\alpha_k = 0$ .

Θά είναι λοιπόν  $\alpha_k = 0 \forall k = 1, 2, \dots, n$ .

Τότε τό πολυώνυμο  $f(x)$  παίρνει τη μορφή:  $f(x) \equiv \alpha_0$ . Είναι όμως και  $\alpha_0 = 0$ , γιατί άλλιώς τό  $f(x)$  δέ θά μηδενιζότανε για καμία τιμή του  $x$ , πράγμα πού άποκλείεται από την υπόθεση.

Έτσι άποδείξαμε λοιπόν ότι:  $\alpha_n = \alpha_{n-1} = \cdots = \alpha_1 = \alpha_0 = 0$  (4)

Η (4) άποδεικνύει την παραπάνω ιδιότητα.

**Σημείωση.** Η άπόδειξη τής παραπάνω ιδιότητας μπορεί να γίνει, πίο σύντομα, ως εξής: Έπειδή  $f(\rho_1) = f(\rho_2) = \cdots = f(\rho_n) = f(\rho_{n+1}) = 0$ , θά ισχύει:

$$(x - \rho_1)(x - \rho_2) \cdots (x - \rho_n)(x - \rho_{n+1})/f(x).$$

Παρατηρούμε τώρα ότι: τό πολυώνυμο  $f(x)$ , βαθμού τό πολύ  $n$ , διαιρείται από ένα πολυώνυμο βαθμού  $n + 1$ . Άρα (βλ. σχόλιο τής § 115) πρέπει  $f(x) \equiv 0$ .

**Εφαρμογή:** "Αν  $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$ , να άποδείξετε ότι τό:

$$f(x) \equiv (x - \alpha)^2(\beta - \gamma) + (x - \beta)^2(\gamma - \alpha) + (x - \gamma)^2(\alpha - \beta) + (\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)$$

είναι τό μηδενικό πολυώνυμο.

**Λύση:** Εύκολα διαπιστώνουμε ότι:  $f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) = 0$ . Έπειδή τό  $f(x)$  είναι τό πολύ δεύτερου βαθμού και μηδενίζεται για 3 διαφορετικές μεταξύ τους ανά δύο τιμές του  $x$ , έπεται ότι τό  $f(x)$  είναι τό μηδενικό πολυώνυμο.

Άμεσες συνέπειες τής πίο πάνω ιδιότητας είναι τά επόμενα πορίσματα:

**Πόρισμα I.**— "Αν δύο άκέραια πολυώνυμα  $f(x)$ ,  $\varphi(x)$  είναι και τά δύο βαθμού τό πολύ  $n$  και παίρνουν ίσες τιμές για  $n + 1$  διαφορετικές τιμές του  $x$ , τότε  $f(x) = \varphi(x) \forall x \in \mathbb{C}$ , δηλαδή:  $f(x) \equiv \varphi(x)$ .

**Υπόδειξη.** Νά θεωρήσετε τό πολυώνυμο  $F(x) \equiv f(x) - \varphi(x)$  και να διαπιστώσετε ότι τό  $F(x)$  ίκανοποιεί τις υποθέσεις τής ιδιότητας V. Άρα ... κτλ.

**Πόρισμα II.**— "Αν ένα άκέραιο πολυώνυμο  $f(x)$ , βαθμού τό πολύ  $n$ , λαμβάνει την ίδια αριθμητική τιμή  $\lambda$  για  $n + 1$  (τουλάχιστο) διαφορετικές μεταξύ τους τιμές του  $x$ , τότε τό  $f(x)$  είναι τό σταθερό πολυώνυμο  $\lambda$ , δηλ.  $f(x) = \lambda$ .

**Υπόδειξη.** Νά εφαρμόσετε την ιδιότητα V στο πολυώνυμο  $F(x) \equiv f(x) - \lambda$ .

**Πόρισμα III.**— "Αν για άπειρες, αλλά διαφορετικές μεταξύ τους, τιμές του  $x$ , ένα πολυώνυμο  $f(x)$  λαμβάνει την ίδια αριθμητική τιμή  $\lambda$ , τότε αυτό είναι τό σταθερό πολυώνυμο  $\lambda$ , δηλαδή  $f(x) \equiv \lambda$ . Ειδικά, αν  $\lambda = 0$ , τότε τό  $f(x)$  είναι τό μηδενικό πολυώνυμο.

**Σχόλιο:** Τά δύο τελευταία πορίσματα, αν θέλουμε να έκφραστούμε με τη «γλώσσα» τής Γεωμετρίας μάς λένε ότι: "Αν τό γράφημα ενός πολυωνύμου  $f(x)$ , βαθμού τό πολύ  $n$  (άντ. όποιουδήποτε βαθμού) έχει  $n + 1$  (άντίστοιχα άπειρα) κοινά σημεία με την ευθεία  $y = \lambda$ , ή όποία είναι παράλληλη με τόν άξονα τών  $x$ , τότε τά δύο σημειοσύνολα ταυτίζονται, δηλαδή τό γράφημα του πολυωνύμου  $f(x)$  είναι, τότε, ή ευθεία  $y = \lambda$ .

**Εφαρμογή.** Θεωρούμε τό πολυώνυμο  $f(x)$  με την ιδιότητα: για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και για κάθε φυσικό αριθμό  $n$  ισχύει:

$$f(x) = f\left(vx - \frac{1}{v}\right) \quad (1)$$

Νά άποδείξετε ότι τό  $f(x)$  είναι ένα σταθερό πολυώνυμο.

**Λύση.** Για  $n = 1$  και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει:

$$f(x) = f(x - 1) \quad (2)$$

Από τη (2) για  $x = 1, 2, 3, \dots$  λαμβάνουμε:

$$f(1) = f(0), f(2) = f(1), f(3) = f(2), \dots, f(v) = f(v - 1), \dots$$

Άρα:  $f(1) = f(2) = f(3) = \cdots = f(v) = \cdots = \lambda$ , όπου  $\lambda = f(0)$  (3)

δηλαδή για κάθε φυσικό αριθμό τό πολυώνυμο  $f(x)$  έχει σταθερή τιμή.

Από την (3) βλέπουμε πώς τό πολυώνυμο  $f(x)$  πού πήραμε λαμβάνει την ίδια αριθμητική τιμή  $\lambda = f(0)$  για άπειρες τιμές του  $x$ , συνεπώς, σύμφωνα με τό τελευταίο πόρισμα, τό  $f(x)$  είναι ένα σταθερό πολυώνυμο.



§ 125. Σχέσεις μεταξύ τῶν ριζῶν καὶ τῶν συντελεστῶν ἑνὸς ἀκέραιου πολυωνύμου (τύποι τοῦ *Vieta*).— Ἐστω τὸ ἀκέραιο πολυώνυμο:

$$f(x) \equiv \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0, \quad \alpha_v \neq 0$$

μέ ρίζες  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_{v-1}, \rho_v$ .

Είναι γνωστό (§ 123, παρατ. γ) ότι ισχύει:

$$\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 \equiv \alpha_v (x - \rho_1)(x - \rho_2) \cdots (x - \rho_v) \quad (1)$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη της (1) διά του  $\alpha_n \neq 0$  και εκτελώντας τις πράξεις στο δεύτερο μέλος (τό όποιο και διατάσσουμε κατά τις κατιούσες δυνάμεις του  $x$ ) έχουμε:

$$x^v + \frac{\alpha_{v-1}}{\alpha_v} x^{v-1} + \frac{\alpha_{v-2}}{\alpha_v} x^{v-2} + \dots + \frac{\alpha_1}{\alpha_v} x + \frac{\alpha_0}{\alpha_v} \equiv x^v - (\rho_1 + \rho_2 + \dots$$

$$+ \rho_v) x^{v-1} + (\rho_1 \rho_2 + \rho_1 \rho_3 + \dots + \rho_{v-1} \rho_v) x^{v-2} - \dots + (-1)^v \rho_1 \rho_2 \dots \rho_v.$$

Ἄν τώρα ἐξισώσουμε τοὺς συντελεστῆς τῶν ἰσοβάθμιων ὄρων, λαμβάνουμε

$$S_1 \equiv \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \cdots + \rho_{v-1} + \rho_v \quad \equiv - \frac{\alpha_{v-1}}{\alpha_v}$$

$$S_2 \equiv \rho_1 \rho_2 + \rho_1 \rho_3 + \dots + \rho_1 \rho_v + \rho_2 \rho_3 + \dots + \rho_2 \rho_v + \dots + \rho_{v-1} \rho_v = + \frac{\alpha_{v-2}}{\alpha_v}$$

$$S_3 \equiv \rho_1 \rho_2 \rho_3 + \rho_1 \rho_2 \rho_4 + \cdots + \rho_1 \rho_2 \rho_v + \cdots + \rho_{v-2} \rho_{v-1} \rho_v = - \frac{\alpha_{v-3}}{\alpha_v}$$

$$S_v \equiv \rho_1 \rho_2 \rho_3 \dots \rho_{v-1} \rho_v = (-1)^v \frac{\alpha_0}{\alpha_v}$$

Οι παραπάνω σχέσεις, οι οποίες, όπως βλέπουμε, συνδέουν τις ρίζες και τους συντελεστές του πολυωνύμου  $f(x)$  ονομάζονται **τύποι του Vieta**.

Μ' αυτούς τούς τύπους μπορούμε επίσης νά βροῦμε ἕνα πολυώνυμο, βαθμοῦ  $n$ , ὅταν γνωρίζουμε τίς ρίζες του καί τόν πρῶτο συντελεστή του  $a_n$ , καθόσον τότε ἔχουμε:

$$f(x) \equiv \alpha_v[x^v - S_1x^{v-1} + S_2x^{v-2} - \dots + (-1)^v \cdot S_v]$$

### Ειδικές περιπτώσεις:

i) 'Εξίσωση δεύτερου βαθμοῦ τῆς μορφῆς:  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ .

Σ' αὐτή τήν περίπτωση οἱ τύποι τοῦ Vieta εἶναι:

$$\rho_1 + \rho_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \rho_1 \rho_2 = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

ii) 'Εξίσωση τρίτου βαθμού της μορφής:  $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$ .

Σ' αὐτή τήν περίπτωση οἱ τύποι τοῦ Vieta εἶναι:

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad \rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3 = \frac{\gamma}{\alpha}, \quad \rho_1\rho_2\rho_3 = -\frac{\delta}{\alpha}.$$

**Εφαρμογή.** Νά βρείτε τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων καί τῶν κύβων τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως :

$$2x^3 - 3x^2 + 4x - 8 = 0. \quad (1)$$

**Λύση.** \*Αν  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1) έχουμε:

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = \frac{3}{2}, \quad \rho_1\rho_2 + \rho_2\rho_3 + \rho_3\rho_1 = 2, \quad \rho_1\rho_2\rho_3 = 4.$$

Ἐξάλλου ἰσχύει ἡ ταυτότητα:

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 = (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3)^2 - 2(\rho_1\rho_2 + \rho_2\rho_3 + \rho_3\rho_1) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot 2 = -\frac{7}{4}.$$

Ἐπειδὴ  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  εἶναι ρίζες τῆς (1) ἔχουμε:

$$\left. \begin{aligned} 2\rho_1^3 - 3\rho_1^2 + 4\rho_1 - 8 &= 0 \\ 2\rho_2^3 - 3\rho_2^2 + 4\rho_2 - 8 &= 0 \\ 2\rho_3^3 - 3\rho_3^2 + 4\rho_3 - 8 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2(\rho_1^3 + \rho_2^3 + \rho_3^3) - 3(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2) + 4(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3) - 24 = 0$$

ΟΠΟΤΕ:  $2(\rho_1^3 + \rho_2^3 + \rho_3^3) - 3 \cdot \left(-\frac{7}{4}\right) + 4 \cdot 2 - 24 = 0$

καί μετά από πράξεις βρίσκουμε:  $\rho_1^3 + \rho_2^3 + \rho_3^3 = \frac{43}{8}$ .

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΜΕ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

Όπως έχουμε αναφέρει στην πρώτη παράγραφο αυτού του κεφαλαίου τό σύνολο τῶν ἀκέραιων πολωνύμων τοῦ  $x$  μέ συντελεστές πραγματικούς ἀριθμούς τό παριστάνουμε μέ  $\mathbf{R}[x]$ .

ΣΧΗΤΙΚΑ ΜΕ ΤΟ  $\mathbf{R}[x]$  ΕΧΟΥΜΕ ΤΑ ΕΞΗΣ: ἂν  $f(x), \varphi(x) \in \mathbf{R}[x]$  τότε καὶ τὰ πολυώνυμα:  $f(x) \pm \varphi(x), f(x)\varphi(x)$  καθὼς τὸ πηλίκο καὶ τὸ ὑπόλοιπο τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως  $f(x) : \varphi(x)$  εἶναι ἐπίσης ἀκέραια πολυώνυμα μὲ συντελεστές πραγματικούς ἀοιθμούς.

Ἀποδεικνύουμε ἀμέσως παρακάτω μία χαρακτηριστική ιδιότητα πού ἔχουν τὰ ἀκέραια πολυώνυμα μέ συντελεστές πραγματικούς ἀριθμούς καί ἡ ὁποία ἀποτελεῖ γενίκευση ἀντίστοιχης ιδιότητας τοῦ τριωνύμου β' βαθμοῦ.

**§ 126.** 'Ιδιότητα VI.— Έστω τό άκέραιο πολώνυμο  $f(x)$  μέ πραγματικούς συντελεστές, δηλ.  $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ , βαθμού  $n \geq 2$ . Άν τό  $f(x)$  δέχεται ώς ρίζα τό μιγαδικό άριθμό  $\alpha + i\beta$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \wedge \beta \neq 0$ ), τότε αυτό θά δέχεται ώς ρίζα και τό συζυγή του :  $\alpha - i\beta$ .

**\*Απόδειξη.** Έστω  $\phi(x)$  τό πολυώνυμο δεύτερου βαθμοῦ, τό ὁποῖο ἔχει  
ὡς ρίζες τούς ἀριθμούς  $\alpha + i\beta$  καί  $\alpha - i\beta$ , δηλαδή:

$$\varphi(x) \equiv [x - (\alpha + i\beta)][x - (\alpha - i\beta)] \equiv x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 + \beta^2).$$

\*Αν τό  $f(x)$  διαιρεθεῖ μέ τό  $\varphi(x)$ , θά ἔχουμε τήν ταυτότητα:

$$f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi(x) + (\gamma x + \delta) \quad (1)$$



Επειδή  $f(\alpha + i\beta) = 0$  και  $\varphi(\alpha + i\beta) = 0$ , από την (1) έχουμε:

$$\gamma(\alpha + i\beta) + \delta = 0 \iff (\alpha\gamma + \delta) + i\beta\gamma = 0 \iff \begin{cases} \alpha\gamma + \delta = 0 \\ \beta\gamma = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Επειδή όμως  $\beta \neq 0$ , από τη δεύτερη σχέση της (2), έπεται  $\gamma = 0$ . Τότε από την πρώτη της (2), προκύπτει  $\delta = 0$ .

Γιά  $\gamma = \delta = 0$  ή (1) γίνεται:  $f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi(x)$  (3)

Από την (3) προκύπτει:

$$f(\alpha - i\beta) \equiv \varphi(\alpha - i\beta) \pi(\alpha - i\beta)$$

και επειδή  $\varphi(\alpha - i\beta) = 0$  θα είναι:  $f(\alpha - i\beta) = 0$ , δηλαδή τό  $f(x)$  δέχεται ως ρίζα και τό μιγαδικό άριθμό  $\alpha - i\beta$ .

**Σημ.** Προσέξτε! ή παραπάνω πρόταση (ιδιότητα VI) δέν ισχύει στην περίπτωση κατά την όποία οί συντελεστές του πολυωνύμου  $f(x)$  είναι μιγαδικοί άριθμοί.

Πιο γενικά ισχύει ή επόμενη πρόταση.

**§ 127. Ίδιότητα VII.**— "Αν ένα άκέραιο πολυώνυμο  $f(x)$  μέ πραγματικούς συντελεστές, βαθμού  $n \geq 2k$ , ( $k \in \mathbb{N}$ ) δέχεται ως πολλαπλή ρίζα τό μιγαδικό άριθμό:  $\alpha + i\beta$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \wedge \beta \neq 0$ ) μέ βαθμό πολλαπλότητας  $k$  ( $k \geq 2$ ), τότε αυτό θά δέχεται ως πολλαπλή ρίζα και τό συζυγή του:  $\alpha - i\beta$  και μάλιστα μέ τόν ίδιο βαθμό πολλαπλότητας  $k$ .

**Απόδειξη.** Επειδή τό  $f(x)$  δέχεται ως ρίζα τόν άριθμό  $\alpha + i\beta$ ,  $\beta \neq 0$  θά δέχεται, σύμφωνα μέ την προηγούμενη ιδιότητα, ως ρίζα και τό συζυγή του:  $\alpha - i\beta$ ,  $\beta \neq 0$ . Έστω ότι  $\alpha - i\beta$  είναι ρίζα του  $f(x)$  μέ βαθμό πολλαπλότητας  $\lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{N}$ . Θά αποδείξουμε ότι  $\lambda = k$ .

Πρώτα-πρώτα έχουμε τότε την ταυτότητα:

$$f(x) \equiv [x - (\alpha + i\beta)]^k \cdot [x - (\alpha - i\beta)]^\lambda \pi(x) \quad (1)$$

όπου  $\pi(x) \in \mathbb{C}[x]$  μέ  $\pi(\alpha + i\beta) \neq 0$  και  $\pi(\alpha - i\beta) \neq 0$ .

Έστω ότι  $k > \lambda$ , τότε  $k - \lambda = \mu$ ,  $\mu \in \mathbb{N}$  και συνεπώς  $k = \lambda + \mu$ .

Τότε ή (1) γίνεται:

$$f(x) \equiv [x - (\alpha + i\beta)]^{\lambda+\mu} [x - (\alpha - i\beta)]^\lambda \pi(x) \equiv [(x - \alpha)^2 + \beta^2]^\mu [x - (\alpha + i\beta)]^\lambda \pi(x)$$

Θέτουμε:  $\varphi(x) \equiv [x - (\alpha + i\beta)]^\mu \pi(x)$ . Παρατηρούμε ότι τό πολυώνυμο  $\varphi(x)$ , ως πηλίκο της διαιρέσεως  $f(x) : [(x - \alpha)^2 + \beta^2]^\mu$  δύο πολυωνύμων μέ πραγματικούς συντελεστές, έχει πραγματικούς συντελεστές και επιπλέον δέχεται ως ρίζα τόν άριθμό:  $\alpha + i\beta$ . Άρα, σύμφωνα μέ την προηγούμενη ιδιότητα, θά δέχεται ως ρίζα και τόν άριθμό:  $\alpha - i\beta$ , όπότε:  $\varphi(\alpha - i\beta) = (-2\beta i)^\mu \pi(\alpha - i\beta) = 0$ . Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί  $\beta \neq 0 \wedge \pi(\alpha - i\beta) \neq 0$ .

Δέν είναι λοιπόν δυνατό νά ισχύει  $k > \lambda$ . Μέ τόν ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι δέν μπορεί νά είναι  $k < \lambda$ . Άρα ή μοναδική περίπτωση που άπομένει είναι  $k = \lambda$ .

Άμεση συνέπεια τών παραπάνω ιδιοτήτων είναι τά επόμενα πορίσματα:

**Πόρισμα I.**— "Αν ένα άκέραιο πολυώνυμο  $f(x)$  μέ πραγματικούς συντελεστές έχει μιγαδικές ρίζες, τότε τό πλήθος τών μιγαδικών ριζών είναι άρτιος άριθμός.

**Πόρισμα II.**— Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού μέ πραγματικούς συντελεστές έχει όπωσδήποτε μία (τουλάχιστο) πραγματική ρίζα.

**Πόρισμα III.**— "Ενα πολυώνυμο άρτιου βαθμού μέ πραγματικούς συντελεστές μπορεί νά έχει καμιά ή άρτιο πλήθος ή και όλες τις ρίζες του μιγαδικές.

#### ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΜΕ ΡΗΤΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

Τό σύνολο τών άκέραιων πολυωνύμων του  $x$  μέ συντελεστές ρητούς άριθμούς τό παριστάνουμε μέ  $\mathbb{Q}[x]$ .

Σχετικά μέ τό  $\mathbb{Q}[x]$  έχουμε τά εξής: αν  $f(x), \varphi(x) \in \mathbb{Q}[x]$ , τότε και τά πολυώνυμα:  $f(x) \pm \varphi(x), f(x)\varphi(x)$  καθώς τό πηλίκο και τό υπόλοιπο της αλγοριθμικής διαιρέσεως  $f(x) : \varphi(x)$  είναι επίσης άκέραια πολυώνυμα μέ συντελεστές ρητούς άριθμούς.

Θά αποδείξουμε άμέσως παρακάτω μία χαρακτηριστική ιδιότητα που έχουν τά άκέραια πολυώνυμα μέ συντελεστές ρητούς άριθμούς, τά όποια δέχονται μία ρίζα της μορφής  $\alpha + \sqrt{\beta}$  μέ  $\alpha \in \mathbb{Q}$  και  $\sqrt{\beta} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ .

Άκριβέστερα ισχύει ή παρακάτω πρόταση:

**§ 128. Ίδιότητα VIII.**— "Αν ένα άκέραιο πολυώνυμο  $f(x)$  μέ ρητούς συντελεστές, δηλ.  $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ , δέχεται ως ρίζα τόν άριθμό  $\alpha + \sqrt{\beta}$ , ( $\alpha \in \mathbb{Q}, \beta \in \mathbb{Q}^+, \beta \neq \theta^2$ , όπου  $\theta \in \mathbb{Q}$ ), τότε αυτό θά δέχεται ως ρίζα και τόν άριθμό  $\alpha - \sqrt{\beta}$  και μάλιστα μέ τόν ίδιο βαθμό πολλαπλότητας.

**Απόδειξη.** Έστω  $\varphi(x)$  τό πολυώνυμο β' βαθμού, τό όποιο έχει γιά ρίζες του τούς άριθμούς:  $\alpha + \sqrt{\beta}$  και  $\alpha - \sqrt{\beta}$ . Αυτό είναι:

$$\varphi(x) \equiv [x - (\alpha + \sqrt{\beta})][x - (\alpha - \sqrt{\beta})] = (x - \alpha)^2 - \beta = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - \beta.$$

Αν τό  $f(x)$  διαιρεθεί μέ τό  $\varphi(x)$ , θά έχουμε την ταυτότητα:

$$f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi(x) + (\gamma x + \delta) \quad (1)$$

όπου  $\gamma, \delta \in \mathbb{Q}, \pi(x) \in \mathbb{Q}[x]$ , γιατί  $f(x), \varphi(x) \in \mathbb{Q}[x]$ .

Επειδή  $f(\alpha + \sqrt{\beta}) = 0$  και  $\varphi(\alpha + \sqrt{\beta}) = 0$ , από την (1) θά έχουμε:

$$\gamma(\alpha + \sqrt{\beta}) + \delta = 0 \iff (\alpha\gamma + \delta) + \gamma\sqrt{\beta} = 0.$$

Είναι όμως  $\alpha\gamma + \delta \in \mathbb{Q}$  και  $\gamma \in \mathbb{Q}$  και  $\beta \neq 0$ .

Άρα  $\gamma = 0$  και συνεπώς και  $\delta = 0$ .

Η (1) τότε γίνεται:  $f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi(x)$  (2)

Από τη (2) προκύπτει:  $f(\alpha - \sqrt{\beta}) = \varphi(\alpha - \sqrt{\beta}) \cdot \pi(\alpha - \sqrt{\beta}) = 0$ , επειδή  $\varphi(\alpha - \sqrt{\beta}) = 0$ .

Άρα τό  $f(x)$  δέχεται ως ρίζα και τόν άριθμό:  $\alpha - \sqrt{\beta}$ .

Η άπόδειξη του δεύτερου μέρους της ιδιότητας αυτής, τό όποιο αναφέρεται στό βαθμό πολλαπλότητας της ρίζας, είναι τελείως άνάλογη μέ αυτή που δώσαμε κατά την άπόδειξη της ιδιότητας VII (§ 127).

Μέ τόν ίδιο άκριβώς τρόπο αποδεικνύεται και ή επόμενη πιο γενική:

**Πρόταση.**— "Αν ένα άκέραιο πολυώνυμο  $f(x)$  μέ ρητούς συντελεστές δέχεται ως ρίζα τόν άρρητο άριθμό:  $\alpha + \beta\sqrt{\gamma}$ , όπου  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}, \sqrt{\gamma} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$  και  $\beta \neq 0$ , τότε αυτό δέχεται ως ρίζα και τόν άριθμό:  $\alpha - \beta\sqrt{\gamma}$  και μάλιστα μέ τόν ίδιο βαθμό πολλαπλότητας.



Τό σύνολο τῶν ἀκέραιων πολυωνύμων τοῦ  $x$  μέ συντελεστές ἀκέραιους ἀριθμούς τό παριστάνουμε μέ  $\mathbb{Z}[x]$ .

Βασική ιδιότητα τοῦ  $\mathbb{Z}[x]$  εἶναι ὅτι: τό ἄθροισμα, ἡ διαφορά καί τό γινόμενο δύο ἀκέραιων πολυωνύμων τοῦ  $\mathbb{Z}[x]$  εἶναι ἐπίσης πολυώνυμο μέ συντελεστές ἀκέραιους ἀριθμούς. Ἄν ἐπιπλέον ὁ πρῶτος συντελεστής τοῦ  $\varphi(x)$  εἶναι ἴσος μέ  $\pm 1$ , τότε τό πηλίκο καθὼς καί τό ὑπόλοιπο τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως  $f(x) : \varphi(x)$  εἶναι πολυώνυμο ἐπίσης μέ ἀκέραιους συντελεστές (βλ. παρατηρήσεις τῆς § 116).

Ἀποδεικνύουμε ἀμέσως παρακάτω δύο χαρακτηριστικές ιδιότητες οἱ ὁποῖες μᾶς δίνουν τίς ἀναγκαῖες συνθήκες γιά νά δέχεται ἕνα πολυώνυμο μέ ἀκέραιους συντελεστές ρίζα ἀκέραιο ἀριθμό ἀντίστοιχα ρίζα ρητό ἀριθμό.

**§ 129. Ἰδιότητα IX.**— Ἄν τό μέ ἀκέραιους συντελεστές πολυώνυμο:

$$f(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

δέχεται ὡς ρίζα τόν ἀκέραιο ἀριθμό  $\rho \neq 0$ , τότε ὁ  $\rho$  θά εἶναι διαιρέτης τοῦ σταθεροῦ ὅρου  $a_0$  τοῦ πολυωνύμου, δηλαδή  $\rho/a_0$ .

**Ἀπόδειξη.** Ἐχουμε  $f(\rho) = a_n \rho^n + a_{n-1} \rho^{n-1} + \dots + a_1 \rho + a_0 = 0$ , ὁπότε:

$$\rho(a_n \rho^{n-1} + a_{n-1} \rho^{n-2} + \dots + a_1) = -a_0 \quad (1)$$

Ἀλλά:  $a_n \rho^{n-1} + a_{n-1} \rho^{n-2} + \dots + a_1$  εἶναι ἕνας ἀκέραιος ἀριθμός, ἐπειδή  $\rho, a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 \in \mathbb{Z}$ , τόν ὁποῖο ἄς τόν ὀνομάσουμε  $\lambda$ , τότε ἡ (1) γράφεται:

$$\rho \cdot \lambda = -a_0 \quad (2)$$

Ἀπό τή (2) λαμβάνουμε:  $\rho/a_0$ .

**Παρατηρήσεις.** α) Οἱ ἀκέραιες ρίζες ἑνός πολυωνύμου  $f(x)$ , ἐφόσον ὑπάρχουν, πρέπει νά ἀναζητηθοῦν ἀνάμεσα στοὺς διαιρέτες τοῦ σταθεροῦ ὅρου  $a_0$ .

β) Τό ἀντίστροφο τῆς παραπάνω προτάσεως δέν ἰσχύει πάντοτε.

γ) Ἄν κανένας ἀπό τοὺς διαιρέτες τοῦ σταθεροῦ ὅρου  $a_0$  τοῦ πολυωνύμου  $f(x)$  δέ μηδενίζει τό  $f(x)$ , τότε τό πολυώνυμο αὐτό δέν ἔχει ἀκέραιες ρίζες.

**§ 130. Ἰδιότητα X.**— Ἄν τό μέ ἀκέραιους συντελεστές πολυώνυμο:

$$f(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

δέχεται ὡς ρίζα τό ρητό ἀριθμό  $\frac{k}{\lambda}$ , ὅπου  $k, \lambda$  ἀκέραιοι, πρῶτοι μεταξύ τους καί  $\lambda \neq 0$ , τότε ὁ  $k$  θά εἶναι διαιρέτης τοῦ σταθεροῦ ὅρου καί ὁ  $\lambda$  διαιρέτης τοῦ πρώτου συντελεστή τοῦ πολυωνύμου, δηλ.  $k/a_0 \wedge \lambda/a_n$ .

**Ἀπόδειξη.** Ἐπειδή  $f\left(\frac{k}{\lambda}\right) = 0$  ἔχουμε:

$$a_n \frac{k^n}{\lambda^n} + a_{n-1} \frac{k^{n-1}}{\lambda^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{k}{\lambda} + a_0 = 0 \quad \text{καί συνεπῶς}$$

$$a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} \lambda + \dots + a_1 k \lambda^{n-1} + a_0 \lambda^n = 0 \quad (1)$$

Ἀπό τήν τελευταία ἐξίσωση λαμβάνουμε:

$$a_n k^n = -\lambda(a_{n-1} k^{n-1} + \dots + a_1 k \lambda^{n-2} + a_0 \lambda^{n-1}) = \text{πολ.} \lambda \quad (2)$$

$$a_0 \lambda^n = -k(a_{n-1} k^{n-1} + a_{n-1} k^{n-2} \lambda + \dots + a_1 \lambda^{n-1}) = \text{πολ.} k \quad (3)$$

Ἀπό τή (2) ἔχουμε ὅτι:  $\lambda/a_n k^n$  καί ἐπειδή ὁ  $\lambda$  εἶναι πρῶτος μέ τόν  $k$ , ἄρα καί μέ τόν  $k^n$ , θά ἔχουμε ὅτι:  $\lambda/a_n$ .

Ὁμοίως ἀπό τήν (3) ἔχουμε:  $k/a_0 \lambda^n$  καί ἐπειδή ὁ  $k$  εἶναι πρῶτος μέ τό  $\lambda$ , ἄρα καί μέ τό  $\lambda^n$ , θά ἔχουμε:  $k/a_0$ .

**Παρατήρηση.** Τό ἀντίστροφο τῆς παραπάνω ιδιότητας δέν ἰσχύει πάντοτε.

**§ 131. Ἐφαρμογές στίς ιδιότητες τῶν ἀκέραιων πολυωνύμων.**—

**Ἐφαρμογή 1η:** Νά προσδιορίσετε τοὺς πραγματικούς ἀριθμούς  $\alpha, \beta$  γιά νά διαιρεῖται τό πολυώνυμο  $f(x) \equiv x^3 - 2\alpha x^2 + \beta x + 6$  διὰ τοῦ γινομένου  $(x-2)(x-3)$ .

**Λύση.** Ἐπειδή θέλουμε τό πολυώνυμο  $f(x) \equiv x^3 - 2\alpha x^2 + \beta x + 6$  νά διαιρεῖται (ἀκριβῶς) διὰ τοῦ γινομένου  $(x-2)(x-3)$ , ἀρκεῖ νά διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ  $x-2$  καί διὰ  $x-3$ . Γι' αὐτό πρέπει καί ἀρκεῖ:

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= -8\alpha + 2\beta + 14 = 0 \\ f(3) &= -18\alpha + 3\beta + 33 = 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} 4\alpha - \beta &= 7 \\ 6\alpha - \beta &= 11 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} \alpha &= 2 \\ \beta &= 1. \end{aligned}$$

**Σημείωση.** Τοὺς πραγματικούς ἀριθμούς  $\alpha$  καί  $\beta$  τῆς παραπάνω ἐφαρμογῆς μποροῦμε νά τοὺς προσδιορίσουμε καί μέ ἄλλους τρόπους. Νά ἐφαρμόσετε ἕνα ἀπό αὐτοὺς, γιά νά βρεῖτε τὰ  $\alpha$  καί  $\beta$ .

**Ἐφαρμογή 2η:** Ἐστω ὅτι  $f(x)$  εἶναι ἀκέραιο πολυώνυμο πού ὅταν διαιρεῖται διὰ  $x+1$  δίνει ὑπόλοιπο 2, ὅταν διαιρεῖται διὰ  $x-2$  δίνει ὑπόλοιπο 11 καί διὰ  $x+3$  δίνει ὑπόλοιπο 6. Νά βρεῖτε τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ  $f(x)$  διὰ τοῦ γινομένου:

$$(x+1)(x-2)(x+3)$$

**Λύση.** Ἀπό τήν ὑπόθεση ἔχουμε:

$$f(-1) = 2, \quad f(2) = 11, \quad f(-3) = 6 \quad (1)$$

Τό πολυώνυμο  $f(x)$  ὅταν διαιρεῖται διὰ τοῦ γινομένου:  $(x+1)(x-2)(x+3)$ , τό ὁποῖο εἶναι τρίτου βαθμοῦ, δίνει ἕνα πηλίκο  $\pi(x)$  καί ἕνα ὑπόλοιπο τό πολὺ δεύτερου βαθμοῦ, ἔστω τό:  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ .

Σύμφωνα μέ τήν ταυτότητα τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως θά ἔχουμε:

$$f(x) \equiv (x+1)(x-2)(x+3) \cdot \pi(x) + \alpha x^2 + \beta x + \gamma \quad (2)$$

Θέτοντας στή (2) διαδοχικά  $x = -1, x = 2, x = -3$  καί ἔχοντας ὑπόψη τίς (1), λαμβάνουμε τό σύστημα:

$$\Sigma: \quad \begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 2 \\ 4\alpha + 2\beta + \gamma = 11 \\ 9\alpha - 3\beta + \gamma = 6 \end{cases}$$

Λύνοντας τό σύστημα ( $\Sigma$ ) βρίσκουμε:  $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3$ .

Ἄρα τό ὑπόλοιπο πού ζητᾶμε εἶναι τό:  $x^2 + 2x + 3$ .

**Ἐφαρμογή 3η:** Νά βρεῖτε ἕνα πολυώνυμο τρίτου βαθμοῦ μέ πραγματικούς συντελεστές τοῦ ὁποῖου δύο ρίζες εἶναι οἱ ἀριθμοὶ  $\rho_1 = 5$  καί  $\rho_2 = i$ .

**Λύση.** Ἐστω  $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta, \alpha \neq 0$  τό μέ πραγματικούς συντελεστές πολυώνυμο τρίτου βαθμοῦ πού ζητᾶμε νά προσδιορίσουμε.

Προφανῶς ἡ τρίτη ρίζα τοῦ πολυωνύμου εἶναι:  $\rho_3 = -i$  (γιατί;).

Τότε, σύμφωνα μέ τίς σχέσεις τοῦ Vieta, θά ἔχουμε:



$$\left. \begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 &= -\frac{\beta}{\alpha} & \text{δηλ.} & 5 = -\frac{\beta}{\alpha} \\ p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3 &= \frac{\gamma}{\alpha} & \text{δηλ.} & 1 = \frac{\gamma}{\alpha} \\ p_1 p_2 p_3 &= -\frac{\delta}{\alpha} & \text{δηλ.} & 5 = -\frac{\delta}{\alpha} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \beta &= -5\alpha \\ \gamma &= \alpha \\ \delta &= -5\alpha \end{aligned}$$

"Αρα το πολυώνυμο πού ζητάμε είναι:

$$f(x) \equiv \alpha(x^3 - 5x^2 + x - 5), \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0.$$

**Εφαρμογή 4η:** Νά βρείτε ένα πολυώνυμο τέταρτου βαθμού με ακέραιους συντελεστές, το οποίο νά διαιρείται με τό:  $x^2 - (\sqrt{2} + i)x + i\sqrt{2}$ .

**Λύση.** Παρατηρούμε ότι:  $x^2 - (\sqrt{2} + i)x + i\sqrt{2} \equiv (x - \sqrt{2})(x - i)$ .

"Αν  $f(x)$  είναι το πολυώνυμο πού ζητάμε, τότε, επειδή αυτό διαιρείται με τό  $x - \sqrt{2}$ , σύμφωνα με την ιδιότητα VIII (§ 128) θά διαιρείται και με τό  $x + \sqrt{2}$ . Επίσης, επειδή τό  $f(x)$  διαιρείται με τό  $x - i$ , σύμφωνα με την ιδιότητα VI (§ 126), θά διαιρείται και με τό  $x + i$ . Τό πολυώνυμο  $f(x)$  θά διαιρείται τότε, σύμφωνα με την ιδιότητα I (§ 119) και με τό γινόμενο τους. Συνεπώς θά έχουμε:

$$f(x) \equiv (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - i)(x + i) \equiv (x^2 - 2)(x^2 + 1) \equiv x^4 - x^2 - 2.$$

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Ομάδα Α'. 259.** Δίνεται τό πολυώνυμο:

$$f(x) \equiv 2x^3 + \alpha x^2 - 13x + \beta$$

α) Νά προσδιορίσετε τούς συντελεστές  $\alpha, \beta$  αν ξέρουμε ότι τό  $f(x)$  διαιρείται (άκριβώς) με τό:  $(x - 3)(x + 2)$ .

β) "Αν  $\pi(x)$  είναι τό πηλίκο τής διαιρέσεως  $f(x) : (x - 3)(x + 2)$ , με τιμές τών  $\alpha$  και  $\beta$  αυτές πού βρήκατε προηγουμένως, νά αποδείξετε ότι:

$$(\tau): \pi(1) + \pi(2) + \dots + \pi(v) \equiv v(v + 2).$$

γ) "Αφού προσδιορίσετε τούς συντελεστές και τό πολυώνυμο  $\pi(x)$ , νά αποδείξετε, με τή μέθοδο τής τέλειας επαγωγής, τήν ταυτότητα  $(\tau)$ .

**260.** Γιά ποιές τιμές τών  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  τό πολυώνυμο  $f(x) \equiv 3x^4 - \alpha x^3 + 5x^2 - 9x + \beta$  διαιρείται: (i) με τό  $x^2 - 1$ , (ii) με τό  $x^2 + 1$ .

"Αν  $P(x)$  είναι τό πηλίκο τής διαιρέσεως  $f(x) : x^2 - 1$  και  $P(x)$  είναι τό πηλίκο τής διαιρέσεως  $f(x) : x^2 + 1$  (με τίς παραπάνω τιμές τών  $\alpha$  και  $\beta$ ), τότε νά υπολογίσετε τά άθροίσματα:

$$1) \Sigma_1 = P(1) + P(2) + \dots + P(v) \quad \text{και} \quad 2) \Sigma_2 = P(1) + P(2) + \dots + P(v).$$

**Υπόδειξη.** Ισχύει  $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$ .

**261.** Νά αποδείξετε ότι τό πολυώνυμο  $f(x) \equiv (x + 1)^{2v} - x^{2v} - 2x - 1$ ,  $v \in \mathbb{N}$ , είναι διαιρέτο διά του πολωνύμου:  $2x^3 + 3x^2 + x$ .

**262.** "Αν γιά τρεις διαφορετικές τιμές του  $x$  τά πολυώνυμα:

$$f(x) \equiv (\alpha - 2)x^2 + (2\beta - 1)x + \gamma, \quad \varphi(x) \equiv x^2 + 5x + \alpha + 1$$

έχουν ίσες αριθμητικές τιμές, νά προσδιορίσετε τούς αριθμούς  $\alpha, \beta, \gamma$ .

**263.** "Αν οί συντελεστές του  $f(x) \equiv \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$  είναι πραγματικοί αριθμοί και ισχύει  $x - i/f(x)$ , τότε νά αποδείξετε ότι θά ισχύει και:  $x^2 + 1/f(x)$ . Στή συνέχεια νά βρείτε τό πολυώνυμο  $f(x)$  αν επιπλέον ξέρουμε ότι:  $f(0) = 1$  και  $f(1) = 10$ .

**264.** "Αν  $-4$  και  $-164$  είναι τά υπόλοιπα τών διαιρέσεων  $f(x) : (x + 1)$  και  $f(x) : (x - 3)$

αντιστοίχως, τότε νά βρείτε τό υπόλοιπο τής διαιρέσεως  $f(x) : (x^2 - 2x - 3)$ . "Αν τώρα τό πολυώνυμο  $f(x)$  είναι τέταρτου βαθμού και έχει ως ρίζες τούς αριθμούς:  $0, 2, -2$ , νά βρείτε τήν άλλη ρίζα του πολωνύμου.

**265.** Νά βρείτε τή σχέση πού συνδέει τούς αριθμούς  $\alpha, \beta, \gamma$  αν ξέρουμε ότι οί ρίζες τής εξίσωσης:  $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$  είναι διαδοχικοί όροι σέ μία αριθμητική πρόοδο. Κατόπιν με τή βοήθεια τής σχέσεως πού βρήκατε νά προσδιορίσετε τήν παράμετρο  $\lambda$ , ώστε οί ρίζες του πολωνύμου  $f(x) \equiv x^4 - (2\lambda + 1)x^2 + \lambda^2$  νά είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

**266.** Δίνεται ή εξίσωση:  $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ . Νά βρείτε σχέση μεταξύ τών συντελεστών  $\alpha, \beta, \gamma$  έτσι, ώστε οί ρίζες τής παραπάνω εξίσώσεως νά είναι διαδοχικοί όροι:

(i) "Αριθμητικής προόδου, (ii) Γεωμετρικής προόδου, (iii) "Αρμονικής προόδου.

Στή συνέχεια νά προσδιορίσετε τό συντελεστή  $k$  έτσι, ώστε οί ρίζες τής εξίσωσης:  $x^3 - 8x^2 - 6x - k = 0$  νά είναι διαδοχικοί όροι μιās αριθμητικής (άντ. γεωμετρικής) προόδου. "Υστερα νά βρείτε τίς ρίζες τής εξίσώσεως:  $x^2 - 8x^2 - 6x - k = 0$  με τίς παραπάνω τιμές του  $k$ .

**267.** "Αν οί ρίζες  $p_1, p_2, p_3$  τής εξίσώσεως:  $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ,  $\alpha \neq 0$ , είναι πραγματικές και ικανοποιούν τή σχέση:  $p_1^3 + p_2^3 + p_3^3 = -3\gamma$ , νά αποδείξετε ότι τό πολυώνυμο  $f(x) \equiv x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  έχει πολλαπλή ρίζα και μάλιστα τριπλή.

**268.** "Αν οί ρίζες  $p_1, p_2, p_3$  του πολωνύμου  $f(x) \equiv x^3 + 3\alpha x^2 + 3\beta x + \gamma$  είναι διαδοχικοί όροι άρμονικής προόδου, νά αποδείξετε ότι:  $2\beta^3 - 3\alpha\beta\gamma + \gamma^2 = 0$ .

**269.** Δίνεται πολυώνυμο  $f(x)$  με ακέραιους συντελεστές τέτοιο, ώστε:

$$f(1) = 1 \wedge f(x) \equiv f(1 - x).$$

Νά αποδείξετε ότι υπάρχει πολυώνυμο  $\varphi(x)$  με ακέραιους επίσης συντελεστές και τέτοιο, ώστε νά ισχύει:  $f(x) \equiv x(x - 1)\varphi(x) + 1$ .

**270.** Νά αποδείξετε ότι: αν ένα πολυώνυμο  $f(x)$ ,  $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ , έχει μία από τίς παρακάτω ιδιότητες:

$$f(x) \equiv f(x + 1) \quad \eta \quad f(x) \equiv f(2x)$$

τότε τό  $f(x)$  είναι ένα σταθερό πολυώνυμο.

**Υπόδειξη.** "Αφού αποδείξετε ότι ισχύει:  $f(v) = f(0)$ , άντ.  $f(2^v) = f(1)$ ,  $\forall v \in \mathbb{N}$  νά πάρετε τά πολυώνυμα:  $f(x) - f(0)$ , άντ.  $f(x) - f(1)$  και νά αποδείξετε ότι τό καθένα από αυτά είναι τό μηδενικό πολυώνυμο (βλ. § 124).

**Ομάδα Β'. 271.** "Ενα άκέραιο πολυώνυμο  $f(x)$  όταν διαιρείται με τό  $x^2 + x + 1$  δίνει υπόλοιπο  $x - 1$  και όταν διαιρείται με τό  $x^2 - x + 1$  δίνει υπόλοιπο  $2x + 1$ . Νά βρείτε τό υπόλοιπο τής διαιρέσεως  $f(x) : x^4 + x^2 + 1$ .

**Υπόδειξη.** "Αφού διαπιστώσετε ότι ισχύει:  $x^4 + x^2 + 1 \equiv (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$  νά λάβετε στή συνέχεια υπόψη και τό πόρισμα τής § 117.

**272.** Νά προσδιορίσετε τούς πραγματικούς αριθμούς  $\alpha, \beta$  έτσι, ώστε τό πολυώνυμο:  $f(x) \equiv x^4 + (\alpha - \beta)x^3 + 2\alpha x^2 - 5x + 4$  νά διαιρείται με τή μεγαλύτερη δυνατή δύναμη του  $(x - 1)$ . Ποιός είναι τότε ό εκθέτης του  $(x - 1)$ ;

**273.** Νά αποδείξετε ότι γιά κάθε ρίζα  $\rho$  του πολωνύμου  $f(x) \equiv \alpha x^{v-1} + x^{v-2} + \dots + x + 1$ , βαθμού  $(v - 1)$ , ισχύει:  $|\rho| < 1 + \frac{1}{|\alpha|}$ .

**274.** "Αν τά πολυώνυμα  $f(x) \equiv x^3 + \alpha x - \beta$  και  $\varphi(x) \equiv \beta x^3 - \alpha x - 1$  με  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$  έχουν κοινή μία πραγματική ρίζα, νά αποδείξετε ότι ισχύουν οί σχέσεις:

$$(i) \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 = -2\alpha, \quad (ii) |\rho_1| + |\rho_2| + |\rho_3| > \frac{3}{2},$$

όπου  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  είναι οί ρίζες του  $f(x)$ .



275. "Αν όλες οι ρίζες του πολυωνύμου  $f(x) \equiv x^3 - x^2 + 9kx - k$  είναι θετικές να προσδιορίσετε τους συντελεστές και τις ρίζες του πολυωνύμου  $f(x)$ .

276. Νά αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαιρέσεως του άκεραιου πολυωνύμου  $f(x)$  διά του  $x^2 - 2px + p^2$  είναι τό:  $\pi(p)x + f(p) - p\pi(p)$ , όπου  $\pi(x)$  είναι τό πηλίκο της διαιρέσεως  $[f(x) - f(p)]:(x - p)$ .

277. "Αν τό μέ πραγματικούς συντελεστές πολυώνυμο  $f(x) \equiv x^3 + ax^2 + bx + \gamma$  έχει ως διπλή ρίζα τόν αριθμό  $p$  και είναι  $p \leq 0$  ή  $p \geq 1 + \sqrt{2}$ , νά αποδείξετε ότι ισχύει:  

$$|a| + |b| + |\gamma| \geq p^2 + 2p.$$

278. Μέ τή βοήθεια της θεωρίας τών άκεραιων πολυωνύμων, νά επιλύσετε τό σύστημα:  

$$\{x + y + z = 2 \wedge x^2 + y^2 + z^2 = 8 \wedge x^3 + y^3 + z^3 = 17\}.$$

'Υπόδειξη. "Αφού βρείτε μέ τί ισοῦται τό  $xyz$ , νά θεωρήσετε τά  $x, y, z$  ως ρίζες μιᾶς τριτοβάθμιας εξισώσεως τήν οποία και θά επιλύσετε.

279. Δίνεται μία πολυωνυμική συνάρτηση  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  τέτοια, ὥστε γιά κάθε  $x \in \mathbf{R}$  και κάθε φυσικό αριθμό  $k$  ισχύει:

$$f(kx) = f(x)$$

Νά αποδείξετε ότι γιά κάθε φυσικό αριθμό  $n$  ισχύει:  $f(k^n) = f(1)$  και από αυτό νά συμπεράνετε ότι ή  $f$  είναι σταθερή.

280. Νά αποδείξετε ότι: αν ένα πολυώνυμο  $f(x), f(x) \in \mathbf{C}[x]$ , έχει μία από τις παρακάτω ιδιότητες:

$$(i) f(x) \equiv f(x + \omega), \text{ όπου } \omega \neq 0, \quad (ii) f(x + 1) \equiv f(x - 1),$$

τότε τό  $f(x)$  είναι ένα σταθερό πολυώνυμο.

281. Δίνεται μία πολυωνυμική συνάρτηση:  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  τέτοια, ὥστε γιά κάθε πραγματικό αριθμό  $x$  νά ισχύει:  $f(2x) = f(x)$ .

Νά αποδείξετε ότι γιά κάθε πραγματικό αριθμό  $x$  και κάθε φυσικό αριθμό  $n$  ισχύει:  
 $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$ . "Από αυτό νά συμπεράνετε ότι ή  $f$  είναι σταθερή.

282. Δίνεται τό πολυώνυμο  $f(x) \equiv x^3 - x^2 - 4x - 4$ . Νά καθορίσετε τό είδος τών ριζών του. Στή συνέχεια νά αποδείξετε ότι κάθε πραγματική ρίζα του  $f(x)$  βρίσκεται στό (άνοιχτό) διάστημα:  $(2, 3)$ .

283. Νά αποδείξετε ότι: αν τό πολυώνυμο  $f(x) \equiv x^3 - \alpha^2x + \alpha^2\beta$ , όπου  $\alpha, \beta$  πραγματικοί αριθμοί μέ  $\beta < 0$ , έχει τρεις πραγματικές και διακεκριμένες ρίζες, τότε θά ισχύει:

$$|\alpha| + \frac{3\sqrt{3}}{2}\beta > 0.$$

284. "Αν ένα πολυώνυμο  $f(x)$  έχει άκεραίους συντελεστές και οι αριθμοί  $f(0), f(1)$  είναι περιττοί, νά αποδείξετε ότι τό  $f(x)$  δέν έχει άκεραιή ρίζα.

285. Δίνεται τό πολυώνυμο  $f(x) \equiv x^n + 2ax + 2$ , όπου  $a \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ . Νά αποδείξετε ότι τό  $f(x)$  δέ δέχεται ρητό αριθμό ως ρίζα του.

'Υπόδειξη. "Εστω ότι ό ρητός αριθμός  $\frac{k}{\lambda}$ , όπου  $k, \lambda \in \mathbf{Z}, \lambda \neq 0$  και  $(k, \lambda) = 1$ , είναι ρίζα του  $f(x)$ , τότε (§ 130)  $k/2$ , όποτε  $k = \pm 1, \pm 2$  και  $\lambda/1$ , όποτε  $\lambda = \pm 1$ . Στή συνέχεια νά διακρίνετε περιπτώσεις.

## II. ΑΝΑΛΥΣΗ ΡΗΤΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΑΠΛΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

§ 132. 'Ορισμός.—Ρητό κλάσμα ως προς  $x$  ονομάζουμε τό πηλίκο δύο άκέραιων πολυωνύμων του  $x$ , δηλαδή κάθε παράσταση της μορφής:

$$k(x) \equiv \frac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \frac{\alpha_\mu x^\mu + \alpha_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_\nu x^\nu + \beta_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0}, \quad (1)$$

όπου  $\alpha_i, \beta_j, \begin{matrix} i=0, 1, \dots, \mu, \\ j=0, 1, \dots, \nu, \end{matrix}$  πραγματικοί αριθμοί,  $\mu$  και  $\nu$  άκεραίοι θετικοί\* και  $\alpha_\mu \neq 0, \beta_\nu \neq 0$ .

Στηριζόμενοι στή θεωρία τών άκεραιων πολυωνύμων μπορούμε νά αναλύσουμε τό ρητό κλάσμα (1) σέ άθροισμα άλλων απλών κλασμάτων.

Γιά νά μπορούμε όμως νά κάνουμε αυτή τήν ανάλυση, πρέπει ό αριθμητής της (1), δηλαδή τό πολυώνυμο  $f(x)$ , νά έχει βαθμό μικρότερο από τό βαθμό του παρονομαστή. Διαφορετικά, δηλαδή αν  $\mu \geq \nu$ , κάνουμε τή διαίρεση  $f(x): \varphi(x)$  και, αν είναι  $\pi(x)$  τό πηλίκο και  $u(x)$  τό υπόλοιπο, θά έχουμε:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \pi(x) + \frac{u(x)}{\varphi(x)} \quad (2)$$

όπου ό βαθμός του  $u(x)$  είναι μικρότερος από τό βαθμό του  $\varphi(x)$ .

"Από τή σχέση (2) φαίνεται ότι ή ανάλυση του κλάσματος  $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$  ανάγεται στήν ανάλυση του κλάσματος  $\frac{u(x)}{\varphi(x)}$ , του οποίου ό βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος από τό βαθμό του παρονομαστή.

§ 133. 'Ανάλυση του κλάσματος  $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$  σέ άθροισμα απλών κλασμάτων, όπου ό βαθμός του  $f(x)$  είναι μικρότερος από τό βαθμό του  $\varphi(x)$ .—

Διακρίνουμε τις έπόμενες τέσσερις περιπτώσεις:

**Περίπτωση I.** "Αν τό  $\varphi(x)$  έχει μόνο άπλές πραγματικές ρίζες  $p_1, p_2, \dots, p_\nu$ , δηλαδή αν είναι της μορφής:  $\varphi(x) \equiv (x - p_1)(x - p_2) \dots (x - p_\nu)$  \*\*, τότε μπορούμε νά προσδιορίσουμε  $\nu$  πραγματικούς αριθμούς  $A_1, A_2, \dots, A_\nu$ , τέτοιους ὥστε νά άληθεύει ή ταυτότητα:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \frac{f(x)}{(x - p_1)(x - p_2) \dots (x - p_\nu)} \equiv \frac{A_1}{x - p_1} + \frac{A_2}{x - p_2} + \dots + \frac{A_\nu}{x - p_\nu} \quad (3)$$

\* "Αν  $\mu = \nu = 0$  τό  $k(x)$  γίνεται  $\frac{\alpha_0}{\beta_0}$ , δηλαδή είναι μία σταθερά, ενώ αν  $\nu = 0, \mu \geq 1$  τό  $k(x)$  γίνεται ένα (άκεραιο) πολυώνυμο του  $x$ .

\*\* Δεχόμαστε, γιά εύκολία μας και χωρίς αυτό νά περιορίζει τή γενικότητα, ότι ό συντελεστής  $\beta_\nu$  του  $\varphi(x)$  είναι ίσος μέ τή μονάδα. "Αν ό συντελεστής του  $x^\nu$  δέν είναι ή μονάδα, τότε μπορούμε νά διαιρέσουμε μέ τό  $\beta_\nu$  ( $\beta_\nu \neq 0$ ) τούς όρους του κλάσματος, χωρίς τό κλάσμα νά μεταβληθεί, όποτε ό συντελεστής του  $x^\nu$  γίνεται ίσος μέ τή μονάδα.



από την οποία, αν κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών, έχουμε:

$$f(x) \equiv A_1(x-r_2)(x-r_3)\cdots(x-r_n) + \cdots + A_n(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_{n-1}) \quad (4)$$

\*Αν τώρα θέσουμε \* στην (4)  $x = r_1, r_2, \dots, r_n$  παίρνουμε αντίστοιχως:

$$f(r_1) = A_1(r_1-r_2)(r_1-r_3)\cdots(r_1-r_n) \Rightarrow A_1 = \frac{f(r_1)}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)\cdots(r_1-r_n)}$$

.....

$$f(r_n) = A_n(r_n-r_1)(r_n-r_2)\cdots(r_n-r_{n-1}) \Rightarrow A_n = \frac{f(r_n)}{(r_n-r_1)(r_n-r_2)\cdots(r_n-r_{n-1})}$$

**Παρατήρηση.** Τα  $A_1, A_2, \dots, A_n$  προσδιορίζονται και από την ταυτότητα (4), αρκεί να εκτελεστούν οι πράξεις στο δεύτερο μέλος της, να εξισωθούν οι συντελεστές των όμοιο-  
βάθμιων όρων των δύο μελών της και, τέλος, να λυθεί το σύστημα που θα προκύψει.

**Εφαρμογή.** Νά αναλυθεί το κλάσμα:  $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$  σε άθροισμα  
άπλων κλασμάτων.

Λύση. Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε:

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} \equiv \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x-3} \quad (1)$$

Από την (1) παίρνουμε:

$$x^2+x+1 \equiv A_1(x-2)(x-3) + A_2(x-1)(x-3) + A_3(x-1)(x-2) \quad (2)$$

Η ταυτότητα (2) για  $x = 1, 2, 3$  δίνει αντίστοιχως:  $A_1 = \frac{3}{2}, A_2 = -7, A_3 = \frac{13}{2}$ .

Όπότε:  $\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} \equiv \frac{3}{2(x-1)} - \frac{7}{(x-2)} + \frac{13}{2(x-3)}$ .

**Περίπτωση II.**—Αν το  $\varphi(x)$  έχει απλές και πολλαπλές πραγματικές ρίζες, δηλαδή αν είναι, π.χ., της μορφής:

$$\varphi(x) \equiv (x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)^k \cdots (x-r_\mu)^\lambda, \text{ με } 1+1+k+\cdots+\lambda = n,$$

τότε το κλάσμα  $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$  μπορεί να γραφεί κατά ένα μοναδικό τρόπο με τη μορφή:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \frac{A_1}{x-r_1} + \frac{A_2}{x-r_2} + \frac{B_1}{x-r_3} + \frac{B_2}{(x-r_3)^2} + \cdots + \frac{B_k}{(x-r_3)^k} + \cdots + \frac{M_1}{x-r_\mu} + \frac{M_2}{(x-r_\mu)^2} + \cdots + \frac{M_\lambda}{(x-r_\mu)^\lambda},$$

όπου  $A_1, A_2, B_1, B_2, \dots, B_k, \dots, M_1, M_2, \dots, M_\lambda$  πραγματικοί αριθμοί που προσδιορίζονται εύκολα.

\* Αυτή η σχέση βρέθηκε με την υπόθεση ότι  $x \neq r_1, r_2, \dots, r_n$ . Άρα το πολυώνυμο της διαφοράς των δύο μελών της (4) μηδενίζεται για όλες τις άλλες τιμές του  $x$ . Επομένως έχει άπειρες ρίζες, δηλαδή περισσότερες από το βαθμό του. Άρα πρόκειται για το μηδενικό πολυώνυμο. Συνεπώς μηδενίζεται και για  $x = r_1, r_2, \dots, r_n$ , που σημαίνει ότι η (4) αληθεύει και για  $x = r_1, r_2, \dots, r_n$ .

**Παραδείγματα: 1ο:** Νά αναλυθεί το κλάσμα  $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \frac{x^2+4x+7}{(x+2)(x+3)^2}$  σε άθροισμα  
άπλων κλασμάτων.

Λύση. Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε:

$$\frac{x^2+4x+7}{(x+2)(x+3)^2} \equiv \frac{A}{x+2} + \frac{B_1}{x+3} + \frac{B_2}{(x+3)^2} \quad (1)$$

Μετά την απαλοιφή των παρονομαστών έχουμε:

$$x^2+4x+7 \equiv A(x+3)^2 + B_1(x+2)(x+3) + B_2(x+2) \quad (2)$$

και μετά τις πράξεις:

$$x^2+4x+7 \equiv (A+B_1)x^2 + (6A+5B_1+B_2)x + (9A+6B_1+2B_2) \quad (3)$$

Εξισώνουμε τους συντελεστές των όμοιοβάθμιων όρων των δύο μελών της (3) και έχουμε το σύστημα:

$$A+B_1=1, \quad 6A+5B_1+B_2=4, \quad 9A+6B_1+2B_2=7.$$

\*Αν λύσουμε το σύστημα, έχουμε:

$$A=3, \quad B_1=-2, \quad B_2=-4.$$

Όπότε:  $\frac{x^2+4x+7}{(x+2)(x+3)^2} \equiv \frac{3}{x+2} - \frac{2}{(x+3)} - \frac{4}{(x+3)^2}$ .

**2ο:** Νά αναλυθεί το κλάσμα:  $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \frac{3x^4-9x^3+4x^2-34x+1}{(x-2)^3(x+3)^2}$  σε άθροισμα  
άπλων κλασμάτων.

Λύση. Η ανάλυση προκύπτει από τον τύπο:

$$\frac{3x^4-9x^3+4x^2-34x+1}{(x-2)^3(x+3)^2} \equiv \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{(x-2)^3} + \frac{B_1}{x+3} + \frac{B_2}{(x+3)^2}.$$

Εργαζόμενοι όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, βρίσκουμε:

$$A_1=1, \quad A_2=0, \quad A_3=-3, \quad B_1=2, \quad B_2=-5,$$

και επομένως η ανάλυση που ζητάμε είναι:

$$\frac{3x^4-9x^3+4x^2-34x+1}{(x-2)^3(x+3)^2} \equiv \frac{1}{x-2} - \frac{3}{(x-2)^3} + \frac{2}{x+3} - \frac{5}{(x+3)^2}.$$

**Περίπτωση III.** \*Αν το ρητό κλάσμα είναι της μορφής:

$$\frac{f(x)}{(x^2+\beta x+\gamma)^n},$$

όπου ο βαθμός του  $f(x)$  είναι μικρότερος από το  $2n$ ,  $n$  άκεραιος  $\geq 1$  και  $\beta, \gamma$  πραγματικοί αριθμοί με  $\beta^2-4\gamma < 0$ , τότε υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί  $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_n, B_n$  τέτοιοι, ώστε να ισχύει:

$$\frac{f(x)}{(x^2+\beta x+\gamma)^n} \equiv \frac{A_1x+B_1}{x^2+\beta x+\gamma} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+\beta x+\gamma)^2} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{(x^2+\beta x+\gamma)^n}.$$

**Παράδειγμα.** Νά αναλυθεί το κλάσμα  $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \frac{x^5+1}{(x^2-x+1)^3}$  σε άθροισμα  
άπλων κλασμάτων.

Λύση. Παρατηρούμε ότι το  $x^2-x+1$  έχει μιγαδικές ρίζες και ότι το κλάσμα  $\frac{x^5+1}{(x^2-x+1)^3}$  έχει όλες τις προϋποθέσεις που αναφέραμε. Άρα θα έχουμε την ανάλυση:



$$\frac{x^5 + 1}{(x^2 - x + 1)^3} \equiv \frac{A_1 x + B_1}{x^2 - x + 1} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2 - x + 1)^2} + \frac{A_3 x + B_3}{(x^2 - x + 1)^3} \quad (1)$$

καί μετά τήν απαλοιφή παρονομαστών:

$$x^5 + 1 \equiv (A_1 x + B_1)(x^2 - x + 1)^2 + (A_2 x + B_2)(x^2 - x + 1) + A_3 x + B_3.$$

\*Αν εκτελέσουμε τίς πράξεις καί εξισώσουμε τούς συντελεστές τῶν ἴσων δυνάμεων τοῦ  $x$  στά δύο μέλη, θά βροῦμε ἕνα πρωτοβάθμιο σύστημα μέ ἀγνώστους τά  $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ , ἀπό τή λύση τοῦ ὁποῦ ἔχουμε:

$$A_1 = 1, B_1 = 2, A_2 = 1, B_2 = -3, A_3 = -1, B_3 = 2.$$

\*Αν ἀντικαταστήσουμε στήν (1) αὐτές τίς τιμές, ἔχουμε:

$$\frac{x^5 + 1}{(x^2 - x + 1)^3} \equiv \frac{x + 2}{x^2 - x + 1} + \frac{x - 3}{(x^2 - x + 1)^2} - \frac{x - 2}{(x^2 - x + 1)^3}.$$

**Περίπτωση IV.** \*Αν τό  $\varphi(x)$  ἔχει ρίζες πραγματικές καί μιγαδικές ἀπλές ἢ πολλαπλές, τότε ἰσχύουν ταυτόχρονα οἱ προηγούμενες περιπτώσεις.

**Παράδειγμα.** Νά ἀναλυθεῖ τό κλάσμα  $\frac{2x + 1}{(x + 1)(x^2 + x + 1)}$  σέ ἄθροισμα ἀπλῶν κλασμάτων.

**Λύση.** Παρατηροῦμε ὅτι ἡ διακρίνουσα τοῦ τριωνύμου  $x^2 + x + 1$  εἶναι ἀρνητική καί ἐπομένως ὁ παρονομαστής τοῦ κλάσματος ἔχει ρίζες πραγματικές καί μιγαδικές (ἀπλές). Τότε, σύμφωνα μέ τίς περιπτώσεις I καί III, τό κλάσμα δέχεται τήν ἀνάλυση:

$$\frac{2x + 1}{(x + 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + \Gamma}{x^2 + x + 1}. \quad (1)$$

\*Από τήν (1) λαμβάνουμε:

$$2x + 1 \equiv A(x^2 + x + 1) + (Bx + \Gamma)(x + 1) \quad (2)$$

$$\text{ἢ} \quad 2x + 1 \equiv (A + B)x^2 + (A + B + \Gamma)x + (A + \Gamma) \quad (3)$$

συνεπῶς:

$$A + B = 0, \quad A + B + \Gamma = 2, \quad A + \Gamma = 1.$$

\*Από τήν ἐπίλυση τοῦ προηγούμενου συστήματος βρίσκουμε:  $A = -1, B = 1, \Gamma = 2$ .

$$\text{*Οπότε:} \quad \frac{2x + 1}{(x + 1)(x^2 + x + 1)} \equiv -\frac{1}{x + 1} + \frac{x + 2}{x^2 + x + 1}.$$

**Σημείωση:** Σύντομος ὑπολογισμός τῶν  $A, B, \Gamma$ .

\*Από τήν ταυτότητα (2) γιά  $x = -1$  λαμβάνουμε:  $A = -1$ .

\*Από τήν ταυτότητα (3) γιά  $x = 0$  λαμβάνουμε:  $A + \Gamma = 1$  καί συνεπῶς  $\Gamma = 2$ .

\*Εξισώνοντας τούς συντελεστές τοῦ  $x^2$  στά δύο μέλη τῆς (3) βρίσκουμε:

$$0 = A + B \text{ καί ἐπειδὴ } A = -1 \text{ λαμβάνουμε: } B = 1.$$

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

286. Νά ἀναλυθοῦν σέ ἄθροισμα ἀπλῶν κλασμάτων τά ἐπόμενα ρητά κλάσματα:

$$1) \frac{1}{(x^2 - 4)(x + 1)}, \quad 2) \frac{3x - 1}{x^2 - 5x + 6}, \quad 3) \frac{8x^2 - 19x + 2}{(x + 2)(x - 1)(x - 4)}, \quad 4) \frac{1}{(1 + x^2)^2(1 + x)}$$

$$5) \frac{x + 2}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)^2}, \quad 6) \frac{x^2 - x + 1}{(x^2 + 1)(x - 1)^2}, \quad 7) \frac{3x^2 + 7x + 2}{(x + 1)(x^2 + 2x + 5)}, \quad 8) \frac{10x^2 + 32}{x^3 \cdot (x - 4)^2}.$$

287. \*Επίσης:

$$1) \frac{3x + 4}{x^2 - 9x + 14}, \quad 2) \frac{3x^2 - 5x - 6}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}, \quad 3) \frac{x + 2}{(x^4 - 1)(x^2 + 1)^2}, \quad 4) \frac{x^2}{(x^2 - 2x + 5)^2},$$

$$5) \frac{2x^3 + 7x^2 - 2x - 2}{2x^2 + x - 6}, \quad 6) \frac{5x^2 - 4}{x^4 - 5x^2 + 4}, \quad 7) \frac{x^3}{x^3 - 3x + 2}, \quad 8) \frac{7x - 10}{(3x - 4)(x - 1)^2}.$$

**§ 134. Μέθοδοι εύρέσεως τοῦ ἄθροίσματος τῶν  $n$  πρώτων ὀρων σειρᾶς.**—Υπάρχουν διάφοροι μέθοδοι γιά νά βροῦμε τό ἄθροισμα τῶν  $n$  πρώτων ὀρων μιᾶς σειρᾶς ἀνάλογα μέ τή μορφή τοῦ γενικοῦ ὀρου τῆς. Υπάρχουν ὁμως καί σειρές, στίς ὁποῖες δέν μπορούμε νά βροῦμε τό ἄθροισμα τῶν  $n$  πρώτων ὀρων, ὅπως π.χ. εἶναι ἡ ἀρμονική σειρᾶ  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v}$ . Δέν ὑπάρχει γενική μέθοδος

γιά τόν ὑπολογισμό τοῦ ἄθροίσματος  $\sigma_n$  τῶν  $n$  πρώτων ὀρων ὁποιασδήποτε σειρᾶς. Σ' αὐτή τήν παράγραφο θά μελετήσουμε μόνο ὁρισμένες περιπτώσεις πού μπορούμε νά βροῦμε τό ἄθροισμα  $\sigma_n$  τῶν  $n$  πρώτων ὀρων μιᾶς σειρᾶς μέ γενικό ὀρο  $\alpha_v$  πού εἶναι εἰδικῆς μορφῆς.

**Περίπτωση I.** \*Όταν ὁ γενικός ὀρος  $\alpha_v$  τῆς σειρᾶς  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  μπορεῖ νά γραφεῖ μέ τή μορφή:

$$\alpha_v = \varphi(v) - \varphi(v + 1) \quad (1)$$

γιά κάθε  $v = 1, 2, 3, \dots$ , ὅπου  $\varphi(v)$  συνάρτηση τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ  $v$  (ἀκολουθία), τότε τό ἄθροισμα  $\sigma_n$  τῶν  $n$  πρώτων ὀρων τῆς σειρᾶς, δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$\sigma_n = \varphi(1) - \varphi(n + 1) \quad (2)$$

Πράγματι, ἀπό τήν  $\alpha_v = \varphi(v) - \varphi(v + 1)$  γιά  $v = 1, 2, 3, \dots, n$  λαμβάνουμε:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \varphi(1) - \varphi(2) \\ \alpha_2 &= \varphi(2) - \varphi(3) \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha_n &= \varphi(n) - \varphi(n + 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sigma_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \varphi(1) - \varphi(n + 1).$$

**Παρατηρήσεις. 1η.** \*Όταν ὁ γενικός ὀρος  $\alpha_v$  τῆς  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  ἀναλύεται στή διαφορά:

$$\alpha_v = \varphi(v + 1) - \varphi(v), \text{ τότε τό } \sigma_n \text{ δίνεται ἀπό τόν τύπο: } \sigma_n = \varphi(n + 1) - \varphi(1).$$

2η: \*Αν ὑπάρχει τό  $\lim_{v \rightarrow \infty} \varphi(v)$  καί εἶναι  $k$ , τότε ἀπό τή (2) ἔχουμε:

$$\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \varphi(1) - k.$$

**Εφαρμογές. 1η.** Νά ἀποδείξετε ὅτι:  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{2v + 1}{v^2(v + 1)^2} = 1$ .

**Λύση.** \*Ο γενικός ὀρος  $\alpha_v = \frac{2v + 1}{v^2(v + 1)^2}$  τῆς σειρᾶς γράφεται:

$$\alpha_v = \frac{2v + 1}{v^2(v + 1)^2} = \frac{v^2 + 2v + 1 - v^2}{v^2(v + 1)^2} = \frac{(v + 1)^2 - v^2}{v^2(v + 1)^2} = \frac{1}{v^2} - \frac{1}{(v + 1)^2} = \varphi(v) - \varphi(v + 1),$$

ὅπου  $\varphi(v) = \frac{1}{v^2}$ . \*Αρα  $\sigma_n = \varphi(1) - \varphi(n + 1) = 1 - \frac{1}{(n + 1)^2}$  καί συνεπῶς:



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 1, \text{ γιατί } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)^3} = 0.$$

**2η.** Νά βρείτε το άθροισμα της σειράς:

$$\frac{4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{6}{3 \cdot 4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots + \frac{n+3}{n(n+1)} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + \dots \quad (\Sigma)$$

**Λύση:** 'Ο γενικός όρος της σειράς ( $\Sigma$ ) είναι:  $\alpha_n = \frac{n+3}{n(n+1)} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$ .

Γιά να μετασχηματίσουμε το γενικό όρο, αναλύουμε πρώτα-πρώτα το κλάσμα  $\frac{n+3}{n(n+1)}$  σε άθροισμα δύο απλών κλασμάτων. Γι' αυτό θέτουμε:

$$\frac{n+3}{n(n+1)} \equiv \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}.$$

'Από αυτή, βρίσκουμε  $A=3$ ,  $B=-2$ , οπότε έχουμε:

$$\frac{n+3}{n(n+1)} \equiv \frac{3}{n} - \frac{2}{n+1}.$$

Τότε ο γενικός όρος της σειράς γίνεται:

$$\alpha_n = \frac{n+3}{n(n+1)} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{3}{n} \cdot \frac{2^n}{3^n} - \frac{2}{n+1} \cdot \frac{2^n}{3^n} = \frac{2^n}{n \cdot 3^{n-1}} - \frac{2^{n+1}}{(n+1) \cdot 3^n},$$

δηλαδή ο  $\alpha_n$  γράφτηκε με τη μορφή  $\alpha_n = \varphi(n) - \varphi(n+1)$ , όπου  $\varphi(n) = \frac{2^n}{n \cdot 3^{n-1}}$ .

Τότε, σύμφωνα με τον τύπο (2), θα είναι:

$$\sigma_n = \varphi(1) - \varphi(n+1) = 2 - \frac{2^{n+1}}{(n+1) \cdot 3^n}, \text{ γιατί } \varphi(1) = 2.$$

$$\text{'Αρα } \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1) \cdot 3^n} = 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 2 - 0 = 2.$$

Δηλαδή η σειρά ( $\Sigma$ ) συγκλίνει στον αριθμό 2.

**Περίπτωση II.** 'Ο γενικός όρος  $\alpha_n$  της  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  αναλύεται σε αλγεβρικό άθροισμα νιοστών όρων γνωστών σειρών, δηλαδή, αν π.χ. ο  $\alpha_n$  είναι της μορφής:

$$\alpha_n = \varphi'(n) + \varphi''(n) + \varphi'''(n) \quad (1)$$

όπου  $\varphi'(n)$ ,  $\varphi''(n)$ ,  $\varphi'''(n)$  είναι οί γενικοί όροι σειρών, με μερικά άθροισματα  $\sigma'_n$ ,  $\sigma''_n$ ,  $\sigma'''_n$  αντίστοιχα. Τότε το άθροισμα  $\sigma_n$  των  $n$  πρώτων όρων της σειράς  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  είναι:

$$\sigma_n = \sigma'_n + \sigma''_n + \sigma'''_n \quad (2)$$

Πράγματι, από την (1) για  $n=1, 2, \dots, n$  λαμβάνουμε:

$$\sigma_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \{\varphi'(1) + \varphi'(2) + \dots + \varphi'(n)\} + \{\varphi''(1) + \varphi''(2) + \dots + \varphi''(n)\} + \{\varphi'''(1) + \varphi'''(2) + \dots + \varphi'''(n)\} = \sigma'_n + \sigma''_n + \sigma'''_n.$$

**Εφαρμογή.** Νά βρείτε το άθροισμα των  $n$  πρώτων όρων της σειράς με γενικό όρο  $\alpha_n = \frac{2^n - 1}{2^{2n-2}}$ , καθώς και το άθροισμά της ( $\equiv$  άθροισμα άπειρων όρων της).

**Λύση.** 'Ο γενικός όρος  $\alpha_n = \frac{2^n - 1}{2^{2n-2}} = \frac{2^n}{2^{2n-2}} - \frac{1}{2^{2n-2}} = \frac{4}{2^n} - \frac{4}{4^n}$ , αναλύεται σε

άλγεβρικό άθροισμα της μορφής:  $\varphi'(n) + \varphi''(n)$ , όπου  $\varphi'(n) = \frac{4}{2^n}$  και  $\varphi''(n) = -\frac{4}{4^n}$ . Παρατηρούμε ότι καθένας από τους  $\varphi'(n)$ ,  $\varphi''(n)$  είναι ο γενικός όρος φθίνουσας γεωμ. προόδου. Έτσι έχουμε:

$$\sigma'_n = \varphi'(1) + \dots + \varphi'(n) = 4 \left( \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) = 4 \cdot \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2} - 1} = 4 \cdot \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right)$$

$$\sigma''_n = \varphi''(1) + \dots + \varphi''(n) = -4 \left( \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^n} \right) = -\frac{4}{3} \left( 1 - \frac{1}{4^n} \right)$$

και συνεπώς (τύπος (2)) είναι:

$$\sigma_n = \sigma'_n + \sigma''_n = 4 \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right) - \frac{4}{3} \left( 1 - \frac{1}{4^n} \right) = \frac{8}{3} - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{3 \cdot 4^{n-1}}.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \frac{8}{3}$  (γιατί;).

$$\text{'Αρα: } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \frac{8}{3}.$$

**Περίπτωση III.** 'Αν ο γενικός όρος  $\alpha_n$  της σειράς  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  είναι της μορφής:

$$\alpha_n = f(n) \cdot x^n$$

όπου  $f(n)$  ακέραιο πολυώνυμο του  $n$ , τότε πάλι το άθροισμα  $\sigma_n$  των  $n$  πρώτων όρων της υπολογίζεται.

**Παράδειγμα 1ο.** Νά υπολογίσετε το άθροισμα των  $n$  πρώτων όρων της σειράς:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \equiv 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1} + \dots$$

**Λύση.** Έστω:

$$\sigma_n \equiv 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}. \quad (1)$$

Πολλαπλασιάζοντας τά μέλη της (1) επί  $x$  λαμβάνουμε:

$$x\sigma_n = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n. \quad (2)$$

'Αφαιρώντας από την (1) τη (2) βρίσκουμε:

$$(1-x)\sigma_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} - nx^n. \quad (3)$$

$$\text{'Αλλά: } 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}, \quad (x \neq 1),$$

και επομένως η (3) γίνεται:

$$(1-x) \cdot \sigma_n = \frac{x^n - 1}{x - 1} - nx^n$$

$$\text{από την οποία για } x \neq 1 \text{ βρίσκουμε: } \sigma_n = \frac{1 - x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x}.$$



**Παράδειγμα 2ο.** Νά αποδείξετε ότι το άθροισμα των  $n$  πρώτων όρων της σειράς:

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{n+1}{3^n} + \dots \quad (1)$$

είναι:  $\frac{5}{4} - \frac{2n+5}{4 \cdot 3^n}$

**Λύση.** Ο γενικός όρος της (1), δηλ.  $\frac{n+1}{3^n}$  είναι γινόμενο του νιοστού όρου μιάς αριθμητικής προόδου (τῆς:  $2, 3, \dots, n, n+1, \dots$ ) καί τοῦ νιοστού-όρου μιάς γεωμετρικῆς (τῆς:  $\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \dots, \frac{1}{3^n}, \dots$ ), δηλαδή είναι ο νιοστός όρος μιάς **μικτῆς προόδου** \*.

Θέτουμε:

$$\sigma_n = \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{n+1}{3^n} \quad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντας τά μέλη τῆς (2) ἐπὶ τό λόγο τῆς γεωμετρικῆς προόδου λαμβάνουμε:

$$\frac{1}{3} \sigma_n = \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{n+1}{3^{n+1}} \quad (3)$$

\*Αφαιρώντας ἀπό τή (2) τήν (3) βρίσκουμε:

$$\frac{2}{3} \sigma_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n} - \frac{n+1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{3^n} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} - 1} - \frac{n+1}{3^{n+1}}$$

καί τελικά:

$$\sigma_n = \frac{5}{4} - \frac{2n+5}{4 \cdot 3^n}$$

**Π ε ρ ῖ π τ ω σ η IV.** Ἄν ὁ γενικός όρος  $a_n$  τῆς σειράς  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  εἶναι τῆς μορφῆς:

$$a_n = f(n)$$

ὅπου  $f(n)$  ἀκέραιη ρητή συνάρτηση τοῦ  $n$ , τότε πάλι τό άθροισμα  $\sigma_n$  τῶν  $n$  πρώτων όρων τῆς σειράς ὑπολογίζεται.

**Παράδειγμα 1ο.** Νά βρεῖτε τό άθροισμα τῶν  $n$  πρώτων όρων τῆς σειράς, τῆς ὁποίας ὁ γενικός όρος εἶναι:  $a_n = 12n^2 - 6n + 1$ .

**Λύση:** Ἐστω  $\sigma_n \equiv a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{n=1}^n a_n \equiv \sum_{n=1}^n (12n^2 - 6n + 1)$ .

Ἀλλά:  $\sum_{n=1}^n (12n^2 - 6n + 1) = \sum_{n=1}^n 12n^2 - \sum_{n=1}^n 6n + \sum_{n=1}^n 1$ .

\*Αρα:

$$\sigma_n = 12 \sum_{n=1}^n n^2 - 6 \sum_{n=1}^n n + \sum_{n=1}^n 1 = 12 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 6 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n = n^2(4n+3).$$

\* **Μικτή πρόοδος** ονομάζεται μία ακολουθία αριθμῶν, τῆς ὁποίας κάθε όρος προκύπτει ἀπό τόν πολλαπλασιασμό τῶν ἀντίστοιχων (όμοτάξιων) όρων δύο προόδων, μιάς ἀριθμητικῆς καί μιάς γεωμετρικῆς.

**Παράδειγμα 2ο.** Νά βρεῖτε τό άθροισμα τῶν  $n$  πρώτων όρων τῆς σειράς:

$$1 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \cdot 7 + 5 \cdot 7 \cdot 9 + \dots \quad (\Sigma)$$

**Λύση.** Πρῶτα-πρῶτα βρίσκουμε τό γενικό όρο τῆς σειράς ( $\Sigma$ ).

Παρατηροῦμε ὅτι οἱ πρῶτοι παράγοντες ( $1, 3, 5, \dots$ ) τῶν όρων τῆς σειράς ( $\Sigma$ ) ἀποτελοῦν ἀριθμητική πρόοδος μέ λόγο 2, συνεπῶς ὁ πρῶτος όρος τοῦ γινόμενου τοῦ γενικοῦ όρου τῆς σειράς θά εἶναι ὁ:  $1 + (n-1) \cdot 2 = 2n-1$ .

Ἐπίσης ὁ γενικός όρος τῆς ἀριθμητικῆς προόδου  $3, 5, 7, \dots$  εἶναι ὁ:  $2n+1$  καί  $5, 7, 9, \dots$   $\gg$ :  $2n+3$ .

\*Αρα ὁ γενικός όρος  $a_n$  τῆς σειράς ( $\Sigma$ ) εἶναι ὁ:  $(2n-1)(2n+1)(2n+3)$  καί συνεπῶς τό άθροισμα  $\sigma_n$  τῶν  $n$  πρώτων όρων τῆς ( $\Sigma$ ) εἶναι:

$$\begin{aligned} \sigma_n &\equiv 1 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \cdot 7 + \dots + (2n-1)(2n+1)(2n+3) = \sum_{n=1}^n (2n-1)(2n+1)(2n+3) = \\ &= \sum_{n=1}^n (8n^3 + 12n^2 - 2n - 3) = 8 \sum_{n=1}^n n^3 + 12 \sum_{n=1}^n n^2 - 2 \sum_{n=1}^n n - 3 \sum_{n=1}^n 1 = \\ &= 8 \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} + 12 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2 \frac{n(n+1)}{2} - 3n \end{aligned}$$

καί τελικά:

$$\sigma_n = n(2n^3 + 8n^2 + 7n - 2).$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Ομάδα Α'. 288.** Νά βρεῖτε τό άθροισμα  $\sigma_n$  τῶν  $n$  πρώτων όρων τῶν παρακάτω σειρῶν:

α)  $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots$

β)  $\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} + \dots$

γ)  $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots$

δ)  $1 + \frac{4}{5} + \frac{7}{5^2} + \frac{10}{5^3} + \dots$

**289.** Νά βρεῖτε τό άθροισμα τῶν  $n$  πρώτων όρων τῆς σειράς μέ γενικό όρο:

i)  $a_n = \frac{n+2}{n(n+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ , ii)  $a_n = \frac{2^n-1}{3^{n+1}}$ ,

καθώς καί τό άθροισμά τῆς.

**290.** Νά βρεῖτε τό άθροισμα τῶν  $n$  πρώτων όρων τῶν σειρῶν, τῶν ὁποίων οἱ γενικοί όροι εἶναι:

α)  $3n^2 - n$ , β)  $8n^3 - 1$ , γ)  $n(n+1)(n+3)$ , δ)  $(n+3)a^n$ .

**291.** Νά βρεῖτε τοὺς γενικούς όρους  $a_n$  τῶν παρακάτω σειρῶν καί κατόπιν τό άθροισμα τῶν  $n$  πρώτων όρων τους:

α)  $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots$ , β)  $1 \cdot 4 \cdot 7 + 2 \cdot 5 \cdot 8 + \dots$ , γ)  $1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{8} + \dots$

**292.** Νά βρεῖτε τό άθροισμα τῆς σειράς  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , ὅταν:

1)  $a_n = \frac{1}{n(n+2)}$ , 2)  $a_n = \frac{1}{4n^2-1}$ , 3)  $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ , 4)  $a_n = \frac{1}{9n^2-3n-2}$ .



**Όμαδα Β. 293.** Νά μελετήσετε ως προς τό μονότονο καί τή σύγκλιση τήν ακολουθία  $(\alpha_n)$  μέ γενικό όρο:

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + 3k + 2}.$$

Στή συνέχεια νά βρεíte, άν υπάρχει, τό όρίο της. Τέλος, νά βρεíte τό πλήθος τών όρων της, οί όποίοι βρίσκονται έκτός του διαστήματος  $(\frac{5}{14}, \frac{3}{4})$ .

**Υπόδειξη.** Νά αναλύσετε τό κλάσμα του β' μέλους σέ άθροισμα δύο άπλών κλασμάτων.

**294.** Νά αποδείξετε ότι:

$$1 + 2\left(1 + \frac{1}{v}\right) + 3\left(1 + \frac{1}{v}\right)^2 + \dots + v\left(1 + \frac{1}{v}\right)^{v-1} = v^2$$

**295.** Νά αποδείξετε ότι: άν ό γενικός όρος  $\alpha_n$  μις σειράς  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  μπορεί νά γραφεί μέ τή μορφή:  $\alpha_n = A\varphi(n) + B\varphi(n+1) + \Gamma\varphi(n+2)$ , όπου  $A + B + \Gamma = 0$ , τότε τό άθροισμα  $\sigma_n$  τών  $n$  πρώτων όρων της μς τό δίνει ό τύπος:

$$\sigma_n = A\varphi(1) - \Gamma\varphi(2) - A\varphi(n+1) + \Gamma\varphi(n+2).$$

**296.** Νά βρεíte τό άθροισμα τών  $n$  πρώτων όρων τής σειράς:

$$\frac{5}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{8}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)} + \dots$$

**Υπόδειξη.** Νά αναλύσετε τό γενικό όρο τής σειράς σέ άθροισμα τριών άπλών κλασμάτων καί νά λάβετε υπόψη σας τήν προηγούμενη άσκηση.

### III. ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ DE MOIVRE ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ

**§ 135. Όρισμα μιγαδικού αριθμού  $z \neq 0$ .**— Έστω ό μιγαδικός αριθμός  $z = x + iy$  μέ  $z \neq 0$  καί  $x, y \in \mathbb{R}$ . τότε έχουν έννοια στό  $\mathbb{R}$  οί παράστασεις:  $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  καί έτσι ό  $z$  μπορεί νά γραφεί μέ τή μορφή:

$$z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \quad (1)$$

Έπειδή:  $-1 \leq \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 1, -1 \leq \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 1$

καί  $\left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 + \left( \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 = 1,$

τά  $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  μπορούν νά είναι; άντιστοίχως, τό συνημίτονο καί τό ήμίτονο μις κατάλληλης γωνίας  $\varphi$ , δηλαδή:

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (2)$$

Είμαι γνωστό ότι υπάρχουν άπειρες γωνίες πού τά μέτρα τους (σέ άκτί-

νια) διαφέρουν κατά άκέραιο πολλαπλάσιο του  $2\pi$  καί επαληθεύουν τίς σχέσεις (2). Από αυτές, υπάρχει μία μόνο πού ίκανοποιεί τίς (2) καί συγχρόνως τή συνθήκη  $-\pi < \varphi \leq \pi$ . Αυτή τή γωνία  $\varphi$  θά τή λέμε: τό **βασικό (πρωτεύον) όρισμα του μιγαδικού αριθμού  $z = x + iy$  ( $\neq 0$ )** καί θά τή συμβολίζουμε: μέ: **Argz** (Argument = όρισμα), δηλαδή έχουμε:

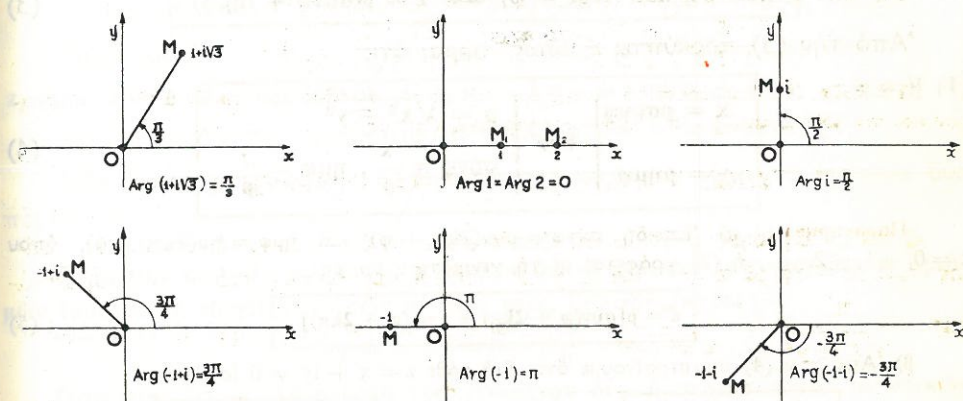
$$\text{Arg} z = \varphi \wedge -\pi < \varphi \leq \pi$$

**Παράδειγμα.** Για τό μιγαδικό αριθμό  $z = 1 + i\sqrt{3}$  έχουμε τό σύστημα:

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\pi < \varphi \leq \pi,$$

άπό τό όποίο:  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ , ώστε:  $\text{Arg}(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ .

Γεωμετρικά τό όρισμα μιγαδικού αριθμού  $z$  παριστάνει τήν κυρτή γωνία πού σχηματίζει ό θετικός ήμιάξονας  $Ox$  μέ τή διανυσματική άκτίνα  $OM$  (τής όποίας τό άκρο  $M$  είναι ή εικόνα του μιγαδικού αριθμού  $z$ ), όπως φαίνεται στίς διάφορες περιπτώσεις τών παρακάτω σχημάτων (βλ. Σχ. 8).



Σχ. 8

**§ 136. Έη τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού.**— Έστω ένας μιγαδικός αριθμός  $z = x + iy \neq 0$ . Τότε\* όρίζεται τό όρισμά του:  $\text{Arg} z = \varphi$  καί τό μέτρο του:  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$  καί, όπως είδαμε παραπάνω, ισχύουν:

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\rho}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\rho}. \quad (1)$$

Από τίς (1) έχουμε:  $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, \rho^2 = x^2 + y^2$

καί συνεπώς:  $z = x + iy = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

Έη έκφραση:  **$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi), \rho = |z| \wedge \varphi = \text{Arg} z$**  (2)

\* Αν  $z = 0$ , τότε  $\rho = |z| = 0$ . Όρισμα του 0 δέν όρίζεται.



είναι γνωστή, από την προηγούμενη τάξη, ως **τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού αριθμού**  $z = x + iy$ .

\*Έτσι, π.χ., είναι:

$$\begin{aligned} 1 &= 1(\sin 0 + i \eta \mu 0), & -1 &= 1(\sin \pi + i \eta \mu \pi), \\ i &= 1\left(\sin \frac{\pi}{2} + i \eta \mu \frac{\pi}{2}\right), & -i &= 1\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \eta \mu\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right), \\ 1 + i\sqrt{3} &= 2\left(\sin \frac{\pi}{3} + i \eta \mu \frac{\pi}{3}\right), & -1 - i &= \sqrt{2}\left(\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \eta \mu\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right). \end{aligned}$$

Από τα προηγούμενα συνάγουμε τώρα ότι: *κάθε μιγαδικός αριθμός*  $z = x + iy \neq 0$  *έχει ακριβώς μία τριγωνομετρική παράσταση*  $z = \rho(\sin \varphi + i \eta \mu \varphi)$ , *όπου*  $\rho$  *είναι το μέτρο του*  $z$  *και*  $\varphi$  *τό βασικό όρισμά του* ( $-\pi < \varphi \leq \pi$ ).

\*Αντιστρόφως: *Γιά κάθε διατεταγμένο ζεύγος*  $(\rho, \varphi)$  *μέ*  $\rho > 0$  *και*  $-\pi < \varphi \leq \pi$  *υπάρχει ακριβώς ένας μιγαδικός αριθμός*  $z = x + iy \neq 0$  *μέ τριγωνομετρική μορφή:*  $\rho(\sin \varphi + i \eta \mu \varphi)$ . *αυτός είναι ο μιγαδικός αριθμός*  $z = x + iy$  *μέ*  $x = \rho \sin \varphi$  *και*  $y = \rho \eta \mu \varphi$ .

\*Υστερα από αυτά έχουμε τή λογική ισοδυναμία:

$$(|z| = \rho \text{ και } \text{Arg} z = \varphi) \iff z = \rho(\sin \varphi + i \eta \mu \varphi) \quad (3)$$

\*Από την (3) προκύπτει άμέσως, τώρα, ότι:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \sin \varphi \\ y &= \rho \eta \mu \varphi \end{aligned} \right\} \iff \left\{ \begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \sin \varphi &= \frac{x}{\rho}, \quad \eta \mu \varphi = \frac{y}{\rho} \end{aligned} \right. \quad (4)$$

**Παρατηρήσεις:** α) \*Επειδή  $\sin \varphi = \sin(2k\pi + \varphi)$  και  $\eta \mu \varphi = \eta \mu(2k\pi + \varphi)$ , όπου  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , ή (2) γράφεται μέ τή γενικότερη μορφή:

$$z = \rho[\sin(\varphi + 2k\pi) + i \eta \mu(\varphi + 2k\pi)] \quad (5)$$

β) \*Από την (4) συμπεραίνουμε ότι: *Γιά κάθε*  $z = x + iy \neq 0$  *ισχύουν:*

$$\eta \mu(\text{Arg} z) = \frac{y}{|z|} \quad \text{και} \quad \sin(\text{Arg} z) = \frac{x}{|z|}$$

και συνεπώς:  $z = x + iy = |z| \{ \sin(\text{Arg} z) + i \eta \mu(\text{Arg} z) \}$ .

Εύκολα αποδεικνύονται τώρα τά επόμενα θεωρήματα:

**§ 137. Θεώρημα.**— *Δύο μιγαδικοί αριθμοί γραμμένοι μέ τριγωνομετρική μορφή είναι ίσοι, τότε και μόνο τότε, αν έχουν ίσα μέτρα και τά όρισμά τους διαφέρουν κατά άκέραιο πολλαπλάσιο περιφερείας.*

\*Απόδειξη: Πράγματι, αν έχουμε:

$$\rho_1(\sin \varphi_1 + i \eta \mu \varphi_1) = \rho_2(\sin \varphi_2 + i \eta \mu \varphi_2),$$

θά είναι:

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 \sin \varphi_1 &= \rho_2 \sin \varphi_2 \Rightarrow \rho_1^2 \sin^2 \varphi_1 = \rho_2^2 \sin^2 \varphi_2 \\ \rho_1 \eta \mu \varphi_1 &= \rho_2 \eta \mu \varphi_2 \Rightarrow \rho_1^2 \eta \mu^2 \varphi_1 = \rho_2^2 \eta \mu^2 \varphi_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \rho_1^2 (\sin^2 \varphi_1 + \eta \mu^2 \varphi_1) &= \\ \rho_2^2 (\sin^2 \varphi_2 + \eta \mu^2 \varphi_2) \end{aligned} \right\}$$

από τό όποιο:  $\rho_1^2 = \rho_2^2$  και επειδή  $\rho_1 > 0, \rho_2 > 0$ , έπεται:  $\rho_1 = \rho_2$ ,

όποτε θά είναι:

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi_1 &= \sin \varphi_2 \\ \eta \mu \varphi_1 &= \eta \mu \varphi_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi.$$

\*Αντιστρόφως. \*Αν  $\rho_1 = \rho_2$  και  $\varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi$ , θά έχουμε:

$$\sin \varphi_1 = \sin \varphi_2, \quad \eta \mu \varphi_1 = \eta \mu \varphi_2$$

όποτε:  $\rho_1(\sin \varphi_1 + i \eta \mu \varphi_1) = \rho_2(\sin \varphi_2 + i \eta \mu \varphi_2)$ .

**§ 138. Θεώρημα.**— *Τό γινόμενο δύο μιγαδικών αριθμών είναι ένας μιγαδικός αριθμός που έχει μέτρο τό γινόμενο των μέτρων των μιγάνων και όρισμα τό άθροισμα των όρισμάτων τους. Δηλαδή:*

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \rho_1(\sin \varphi_1 + i \eta \mu \varphi_1) \\ z_2 &= \rho_2(\sin \varphi_2 + i \eta \mu \varphi_2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\sin(\varphi_1 + \varphi_2) + i \eta \mu(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

\*Απόδειξη: \*Έχουμε:

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 (\sin \varphi_1 + i \eta \mu \varphi_1) (\sin \varphi_2 + i \eta \mu \varphi_2) = \rho_1 \rho_2 [\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 - \eta \mu \varphi_1 \eta \mu \varphi_2 + i (\sin \varphi_1 \eta \mu \varphi_2 + \eta \mu \varphi_1 \sin \varphi_2)] = \rho_1 \rho_2 [\sin(\varphi_1 + \varphi_2) + i \eta \mu(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

**Πόρισμα 1ο.**— \*Αν  $z_k = \rho_k(\sin \varphi_k + i \eta \mu \varphi_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , τότε:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \dots \cdot \rho_n [\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) + i \eta \mu(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)] \quad (1)$$

Νά αποδειχθεί τό πόρισμα μέ τή μέθοδο τής τέλειας επαγωγής.

Μία άμση συνέπεια των παραπάνω προτάσεων είναι τά επόμενα δύο πορίσματα:

**Πόρισμα 2ο.**— *Τό μέτρο του γινομένου δύο ή περισσότερων μιγαδικών αριθμών ίσοται μέ τό γινόμενο των μέτρων τους, δηλαδή ισχύει:*

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \dots \cdot |z_n|.$$

**Πόρισμα 3ο.**— *Τό όρισμα του γινομένου δύο ή περισσότερων μιγαδικών αριθμών ίσοται μέ τό άθροισμα των όρισμάτων τους, δηλαδή ισχύει:*

$$2k\pi + \text{Arg}(z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n) = \text{Arg} z_1 + \text{Arg} z_2 + \dots + \text{Arg} z_n \quad (1), k \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

**§ 139. Θεώρημα.**— \*Ο αντίστροφος ενός μιγαδικού αριθμού  $z \neq 0$  έχει μέτρο τό αντίστροφο του μέτρου του και όρισμα τό αντίθετο του όρισμάτος του.

\*Απόδειξη. Πράγματι, αν  $z = \rho(\sin \varphi + i \eta \mu \varphi)$  θά έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} [\rho(\sin \varphi + i \eta \mu \varphi)]^{-1} &= \frac{1}{\rho(\sin \varphi + i \eta \mu \varphi)} = \frac{1(\sin \varphi - i \eta \mu \varphi)}{\rho(\sin \varphi + i \eta \mu \varphi)(\sin \varphi - i \eta \mu \varphi)} = \\ &= \frac{\sin \varphi - i \eta \mu \varphi}{\rho(\sin^2 \varphi + \eta \mu^2 \varphi)} = \frac{1}{\rho} (\sin \varphi - i \eta \mu \varphi) = \frac{1}{\rho} [\sin(-\varphi) + i \eta \mu(-\varphi)]. \end{aligned}$$

1. Γράφουμε  $2k\pi + \text{Arg}(z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n)$ , γιατί είναι φανερό ότι τό άθροισμα στό β' μέλος τής (2) μπορεί να μην ανήκει στό  $(-\pi, \pi]$ .



Ωστε :  $\forall z \in \mathbb{C}, z \neq 0, \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$  και  $\text{Arg} \frac{1}{z} = -\text{Arg} z$

**§ 140. Θεώρημα.**— Τό πηλίκο δύο μιγαδικών αριθμών είναι ένας μιγαδικός αριθμός που έχει μέτρο τό λόγο τών μέτρων τους και ὄρισμα τή διαφορά τών ὀρισμάτων τους. Δηλαδή:

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \\ z_2 &= \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \neq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

Υπόδειξη. Έχουμε:  $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$  κτλ.

**Πόρισμα.**— Γιά κάθε ζεύγος μιγαδικών αριθμών  $z_1, z_2$  με  $z_1 \cdot z_2 \neq 0$  ισχύει:

$$\text{i) } \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{και} \quad \text{ii) } \text{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \text{Arg} z_1 - \text{Arg} z_2.$$

**§ 141. Θεώρημα (De Moivre).**— Η νιοστή δύναμη ενός μιγαδικού αριθμού  $z$  είναι ένας μιγαδικός αριθμός, ὁ ὁποῖος έχει ὡς μέτρο τή νιοστή δύναμη τοῦ μέτρου τοῦ  $z$  καί ὡς ὄρισμα τό  $v$ -πλάσιο τοῦ ὀρίσματος τοῦ  $z$ . Δηλαδή:

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) \Rightarrow z^v = \rho^v [\cos(v\varphi) + i \sin(v\varphi)]$$

$$\eta \quad \boxed{[\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^v = \rho^v [\cos(v\varphi) + i \sin(v\varphi)]} \quad (\tau)$$

Ο τύπος (τ), ὁ ὁποῖος δίνει τή νιοστή δύναμη ενός μιγαδικού αριθμοῦ, είναι γνωστός μέ τό ὄνομα: **τύπος τοῦ De Moivre**.\*

**Απόδειξη.** Ἄν στόν τύπο (1) τοῦ πορίσματος τῆς § 138 θέσουμε:  $z_1 = z_2 = \dots = z_v = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , τότε προκύπτει ὁ τύπος (τ).

**Πόρισμα.**— Γιά κάθε  $v \in \mathbb{N}$  καί κάθε  $z \in \mathbb{C}$  ισχύει:

$$\text{(i) } |z^v| = |z|^v \quad \text{και} \quad \text{ii) } \text{Arg} z^v = v \text{Arg} z.$$

**Άσκηση.** Νά ἀποδείξετε τό θεώρημα τοῦ De Moivre μέ τή μέθοδο τῆς τέλειος ἐπαγωγῆς (Τό θεώρημα ισχύει γιά  $v = 1, 2$ . Ἐστω ... κτλ.).

**Παρατήρηση.** Ὁ τύπος τοῦ De Moivre ισχύει καί στήν περίπτωση πού ὁ ἐκθέτης είναι ἀκέραιος ἀρνητικός, ἔστω  $v = -k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ). Πράγματι, ἔχουμε:

$$\begin{aligned} [\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^{-k} &= \{[\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^{-1}\}^k = \{\rho^{-1} [\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)]\}^k = \\ &= \rho^{-k} [\cos(-k\varphi) + i \sin(-k\varphi)]. \end{aligned}$$

**Εφαρμογές: 1η.** Γράψτε τό μιγαδικό ἀριθμό  $z = \sqrt{3} + i$  σέ τριγωνομετρική μορφή.

**Λύση:** Είναι  $\alpha = \sqrt{3}$ ,  $\beta = 1$  καί ἄρα  $\rho = \sqrt{3+1} = 2$ .

Ἐπίσης είναι:  $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$  καί  $\sin \theta = \frac{1}{2}$  ἀπό τίς ὁποῖες παίρνουμε:  $\theta = \frac{\pi}{6}$ .

Ἔτσι είναι:  $\sqrt{3} + i = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$ .

\* De Moivre (1667 - 1754), Γάλλος μαθηματικός.

η. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ παράσταση  $\left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2} \right)^7$ .

**Λύση:** Γράφουμε τό μιγαδικό ἀριθμό  $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2}$  σέ τριγωνομετρική μορφή.

Εἶναι  $\rho = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{6}{4}} = \sqrt{2}$  καί, ἀφοῦ τό σημεῖο  $\left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2} \right)$  ἀνήκει στό (I) τεταρτη-

μόριο, ἡ συνθ  $= \frac{1}{2}$  δίνει  $\theta = \frac{\pi}{3}$  (πρωτεῦον ὄρισμα). Ἄρα:

$\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ . Ἀπό τό Θεώρημα De Moivre βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2} \right)^7 &= \left[ \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \right]^7 = (\sqrt{2})^7 \cdot \left( \cos 7 \cdot \frac{\pi}{3} + i \sin 7 \cdot \frac{\pi}{3} \right) = \\ &= 8\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 8\sqrt{2} \left( \frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 4\sqrt{2} + 4i\sqrt{6}. \end{aligned}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΤΟΥ DE MOIVRE ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΤΗΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

**§ 142. Ὑπολογισμός τών νιοστών ριζών μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ.** α) Ὅρισμός.— Ονομάζουμε νιοστή ρίζα ενός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ  $a \neq (0, 0)$  καί τή συμβολίζουμε μέ  $\sqrt[v]{a}$ , κάθε μιγαδικό ἀριθμό  $z$  τέτοιο, ὥστε νά ισχύει:  $z^v = a$ .

Ωστε:

$$\boxed{\sqrt[v]{a} = z \iff z^v = a} \quad (1)$$

Θά ἀποδείξουμε τώρα ὅτι ὑπάρχει ἕνας τουλάχιστο μιγαδικός ἀριθμός  $z$  πού ἱκανοποιεῖ τήν (1).

Ἀκριβέστερα θά ἀποδείξουμε τό ἐπόμενο:

**Θεώρημα.** (ὑπόθεσις νιοστῆς ρίζας ενός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ).— Ἄν  $a = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ ,  $a \neq 0$ , εἶναι ὁποιοσδήποτε μιγαδικός ἀριθμός, τότε ὑπάρχουν  $v$  ἀκριβῶς διαφορετικές μεταξύ τους ρίζες, δηλαδή ἡ ἐξίσωση:

$$z^v = a \quad (1)$$

ἔχει  $v$  διαφορετικές μεταξύ τους ρίζες πού δίνονται ἀπό τόν τύπο:

$$z_k = \sqrt[v]{\rho} \left[ \cos \left( \frac{\theta + 2k\pi}{v} \right) + i \sin \left( \frac{\theta + 2k\pi}{v} \right) \right], \quad (\tau)$$

ὅπου  $k = 0, 1, 2, \dots, (v-1)$ .

**Απόδειξη.** Ἐστω ὅτι ὁ μιγαδικός ἀριθμός:  $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

ἐπαληθεύει τήν ἐξίσωση (1). Τότε, σύμφωνα μέ τόν τύπο τοῦ De Moivre, ἔχουμε:

$$\rho^v [\cos(v\varphi) + i \sin(v\varphi)] = \rho^v (\cos \theta + i \sin \theta). \quad (2)$$

Ἡ (2) ὁμως ἀληθεύει τότε καί μόνο τότε, ἂν:

$$\rho^v = \rho \quad \text{και} \quad v\varphi = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ἀπό αὐτές λαμβάνουμε:  $\rho = \sqrt[v]{\rho}$  \*) καί  $\varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{v}, \quad k \in \mathbb{Z}.$

\*  $\sqrt[v]{\rho}$  εἶναι ἡ θετική νιοστή ρίζα τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ  $\rho$ .



Ωστε:

$$z = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[ \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right], \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

Απόδειξαμε λοιπόν ότι υπάρχουν μιγαδικοί αριθμοί που ορίζονται από την (3) για τις διάφορες άκεραιες τιμές του  $k$  που ικανοποιούν την (1).

Θα αποδείξουμε, τώρα, ότι  $n$  μόνο από αυτούς είναι διαφορετικοί μεταξύ τους για τις διάφορες άκεραιες τιμές του  $k$ . Ακριβέστερα θα αποδείξουμε ότι: "Αν ο άκεραιος  $k$  λάβει τις τιμές  $0, 1, 2, \dots, \lambda, \dots, \mu, \dots, n-1$ , τότε από την (3) προκύπτουν, αντιστοίχως,  $n$  αριθμοί:  $z_0, z_1, z_2, \dots, z_\lambda, \dots, z_\mu, \dots, z_{n-1}$  που είναι διαφορετικοί μεταξύ τους. Ακόμη θα αποδείξουμε ότι, αν ο  $k$  πάρει τιμή διαφορετική από τις:  $0, 1, 2, \dots, n-1$ ; δηλαδή αν  $k \geq n$  ή  $k < 0$ , τότε ο μιγαδικός αριθμός  $z$  που προκύπτει από την (3) θα συμπίπτει με έναν από τους:  $z_0, z_1, z_2, \dots, z_\lambda, \dots, z_\mu, \dots, z_{n-1}$ .

Πράγματι, πρώτα-πρώτα ας δώσουμε στο  $k$  τις  $n$  διαδοχικές τιμές:  $0, 1, 2, \dots, (n-1)$ . τότε από την (3) λαμβάνουμε  $n$  αριθμούς:  $z_0, z_1, z_2, \dots, z_\lambda, \dots, z_\mu, \dots, z_{n-1}$  που έχουν το

ίδιο μέτρο  $\sqrt[n]{\rho}$  και όρισματα, αντιστοίχως, τά:

$$\frac{\theta}{n}, \frac{\theta + 2\pi}{n}, \frac{\theta + 4\pi}{n}, \dots, \frac{\theta + 2\lambda\pi}{n}, \dots, \frac{\theta + 2\mu\pi}{n}, \dots, \frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n}.$$

Αυτοί οι  $n$  αριθμοί:  $z_0, z_1, z_2, \dots, z_\lambda, \dots, z_\mu, \dots, z_{n-1}$  είναι διαφορετικοί μεταξύ τους, γιατί αν δυο από αυτούς ήταν ίσοι, έστω οι  $z_\lambda$  και  $z_\mu$ , όπου  $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ ,  $\lambda \neq \mu$  και  $0 \leq \lambda, \mu < n$ , θα έπρεπε:

$$\frac{\theta + 2\lambda\pi}{n} - \frac{\theta + 2\mu\pi}{n} = 2k'\pi, \quad k' \in \mathbb{Z}.$$

Δηλαδή:  $\lambda - \mu = k'n, \quad k' \in \mathbb{Z}.$

Είναι όμως  $0 < |\lambda - \mu| < n$  και συνεπώς  $0 < |k'n| < n$ , δηλ.  $0 < |k'| < 1$ , αλλά αυτό είναι άτοπο, επειδή δεν υπάρχει  $k' \in \mathbb{Z}$  με  $0 < |k'| < 1$ .

Ωστε:  $z_\lambda \neq z_\mu \quad \forall \lambda, \mu \in [0, n-1], \lambda \neq \mu$  και  $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}.$

Ας δοῦμε τώρα τί συμβαίνει, αν ο  $k$  πάρει άκεραιες τιμές έξω από τό διάστημα  $[0, n-1]$ , δηλ. τί συμβαίνει για  $k \geq n$  ή  $k < 0$ .

Εφόσον  $k \notin [0, n-1]$ , αν ονομάσουμε  $\lambda$  τό πηλίκο και  $k_1$  τό υπόλοιπο τής διαιρέσεως  $k : n$  θά είναι:  $k = \lambda n + k_1$ , όπου  $\lambda$  και  $k_1$  είναι άκεραίοι με  $0 \leq k_1 < n$ , δηλ.  $k_1 \in [0, n-1]$ .

Εχουμε τότε:

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[ \cos \frac{\theta + 2(\lambda n + k_1)\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2(\lambda n + k_1)\pi}{n} \right] = \\ &= \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[ \cos \left( \frac{\theta + 2k_1\pi}{n} + 2\lambda\pi \right) + i \sin \left( \frac{\theta + 2k_1\pi}{n} + 2\lambda\pi \right) \right] = \\ &= \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[ \cos \left( \frac{\theta + 2k_1\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\theta + 2k_1\pi}{n} \right) \right] = z_{k_1}, \quad k_1 = 0, 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Δηλαδή, αν  $k \neq 0, 1, 2, \dots, n-1$  (με άλλα λόγια αν  $k \geq n$  ή  $k < 0$ ), τότε ο μιγαδικός αριθμός  $z$  που προκύπτει από την (3) συμπίπτει με έναν από τους:  $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ .

Ωστε, πράγματι, υπάρχουν ακριβώς  $n$  διαφορετικοί μεταξύ τους αριθμοί, που έπαλη-θεύουν την εξίσωση:

$$z^n = a = \rho(\cos \theta + i \sin \theta),$$

και δίνονται από τον τύπο:

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[ \cos \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right] \quad (4)$$

όπου  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ .

**Σημείωση.** Στην ειδική περίπτωση που ο  $a$  είναι θετικός αριθμός όποτε  $\theta = 0$ , τότε οι  $n$  (διαφορετικές) λύσεις τής εξίσώσεως  $x^n = a$  δίνονται από τον τύπο:

$$z_k = \sqrt[n]{a} \cdot \left[ \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right] \quad (4')$$

όπου  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ .

**Παρατήρηση.** Από τό παραπάνω θεώρημα προκύπτει ότι κάθε μιγαδικός αριθμός  $a \neq 0$  έχει  $n$  νιοστές ρίζες· με άλλα λόγια: στους μιγαδικούς αριθμούς τό σύμβολο  $\sqrt[n]{a}$  είναι  $n$ -σήμαντο.

Προσέξτε! στο  $\mathbb{R}$  ή νιοστή ρίζα πραγματικοῦ αριθμοῦ μπορεί και νά μήν υπάρξει.

**Πόρισμα.**— Για κάθε  $z \in \mathbb{C}$  ισχύει:

$$\left| \sqrt[n]{z} \right| = \sqrt[n]{|z|}.$$

**Εφαρμογές: 1η.** Νά βρεθοῦν οι  $\sqrt[3]{8i}$ .

**Λύση:** Έχουμε:  $8i = 8 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$  και ο τύπος (4) τής § 142 δίνει:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{8i} &= \sqrt[3]{8 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)} = \sqrt[3]{8} \left( \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right) = \\ &= 2 \left[ \cos \left( \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right], \quad k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

$$\text{Γιά } k = 0: \quad 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} + i.$$

$$\text{Γιά } k = 1: \quad 2 \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = -\sqrt{3} + i$$

$$\text{Γιά } k = 2: \quad 2 \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = 0 - 2i = -2i.$$

**2η.** Νά βρεθοῦν οι  $\sqrt[4]{2 + 2i\sqrt{3}}$

**Λύση.** Έχουμε  $2 + 2i\sqrt{3} = 4 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$  και ο τύπος (4) τής § 142 για  $n = 4$ ,

$\rho = 4, \theta = \frac{\pi}{3}$  δίνει:

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[4]{4 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)} = \sqrt[4]{4} \cdot \left[ \cos \left( \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4} \right) \right] = \\ &= \sqrt{2} \cdot \left[ \cos \left( \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$



Για  $k = 0, 1, 2, 3$  βρίσκουμε αντίστοιχως:

$$z_0 = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right), \quad z_1 = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right),$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{13\pi}{12} + i \sin \frac{13\pi}{12} \right), \quad z_3 = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right).$$

**§ 143. Γεωμετρική παράσταση των νιοστών ριζών ενός μιγαδικού αριθμού.**— Έστω ο μιγαδικός αριθμός  $a = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ , με νιοστές ρίζες:

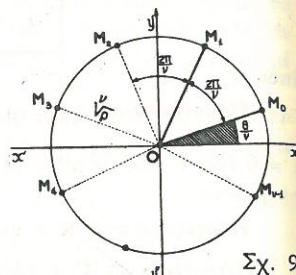
$$z_0 = \sqrt[n]{\rho} \left[ \cos \frac{\theta}{n} + i \sin \frac{\theta}{n} \right]$$

$$z_1 = \sqrt[n]{\rho} \left[ \cos \left( \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n} \right) \right]$$

$$z_2 = \sqrt[n]{\rho} \left[ \cos \left( \frac{\theta}{n} + \frac{4\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\theta}{n} + \frac{4\pi}{n} \right) \right]$$

$$\dots \dots \dots$$

$$z_{n-1} = \sqrt[n]{\rho} \left[ \cos \left( \frac{\theta}{n} + (n-1) \frac{2\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\theta}{n} + (n-1) \frac{2\pi}{n} \right) \right].$$



Σχ. 9

Παρατηρούμε ότι όλες οι νιοστές ρίζες του  $a$  έχουν τό ίδιο μέτρο, δηλαδή  $|z_k| = \sqrt[n]{\rho}$ ,  $k = 0, 1, \dots, (n-1)$ , και όρισμα τέτοιο ώστε από κάποια αρχική τιμή  $\frac{\theta}{n}$  νά αυξάνει αδιάκοπα κατά  $\frac{2\pi}{n}$ . Τοῦτο σημαίνει ότι, αν πάρουμε τις εικόνες  $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$  των ριζών στο μιγαδικό επίπεδο, αυτές θα βρίσκονται πάνω σ' έναν κύκλο μέ κέντρο  $O$  και ακτίνα  $\sqrt[n]{\rho}$ , και θα είναι μάλιστα κορυφές κανονικού πολυγώνου μέ  $n$  πλευρές έγγεγραμμένου στον κύκλο αυτό.

**§ 144. Έφαρμογή του τύπου του De Moivre στην επίλυση διώνυμων εξισώσεων.**— Κάθε εξίσωση της μορφής:

$$z^n - a = 0 \quad (8)$$

όπου  $a \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$  και  $n$  φυσικός αριθμός μεγαλύτερος από τό 1 ( $n > 1$ ) ονομάζεται διώνυμη εξίσωση.

Οι λύσεις της (8) δίνονται από τον τύπο (4) της σελίδας 197.

Τό θεώρημα της §142 εκφράζει ισοδύναμα ότι: μέσα στο σύνολο  $\mathbb{C}$  ή διώνυμη εξίσωση (8) έχει  $n$  διακεκριμένες ρίζες.

**Έφαρμογές: 1η.** Νά επιλυθεί ή εξίσωση:  $z^n - 1 = 0$  (1)

**Λύση.** Αυτή γράφεται  $z^n = 1$ . Έπειδή  $1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$ , ο τύπος (4) της σελίδας 197 (βλ. και σημείωση της § 142) δίνει άμέσως για  $n = n$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\theta = 0$ :

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (2)$$

Για καθεμία από τις τιμές του  $k$ , προκύπτει από τη (2) και μία ρίζα της εξίσωσης (1).

Άρα ή εξίσωση (1) έχει  $n$  ρίζες που τις λέμε νιοστές ρίζες της μονάδας.

Για  $k = 0$  έχουμε από τη (2) τη ρίζα  $z_0 = 1$ . Καί έπειδή, σύμφωνα μέ τον τύπο του De Moivre, είναι:

$$\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} = \left( \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

οι νιοστές ρίζες της μονάδας είναι οι δυνάμεις:

$$1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1},$$

όπου:

$$\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}.$$

**Σημ.** Κάθε ρίζα  $z_k$  της μονάδας, ή οποία έχει την ιδιότητα νά δίνει τις άλλες ρίζες ως

δυνάμεις της, τη λέμε **αρχική ν-οστή ρίζα της μονάδας**. Π.χ. ή  $z_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \equiv \omega$  είναι αρχική ν-οστή ρίζα της μονάδας, έπειδή:

$$z_1^0 = z_0, \quad z_1^1 = z_1, \quad z_1^2 = z_2, \quad z_1^3 = z_3, \dots, z_1^{n-1} = z_{n-1}.$$

**Ειδικές περιπτώσεις: 1)** Για  $n = 2$  έχουμε τη διώνυμη εξίσωση  $z^2 - 1 = 0$ , της οποίας ρίζες είναι οι αριθμοί: 1 και -1.

**2)** Για  $n = 3$  έχουμε τη διώνυμη εξίσωση:  $z^3 - 1 = 0$ . Οι λύσεις της εξίσωσης αυτής είναι οι **κυβικές ρίζες της μονάδας**.

Αν  $\omega_k$  είναι μία κυβική ρίζα της μονάδας, έχουμε από τον τύπο (4') της Σημ. της § 142:

$$\omega_k = 1 \cdot \left[ \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3} \right], \quad 0 \leq k \leq 2.$$

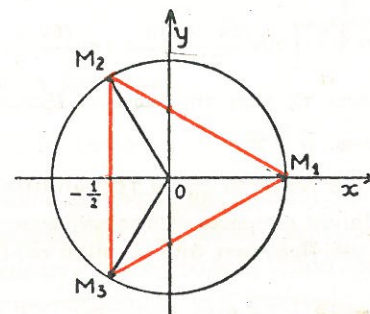
Από τον παραπάνω τύπο για  $k = 0, 1, 2$  λαμβάνουμε:

$$\omega_0 = 1(\cos 0 + i \sin 0) = 1$$

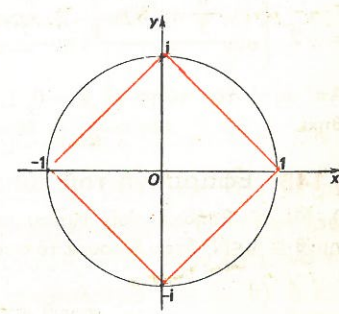
$$\omega_1 = 1 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\omega_2 = 1 \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου έγγεγραμμένου στο μοναδιαίο κύκλο (βλ. Σχ. 10).



Σχ. 10



Σχ. 11

Οι κυβικές ρίζες της μονάδας έχουν τις πιο κάτω χαρακτηριστικές ιδιότητες:

- α)  $\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 = 0$ , β)  $\omega_1 \omega_2 = 1 \wedge \omega_1 + \omega_2 = -1$ , γ)  $\omega_0^3 = \omega_1^3 = \omega_2^3 = 1$   
 δ)  $\omega_1^2 = \omega_2 \wedge \omega_2^2 = \omega_1$ , ε)  $\omega_1^2 + \omega_1 + 1 = 0$ , στ)  $\omega_2^2 + \omega_2 + 1 = 0$



Από τις δύο τελευταίες ιδιότητες βλέπουμε ότι οι μιγαδικές κυβικές ρίζες  $\omega_1, \omega_2$  της μονάδας είναι ρίζες του τριωνύμου:  $x^2 + x + 1$  και γι' αυτό οι παραπάνω ιδιότητες των κυβικών ριζών της μονάδας είναι πολύ χρήσιμες στη διαιρετότητα των πολυνύμων και κυρίως όταν έχουμε διαιρέτη τό:  $x^2 + x + 1$ .

3) Για  $n = 4$  έχουμε τη διώνυμη εξίσωση:  $z^4 - 1 = 0$ , ή όποια έχει ως ρίζες τους άρρητους:  $1, i, -1, -i$ . Οι εικόνες των ριζών αυτών στο μιγαδικό επίπεδο είναι οι 4 κορυφές του τετραγώνου του σχήματος 11 της σελίδας 199, που είναι εγγεγραμμένο στο μοναδιαίο κύκλο.

**2η. Νά επιλυθεί η εξίσωση:**  $z^6 + 64i = 0$ .

**Λύση.** Έχουμε:

$$z^6 = -64i = 64(-i) = 64 \left[ \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right].$$

Ο τύπος (4) της σελίδας 197 για  $n = 6$ ,  $\rho = 64$  και  $\theta = -\frac{\pi}{2}$  γράφεται:

$$z_k = \sqrt[6]{64} \left[ \cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{6}\right) \right], \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

$$\text{Για } k = 0 \text{ είναι: } z_0 = 2 \left( \cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12} \right) = \sqrt{2 + \sqrt{3}} - i\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

$$\text{Για } k = 1 \text{ είναι: } z_1 = 2 \left( \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2}(1 + i). \quad \text{κτλ.}$$

**3η. Νά επιλυθεί η εξίσωση:**  $z^3 = 1 + i\sqrt{3}$ .

**Λύση.** Θέτουμε πρώτα-πρώτα τό  $1 + i\sqrt{3}$  σε τριγωνομετρική μορφή. Σ' αυτή την περίπτωση θά έχουμε:

$$\rho = \sqrt{1^2 + 3} = 2 \quad \text{και} \quad \theta = \text{Arg}(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{Άρα:} \quad 1 + i\sqrt{3} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = 2 \left( \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \right).$$

Συνεπώς ο τύπος (4) της § 142 για  $n = 3$ ,  $\rho = 2$ ,  $\theta = \frac{\pi}{3}$  δίνει:

$$z_k = \sqrt[3]{2} \left[ \cos\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3} \right] = \sqrt[3]{2} \left[ \cos\frac{(6k+1)\pi}{9} + i\sin\frac{(6k+1)\pi}{9} \right].$$

Απ' αυτό τον τύπο με  $k = 0, 1, 2$  βρίσκουμε τις ρίζες της διώνυμης εξίσωσης που μάς δόθηκε.

### § 145. Έφαρμογή του τύπου του De Moivre στην τριγωνομετρία. —

α). Με τη βοήθεια του τύπου του De Moivre μπορούμε να υπολογίσουμε τό συνθ και τό ημθ  $\forall n \in \mathbb{N}$ , όταν ξέρουμε τό συνθ και τό ημθ. Πράγματι, από τον τύπο του De Moivre έχουμε:

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

Αν τώρα στον παραπάνω τύπο αναπτύξουμε τό δεύτερο μέλος του, σύμφωνα με τον τύπο του διώνυμου του Νεύτωνα (Newton), και κατόπιν εξισώσουμε τά πραγματικά τους μέρη και τούς συντελεστές των φανταστικών μερών τους βρίσκουμε τύπους που δίνουν τά συνθ και ημθ.

Έτσι για  $n = 2$  ο τύπος του De Moivre:

$$\cos 2\theta + i\sin 2\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^2$$

δίνει, αν αναπτύξουμε και τό δεύτερο μέλος του:

$$\cos 2\theta + i\sin 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta + i 2\cos\theta \sin\theta$$

όποτε έχουμε:

$$\begin{cases} \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \sin 2\theta = 2\cos\theta \sin\theta \end{cases} \quad (1)$$

Επίσης για  $n = 3$  ο τύπος του De Moivre:

$$\cos 3\theta + i\sin 3\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^3$$

δίνει, αφού αναπτύξουμε και τό δεύτερο μέλος:

$$\cos 3\theta + i\sin 3\theta = \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta \sin\theta - 3\cos\theta \sin^2\theta - i\sin^3\theta$$

και συνεπώς:

$$\begin{cases} \cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta \sin^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \\ \sin 3\theta = 3\cos^2\theta \sin\theta - \sin^3\theta = 3\cos^2\theta \sin\theta - \sin^3\theta \end{cases} \quad (2)$$

β). Οι παραπάνω τύποι (1) και (2) μάς επιτρέπουν, αντιστρόφως, να εκφράσουμε τό συν $\theta$  και ημ $\theta$  (για  $n = 2, 3$ ) συναρτήσει των συνθ, ημθ και συνθ ή ημθ.

Έτσι, από τούς τύπους της ομάδας (1) λαμβάνουμε:

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \\ \sin\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \end{cases} \quad (3)$$

Από τούς τύπους της ομάδας (2) λαμβάνουμε:

$$\begin{cases} \cos^3\theta = \frac{3}{4}\cos\theta + \frac{1}{4}\cos 3\theta \\ \sin^3\theta = \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta \end{cases} \quad (4)$$

Μπορούμε επίσης να εκφράσουμε τό συν $\theta$  και ημ $\theta$  συναρτήσει του συν $2\theta$  και συν $4\theta$ . Πράγματι, αν ύψώσουμε στο τετράγωνο την πρώτη σχέση της ομάδας (3) έχουμε:

$$\begin{aligned} \cos^2\theta &= \left( \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{4}\cos^2 2\theta \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{8}\cos 4\theta. \end{aligned} \quad (5)$$

Ομοίως βρίσκουμε:

$$\sin^2\theta = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{8}\cos 4\theta. \quad (6)$$

**Ανακεφαλαίωση.** Οι όρισμοί και οι κυριότερες ιδιότητες του μέτρου και του όρισματος ενός μιγαδικού αριθμού που απορρέουν από τις προτάσεις που αναφέραμε στις προηγούμενες παραγράφους συνοψίζονται στον επόμενο πίνακα, αν χρησιμοποιήσουμε για συντομία και τό συμβολισμό  $z \equiv (\rho, \theta)$  ή  $z \equiv [\rho, \theta]$  όπου  $\rho$  τό μέτρο και  $\theta$  τό όρισμα του μιγαδικού αριθμού  $z \neq 0$ .

Υστερα απ' αυτό έχουμε:

$$z = x + iy = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \equiv (\rho, \theta).$$



| ΜΕΤΡΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ<br>$z = x + iy = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \equiv (\rho, \theta)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | ΟΡΙΣΜΑ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ<br>$z = x + iy = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \equiv (\rho, \theta)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>α). 'Ορισμός:</b><br>$ z  = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$<br><b>β). 'Ιδιότητες:</b><br>1. $ z_1 z_2  =  z_1  \cdot  z_2 $<br>2. $\left  \frac{z_1}{z_2} \right  = \frac{ z_1 }{ z_2 }$<br>3. $\left  \frac{1}{z} \right  = \frac{1}{ z }$<br>4. $ z^v  =  z ^v$<br>5. $\left  \prod_{k=1}^v z_k \right  = \prod_{k=1}^v  z_k $<br>6. $ \bar{z}  =  x - iy  = \rho$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | <b>α'). 'Ορισμός:</b><br>$\operatorname{Arg} z = \theta, \cos\theta = \frac{x}{\rho}, \sin\theta = \frac{y}{\rho}$<br><b>β'). 'Ιδιότητες:</b><br>1'. $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$<br>2'. $\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$<br>3'. $\operatorname{Arg} \frac{1}{z} = -\operatorname{Arg} z$<br>4'. $\operatorname{Arg} z^v = v \cdot \operatorname{Arg} z$<br>5'. $\operatorname{Arg} \prod_{k=1}^v z_k = \sum_{k=1}^v \operatorname{Arg} z_k$<br>6'. $\operatorname{Arg} \bar{z} = -\theta$ |
| <b>γ). Πράξεις</b><br>$z_1 z_2 = (\rho_1, \theta_1) \cdot (\rho_2, \theta_2) = [\rho_1 \rho_2, \theta_1 + \theta_2]$<br>$z_1 : z_2 = (\rho_1, \theta_1) : (\rho_2, \theta_2) = \left[ \frac{\rho_1}{\rho_2}, \theta_1 - \theta_2 \right]$<br>$z^v = (\rho, \theta)^v = [\rho^v, v\theta], v \in \mathbb{N}$<br>$z^{-1} = (\rho, \theta)^{-1} = \left[ \frac{1}{\rho}, -\theta \right]$<br>$z = (\rho, \theta) \Rightarrow \bar{z} = (\rho, -\theta)$<br><b>δ). Διωνυμες εξισώσεις:</b><br>$z^v = a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \equiv (r, \varphi)$<br>Έχει $v$ ρίζες: $z_k = \sqrt[v]{r} \left[ \cos\frac{\varphi + 2k\pi}{v} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{v} \right] \equiv \left[ \sqrt[v]{r}, \frac{\varphi + 2k\pi}{v} \right]$ ,<br>όπου $k = 0, 1, 2, \dots, v-1$ . |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**'Ομάδα Α'. 297.** Νά γραφούν με τριγωνομετρική μορφή οι μιγαδικοί αριθμοί:

α)  $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ , β)  $-3 + 4i$ , γ)  $\sqrt{3} - 3i$ , δ)  $2 + 2\sqrt{3}i$ , ε)  $3\sqrt{3} + 3i$ ,

στ)  $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ , ζ)  $-\sqrt{3} + i$ , η)  $\frac{1+i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+i}$ , θ)  $1 + \cos\theta + i\sin\theta$ .

298. Νά βρεθεί τό μέτρο και τό δρισμα τοῦ:

$$\left[ \frac{1+i+\sqrt{3}(1-i)}{1+i} \right]^3$$

299. Νά βρεῖτε τό μέτρο και τό δρισμα καθενός ἀπό τούς παρακάτω ἀριθμούς:

i)  $(1 + \cos\theta + i\sin\theta)^2$ , ii)  $1 - \cos\theta + i\sin\theta$ .

300. \*Αν  $v$  φυσικός ἀριθμός, νά ἀποδείξετε ὅτι:

(α).  $(\cos\theta - i\sin\theta)^v = \cos(v\theta) - i\sin(v\theta)$

(β).  $(\cos\theta + i\sin\theta)^{-v} = \cos(-v\theta) + i\sin(-v\theta)$ .

301. \*Αν  $z = \cos\theta + i\sin\theta$  και  $v \in \mathbb{N}$ , νά ἀποδείξετε ὅτι:

$z^v + z^{-v} = 2\cos(v\theta)$

$z^v - z^{-v} = 2i\sin(v\theta)$ .

302. Νά ἀποδείξετε ὅτι:

α)  $(1+i)^{12} = -64$ , β)  $(1+i)^{-6} = (2i)^{-3}$ , γ)  $(1+i)^{10} = 32i$ ,

δ)  $(\sqrt{3}+i)^{150} = -2^{150}$ , ε)  $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{13} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ , στ)  $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{3k} = 1 \forall k \in \mathbb{Z}$ .

303. Νά ἀποδείξετε ὅτι:

α)  $(1+i)^v + (1-i)^v = 2^{\frac{v+2}{2}} \cdot \cos\frac{v\pi}{4}, v \in \mathbb{N}$ ,

β)  $(1+i)^v - (1-i)^v = i2^{\frac{v+2}{2}} \cdot \sin\frac{v\pi}{4}, v \in \mathbb{N}$ .

304. Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐπόμενες ἐξισώσεις:

α)  $z^3 = 1 - i\sqrt{3}$ , β)  $z^6 \pm 64 = 0$ , γ)  $4z^7 + 1 = 0$ , δ)  $z^3 + 8i = 0$ ,

ε)  $z^{12} + 1 = 0$ , στ)  $z^4 = -8 - 8\sqrt{3}i$ , ζ)  $z^5 = -\sqrt{3} + i$ , η)  $3x^5 + 24x^2 = 0$ .

305. \*Αν  $\omega_1, \omega_2$  εἶναι οἱ μιγαδικές κυβικές ρίζες τῆς μονάδας, νά ἀποδείξετε ὅτι:

1)  $(1 + \omega_2)^4 = \omega_1$ , 2)  $(1 + \omega_1 - \omega_2)^3 - (1 - \omega_1 + \omega_2)^3 = 0$ ,

3)  $(1 + 2\omega_1 + 3\omega_2)(1 + 3\omega_1 + 2\omega_2) = 3$ , 4)  $(1 - \omega_1 + \omega_2)(1 + \omega_1 - \omega_2) = 4$ .

306. \*Εστω ὁ μιγαδικός ἀριθμός:

$$z = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}.$$

Θέτουμε:  $A = z + z^2 + z^4$  και  $B = z^3 + z^5 + z^6$ .

Νά σχηματίσετε ἐξίσωση β' βαθμοῦ, τῆς ὁποίας ρίζες εἶναι οἱ:  $A, B$ .

**'Ομάδα Β'. 307.** Νά ἀποδείξετε ὅτι ὁ μιγαδικός ἀριθμός  $z = \cos\theta + i\sin\theta \neq -1$

μπορεῖ νά πάρει τή μορφή:  $z = \frac{1+i\lambda}{1-i\lambda}$ , ὅπου  $\lambda$  κατάλληλος πραγματικός ἀριθμός.

308. Νά βρεῖτε τό μέτρο και τό δρισμα τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν  $z = x + iy$ , ( $x, y \in \mathbb{R}$ ), πού ἱκανοποιοῦν καθεμία ἀπό τίς παρακάτω ἰσότητες:

i).  $|z|^2 - 2iz + 2\alpha(1+i) = 0$ , ii).  $z^2 - 3|z| + \alpha^2 = 0$ ,

ὅπου  $\alpha$  θετικός πραγματικός ἀριθμός.

309. Μὲ ἐφαρμογή τοῦ τύπου τοῦ De Moivre νά λύσετε τήν ἐξίσωση  $z^6 + 64 = 0$ . Νά σημειώσετε τά δρίσματα τῶν 6 ριζῶν. Πῶς παριστάνονται γεωμετρικά οἱ ρίζες αὐτές;



310. Νά υπολογίσετε τά  $\lambda$  καί  $\mu$ , ὥστε ὁ μιγαδικός ἀριθμός:  $\sqrt{2}$  (συν45°+i ημ45°) νά εἶναι ρίζα τῆς ἐξίσωσης:

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + \lambda x + \mu = 0.$$

Ποιές εἶναι οἱ ἄλλες ρίζες;

311. Δίνεται τό πολυώνυμο:

$$\varphi(x) \equiv 6x^4 + (6\lambda - 5)x^3 + (6\mu - 5\lambda + 1)x^2 + (\lambda - 5\mu)x + \mu.$$

\*Αν εἶναι γνωστό ὅτι τό  $\varphi(x)$  δέχεται ὡς ρίζα τό μιγαδικό ἀριθμό  $1 + i$ , νά υπολογίσετε τά  $\lambda$ ,  $\mu$  καί νά βρεῖτε τίς ἄλλες ρίζες τοῦ πολυωνύμου  $\varphi(x)$ .

312. Δίνεται κανονικό πολύγωνο μέ  $n$  πλευρές ἐγγεγραμμένο στό μοναδιαῖο κύκλο. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό γινόμενο  $P$  τῶν ἀποστάσεων μιᾶς κορυφῆς του ἀπό τίς ὑπόλοιπες  $(n-1)$  κορυφές του εἶναι ἴσο μέ  $n$ , δηλαδή:  $P = n$ .

313. Νά βρεῖτε τίς ρίζες τῆς ἐξίσωσης:

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n - 1 = 0.$$

314. Νά ἀποδείξετε ὅτι τίς ρίζες τῆς ἐξίσωσης:

$$(1+z)^{2n} + (1-z)^{2n} = 0$$

μᾶς τίς δίνει ὁ τύπος:

$$z = i \operatorname{εφ} \frac{2k+1}{4n} \pi,$$

ὅπου  $k = 0, 1, 2, \dots, 2n-1$ .

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII

### ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ – ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

#### Ι. ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ. ΟΡΙΣΜΟΙ – ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

**\*§ 146. Εισαγωγικές έννοιες.**— Στήν προηγούμενη τάξη μάθαμε γιά τίς δυνάμεις μέ βάση ὁποιοδήποτε θετικό ἀριθμό καί ἐκθέτη ρητό ἀριθμό καί ἀποδείξαμε τίς κυριότερες ιδιότητές τους.

Υπενθυμίζουμε ἐδῶ μέ συντομία τίς ιδιότητες αὐτές:

Γιά κάθε  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$  καί  $x, y \in \mathbb{Q}$  ( $\mathbb{Q}$ : τὸ σύνολο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν) ἰσχύουν:

- 1).  $\alpha^x \alpha^y = \alpha^{x+y}$
- 2).  $(\alpha \cdot \beta)^x = \alpha^x \cdot \beta^x$
- 3).  $\alpha^x: \alpha^y = \alpha^{x-y}$
- 4).  $(\alpha^x)^y = \alpha^{xy}$
- 5).  $\alpha^x = 1 \iff x = 0 \ (\alpha \neq 1)$
- 6).  $\alpha^x = \alpha^y \iff x = y \ (\alpha \neq 1)$
- 7).  $\alpha > \beta \implies \begin{cases} \alpha^x > \beta^x, \text{ ἂν } x > 0 \\ \alpha^x < \beta^x, \text{ ἂν } x < 0 \end{cases}$
- 8).  $x > y \iff \begin{cases} \alpha^x > \alpha^y, \text{ ἂν } \alpha > 1 \\ \alpha^x < \alpha^y, \text{ ἂν } 0 < \alpha < 1. \end{cases}$

Εἰδικά γιά  $\alpha = 1$  ἰσχύει:  $\alpha = 1 \wedge x \neq y \implies \alpha^x = \alpha^y = 1$ .

\*Ὡστε: γιά  $\alpha > 0$  ἡ δύναμη  $\alpha^x$  εἶναι τελείως ὀρισμένη στήν περίπτωση πού ὁ ἐκθέτης  $x$  εἶναι ἕνας ὁποιοσδήποτε ρητός ἀριθμός.

Γεννιέται ὁμως τό ἐρώτημα: τί ἐννοοῦμε ὅταν γράφουμε  $\alpha^{1/2}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  καί πῶς γενικά  $\alpha^x$ , στήν περίπτωση πού ὁ ἐκθέτης  $x$  εἶναι ἄρρητος ἀριθμός; Δηλαδή πῶς ὀρίζεται γενικά ἡ ἔννοια: «δύναμη μέ βάση (ὁποιοδήποτε) θετικό ἀριθμό  $\alpha$  καί ἐκθέτη (ὁποιοδήποτε) πραγματικό ἀριθμό  $x$ »; Θά ὀρίσουμε ἀκριβῶς τώρα τήν ἔννοια αὐτή.

\*Αποδεικνύεται \* στά Μαθηματικά ἡ ἐξῆς πρόταση:

**Πρόταση.**—Γιά κάθε  $\alpha > 0$  καί κάθε ἀκολουθία  $\rho_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  ρητῶν ἀριθμῶν μέ  $\rho_n \rightarrow x^{**}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , ἡ ἀκολουθία  $\alpha^{\rho_n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  συγκλίνει σ' ἕνα θετικό ἀριθμό, ὁ ὁποῖος δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τήν ἀκολουθία  $(\rho_n)$  (ἀρκεῖ μόνο  $\rho_n \rightarrow x$ ).

Δίνεται τώρα ὁ ἐπόμενος ὀρισμός:

**\*Ορισμός.** \*Ο πραγματικός ἀριθμός, ἀκριβέστερα ὁ θετικός ἀριθμός, πού ὀρί-

\* Ἡ ἀπόδειξη θά δοθεῖ στήν ἄλλη τάξη.

\*\* Ὑπάρχει τέτοια ἀκολουθία, γιατί ἀποδεικνύεται ὅτι:  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  μέ  $\alpha < \beta \exists \rho \in \mathbb{Q} : \alpha < \rho < \beta$ .



ζεται μονοσήμαντα, σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση, και πού είναι ή οριακή τιμή της ακολουθίας ( $\alpha^n$ ), όπου ( $\rho_n$ ) οποιαδήποτε ακολουθία ρητών αριθμών με  $\rho_n \rightarrow x$ , ονομάζεται: **δύναμη με βάση το θετικό αριθμό  $\alpha$  και εκθέτη τον πραγματικό αριθμό  $x$  και συμβολίζεται με:  $\alpha^x$ .**

Ώστε:

$$\alpha^x = \lim_{\rho \rightarrow x} \alpha^{\rho_n}$$

Είναι φανερό πώς ο πιο πάνω όρισμός περικλείει το γνωστό σε μας από την προηγούμενη τάξη όρισμό της δύναμews με ρητό εκθέτη. Έτσι εξάλλου δικαιολογείται και ο συμβολισμός του  $\lim \alpha^{\rho_n}$  με το  $\alpha^x$ , επειδή αν  $x \in \mathbb{Q}$ , τότε μία ακολουθία ρητών αριθμών συγκλίνουσα στο  $x$  είναι ή σταθερή ακολουθία  $\rho_n = x$ , για κάθε  $n = 1, 2, \dots$ . Τότε όμως έχουμε:

$$\alpha^{\rho_n} = \alpha^x \rightarrow \alpha^x.$$

Σύμφωνα όμως με την προηγούμενη πρόταση για κάθε ακολουθία  $\rho_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  ρητών αριθμών με  $\rho_n \rightarrow x$  ή ακολουθία  $\alpha^{\rho_n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  συγκλίνει σ' ένα θετικό αριθμό πού δεν εξαρτάται από την ακολουθία ( $\rho_n$ ) και επομένως πάλι θά ισχύει:

$$\alpha^{\rho_n} \rightarrow \alpha^x.$$

Συνοψίζοντας λοιπόν τά προηγούμενα συμφωνούμε ότι:

$$\alpha^x = \lim \alpha^{\rho_n}$$

όπου  $\rho_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  ακολουθία ρητών αριθμών με  $\rho_n \rightarrow x$ , ανεξάρτητα αν ο  $x$  είναι ρητός ή άρρητος αριθμός, δηλαδή για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Οί γνωστές ιδιότητες των δυνάμεων με ρητούς εκθέτες, τις όποιες αναφέραμε στην αρχή αυτής της παραγράφου, αποδεικνύεται ότι ισχύουν και στην περίπτωση δυνάμεων με εκθέτες άρρητους αριθμούς και συνεπώς με εκθέτες (όποιουσδήποτε) πραγματικούς αριθμούς.

**Σημείωση.** Από τον όρισμό της δύναμews  $\alpha^x$  με  $\alpha > 0$  και  $x \in \mathbb{R}$  προκύπτει ότι ορίζεται μία συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  με τύπο:  $f(x) = \alpha^x$ .

Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **εκθετική συνάρτηση με βάση το  $\alpha$ .**

Ειδικά την εκθετική συνάρτηση πού έχει βάση τον αριθμό  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,7182\dots$ , δηλ. τη συνάρτηση  $f$  με τύπο:  $f(x) = e^x$ , τη λέμε απλώς **εκθετική συνάρτηση**.

**§ 147. Η έννοια του λογαρίθμου θετικού αριθμού.**— Είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο ότι: αν  $\alpha > 0$ , τότε  $\alpha^x > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Δηλαδή ή δύναμη  $\alpha^x$  ισούται με θετικό αριθμό, όταν  $\alpha > 0$ , ανεξάρτητα από το αν ο εκθέτης  $x$  είναι θετικός, αρνητικός ή μηδέν. Ειδικά για  $\alpha = 1$  οί δυνάμεις  $1^x$  είναι ίσες με 1 για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Οί δυνάμεις όμως  $\alpha^x$ , όπου  $0 < \alpha \neq 1$  και  $x \in \mathbb{R}$  όχι μόνο είναι θετικές για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , αλλά όταν το  $x$  μεταβάλλεται στο διάστημα:  $-\infty < x < +\infty$ , τότε ή συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \alpha^x$  παίρνει ως τιμές όλους τους θετικούς αριθμούς. Άκριβέστερα, αποδεικνύεται στα Μαθηματικά ή εξής πρόταση:

**Πρόταση.**— Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό  $\alpha$  διάφορο της μονάδας, δηλ. για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$  με  $0 < \alpha \neq 1$ , και κάθε πραγματικό αριθμό  $\theta > 0$  υπάρχει ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός  $x$  (ρητός ή άρρητος) με την ιδιότητα:

$$\alpha^x = \theta \quad (1)$$

Από την παραπάνω πρόταση οδηγούμαστε τώρα στο να δώσουμε τον εξής όρισμό:

**Όρισμός.** Το μοναδικό, σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση, πραγματικό αριθμό  $x$ , για τον οποίο ισχύει ή σχέση:

$$\alpha^x = \theta, \text{ όπου } \alpha > 0, \alpha \neq 1 \text{ και } \theta > 0$$

τον ονομάζουμε **λογάριθμο του  $\theta$  ως προς βάση  $\alpha$  και τον παριστάνουμε με  $\log_\alpha \theta$ .**

$$\text{Ώστε:} \quad x = \log_\alpha \theta \quad (2)$$

Ειδικά για  $\alpha = 10$  γράφουμε:  $\log \theta$  αντί  $\log_{10} \theta$  και τον ονομάζουμε **δεκαδικό λογάριθμο**.

Άμεση συνέπεια του πιο πάνω όρισμού είναι ή (λογική) ισοδυναμία:

$$\log_\alpha \theta = x \iff \alpha^x = \theta \quad (3)$$

Από την (3) συνάγεται τώρα ο εξής κανόνας:

Αν ξέρουμε το λογάριθμο ενός θετικού αριθμού  $\theta$ , τότε ο αριθμός αυτός είναι ίσος με δύναμη πού έχει ως βάση τή βάση  $\alpha$  των λογαρίθμων και εκθέτη το λογάριθμο του αριθμού αυτού.

Επειδή  $x = \log_\alpha \theta$ , ή σχέση (1) γράφεται:

$$\alpha^{\log_\alpha \theta} = \theta \text{ και λέγε-}$$

ται **βασική λογαριθμική ταυτότητα**.

Έτσι έχουμε τις ισοδυναμίες:

$$\log_\alpha \theta = x \iff \alpha^x = \theta \iff \alpha^{\log_\alpha \theta} = \theta \quad (0 < \alpha \neq 1, \theta > 0).$$

**Παραδείγματα:**

|                                       |                                       |                                                 |                                               |
|---------------------------------------|---------------------------------------|-------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| 1) $\log_{10} 100 = 2$ ,              | επειδή $10^2 = 100$                   | 5) $\log_{10} 0,001 = -3$ ,                     | επειδή $10^{-3} = 0,001$                      |
| 2) $\log_2 8 = 3$ ,                   | » $2^3 = 8$                           | 6) $\log_{1/2} \left(\frac{1}{16}\right) = 4$ , | » $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ |
| 3) $\log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$ | » $2^{1/3} = \sqrt[3]{2}$             | 7) $\log_{1/\sqrt{2}} 1 = 0$ ,                  | » $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^0 = 1$     |
| 4) $\log_{1/3} 9 = -2$ ,              | » $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$ | 8) $\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$ ,            | » $(3)^{1/2} = \sqrt{3}$                      |

**Γενική παρατήρηση.** Παντού, στά επόμενα, θά υπολογίζουμε μόνο λογαρίθμους θετικών αριθμών. Λογαρίθμους αρνητικών αριθμών, ακριβέστερα μη θετικών αριθμών ούτε ορίζουμε ούτε μεταχειριζόμαστε. Ύστερα από αυτά ο  $\log_\alpha x$  έχει νόημα πραγματικού αριθμού, τότε και μόνο τότε, αν:

$$x > 0 \text{ και } 0 < \alpha \neq 1$$



Έτσι, π.χ., ο  $\log_2(3x-2)$  έχει νόημα πραγματικού αριθμού, αν:  $3x-2 > 0$  και  $0 < x \neq 1$ . Δηλαδή αν:  $x \in \left(\frac{2}{3}, 1\right) \cup (1, +\infty)$ .

**§ 148. Βάση λογαρίθμων – Λογαριθμικά συστήματα.**— 'Ο πραγματικός αριθμός  $\alpha$ , πού είναι θετικός και διάφορος της μονάδας, δηλ.  $0 < \alpha \neq 1$ , λέγεται **βάση** των λογαρίθμων. Από τον όρισμό του λογαρίθμου θετικού αριθμού προκύπτει ότι μπορούμε να σχηματίσουμε άπειρα συστήματα λογαρίθμων, αφού ως βάση μπορούμε να λάβουμε τον οποιοδήποτε θετικό πραγματικό αριθμό πού είναι διάφορος της μονάδας. Στα Μαθηματικά κυρίως χρησιμοποιούμε τα εξής δύο λογαριθμικά συστήματα:

**1ο: Τό δεκαδικό λογαριθμικό σύστημα.** Σ' αυτό παίρνουμε ως βάση  $\alpha$  τον αριθμό 10. 'Ο λογάριθμος ενός (θετικού) αριθμού  $\theta$  στο σύστημα αυτό ονομάζεται, όπως είπαμε και πιο πάνω, **δεκαδικός λογάριθμος** και συμβολίζεται απλώς με:  $\log \theta$  αντί  $\log_{10} \theta$ . Έτσι έχουμε:  $\log \theta = x \iff 10^x = \theta$ .

Οι δεκαδικοί λογάριθμοι λέγονται και «κοινοί λογάριθμοι» και χρησιμοποιούνται εύρυντα στα στοιχειώδη μαθηματικά για πρακτικούς κυρίως σκοπούς.

**2ο: Τό Νεπέρειο λογαριθμικό σύστημα.** Σ' αυτό τό σύστημα παίρνουμε ως βάση τον αριθμό  $e = 2,7182\dots$ , ο οποίος ορίζεται ως τό όριο της ακολουθίας  $\left(1 + \frac{1}{v}\right)^v$ ,  $v = 1, 2, \dots$ . 'Η ακολουθία αυτή αποδεικνύεται ότι είναι αύξουσα (βλ. άσκ. 93) και άνω φραγμένη, επομένως (§ 66) συγκλίνει στο  $\mathbf{R}$ . 'Ονομάζουμε  $e = \lim \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v$ . 'Ο αριθμός  $e$  παίζει σπουδαίο ρόλο στην 'Ανάλυση και γενικά στα Μαθηματικά, ανήκει στο διάστημα:  $(2, 3)$ , δηλ.  $2 < e < 3$ , δέν είναι λοιπόν ο αριθμός  $e$  άκέραιος, δέν είναι όμως ούτε και ρητός, άκόμη ούτε άλγεβρικός (§ 112). Είναι ένας υπερβατικός αριθμός (§ 112). Μία προσέγγιση του  $e$  με 20 δεκαδικά ψηφία είναι:  $e \simeq 2,71828182845904523536$ . 'Ο λογάριθμος ενός αριθμού  $\theta$  στο σύστημα αυτό λέγεται **νεπέρειος λογάριθμος**\* του  $\theta$  και συμβολίζεται με  $\log \theta$  ή  $\ln \theta$  (αντί:  $\log_e \theta$ ). Έτσι έχουμε:

$$\log \theta = x \iff e^x = \theta. \quad (\ln \theta = x \iff e^x = \theta).$$

Οι νεπέρειοι λογάριθμοι λέγονται και «φυσικοί λογάριθμοι» και συναντώνται κυρίως στα 'Ανώτερα Μαθηματικά.

\* **Άξιοσημείωτες παρατηρήσεις.** 1) Από τον όρισμό του  $\log_\alpha x$  πού ορίζεται για κάθε  $x > 0$  προκύπτει ότι για κάθε  $0 < \alpha \neq 1$  ορίζεται μία συνάρτηση  $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$  με τύπο:  $f(x) = \log_\alpha(x) \equiv \log_\alpha x$ . Δηλαδή ορίζεται ή συνάρτηση:

$$f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}: x \rightarrow f(x) = \log_\alpha x \quad (0 < \alpha \neq 1)$$

\* Προς τιμή του 'Αγγλου Μαθηματικού John Napier (1550 - 1617) πρώτου έπινοητή των λογαρίθμων. Πρώτος ο Napier έλαβε ως βάση τον αριθμό  $e = 2,7182\dots$ . 'Ο συμβολισμός «ln» προέρχεται από τό αρχικό γράμμα (l) της λέξεως: logarithm και τό μικρό γράμμα (n) του αρχικού της λέξεως Napier.

Αυτή ή συνάρτηση ονομάζεται **λογαριθμική συνάρτηση με βάση  $\alpha$** .

Από τον όρισμό αυτής της συναρτήσεως προκύπτει άμέσως ότι:

$$y = \log_\alpha x \iff \alpha^y = x \quad (x \in \mathbf{R}^+)$$

και συνεπώς:

$$y = \log x \iff e^y = x \quad (x \in \mathbf{R}^+)$$

2) Σύμφωνα με τη βασική λογαριθμική ταυτότητα ισχύει:

$$\alpha^{\log_\alpha x} = x \quad \forall \alpha \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

και ειδικά για  $\alpha = e$  ισχύει:

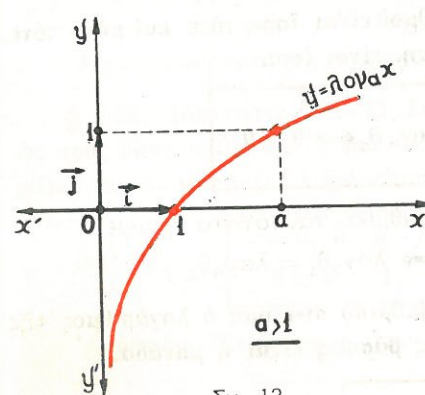
$$e^{\log x} = x$$

όποτε συνάγουμε ότι:

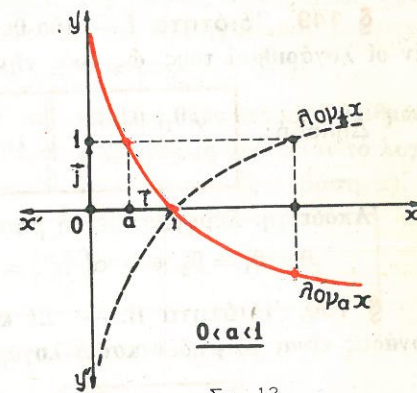
$$\alpha^x = (e^{\log \alpha})^x = e^{x \log \alpha}, \text{ δηλαδή } \boxed{\alpha^x = e^{x \log \alpha}}$$

3) 'Η λογαριθμική συνάρτηση, πού όπως είδαμε πιο πάνω έχει πεδίο όρισμού τό  $(0, +\infty)$  και πεδίο τιμών τό  $\mathbf{R}$ , είναι, όπως θά μάθουμε στην άλλη τάξη, («ή αντίστροφη συνάρτηση της εκθετικής συναρτήσεως  $x = a^y$ ») (βλ. σημείωση § 146).

Σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα άξόνων ή γραφική παράσταση της λογαριθμικής συναρτήσεως:  $y = \log_\alpha x$  δίνεται, με πρόχειρη σχεδίαση, από τά άμέσως επόμενα σχήματα:



Σχ. 12



Σχ. 13

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Ομάδα Α'. 315.** Νά προσδιορίσετε τον  $x$  από τις παρακάτω ισότητες:

- 1)  $\log_4 x = 3$ , 2)  $\log x = -3$ , 3)  $\log_2 \left(\frac{1}{2}\right) = x$ , 4)  $\log_{\sqrt{3}} (9\sqrt{3}) = x$ ,  
5)  $\log_{4/9} \frac{27}{8} = x$ , 6)  $\log_8 x = -\frac{7}{3}$ , 7)  $\log_{2\alpha} \sqrt{2\alpha} = x$ , 8)  $\log_2 \left(\frac{1}{\sqrt{32}}\right) = x$ .

**316.** Νά βρείτε την άγνωστη βάση  $x \in \mathbf{R}^+$ ,  $x \neq 1$ , από τις παρακάτω ισότητες:

- 1)  $\log_x 25 = 2$ , 2)  $\log_x 16 = \frac{2}{3}$ , 3)  $\log_x 5 = \frac{1}{3}$ , 4)  $\log_x \left(\frac{81}{16}\right) = 4$ .

**317.** Νά υπολογίσετε τούς λογαρίθμους των αριθμών:

$$81, \quad 64, \quad \frac{1}{32}, \quad \sqrt{2}, \quad \frac{1}{125}, \quad 27, \quad 4\sqrt{2}, \quad 1000$$

με βάση αντίστοιχως τούς αριθμούς:

$$3, \quad \frac{1}{2}, \quad 2, \quad 4, \quad 5, \quad 3, \quad 2, \quad 0,01.$$



318. Για ποιές τιμές του  $x \in \mathbb{R}$  έχει νόημα πραγματικού αριθμού καθεμιά από τις έπο-  
μενες εκφράσεις:

$$1) \log(1 - |x|), \quad 2) \log_2(3 - 2x), \quad 3) \log_{2x}(x^2 - x + 1).$$

★ **Ομάδα Β.** 319. "Αν  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $a \neq 1$  και ονομάσουμε:  $x = \log_{\sqrt{a}} a$ ,  $y = \log_a a^2$ ,  
 $z = \log_{a^2} a^4$ , νά αποδείξετε ότι ισχύει:  $xyz = x + y + z + 2$ .

320. Νά αποδείξετε ότι: για κάθε  $a, b \in \mathbb{R}^+$  και  $x, y \in \mathbb{R}$  ισχύει:

$$1) a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \quad 2) a^x : a^y = a^{x-y}, \quad 3) (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

**Υπόδειξη.** "Εστω ότι είναι  $(\rho_v), (r_v)$  δύο όποιοσδήποτε ακολουθίες με ρητούς όρους  
τέτοιες, ώστε:  $\rho_v \rightarrow x, r_v \rightarrow y$ . Τότε, σύμφωνα με την πρόταση της § 146, θα έχουμε:  $a^{\rho_v} \rightarrow a^x$   
και  $a^{r_v} \rightarrow a^y$ , οπότε κτλ.

321. "Αν  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$  και ονομάσουμε:  $x = \log_{\alpha}(\beta\gamma)$ ,  $y = \log_{\beta}(\gamma\alpha)$ ,  $z = \log_{\gamma}(\alpha\beta)$ ,  
νά αποδείξετε ότι:  $x + y + z + 2 = xyz$  και  $a^{x-2} \cdot b^{y-2} \cdot \gamma^{z-2} = 1$ .

322. Νά αποδείξετε ότι  $\log_3$  είναι άρρητος (= ασύμμετρος) αριθμός.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ \*

**§ 149. Ίδιότητα I.**— Δύο θετικοί αριθμοί είναι ίσοι, τότε και μόνο τότε,  
αν οι λογάριθμοί τους, ως προς την ίδια βάση, είναι ίσοι.

$$\text{Δηλαδή: } \begin{array}{|l} \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}^+ \\ 0 < a \neq 1 \end{array} \quad \log_a \theta_1 = \log_a \theta_2 \iff \theta_1 = \theta_2$$

**Απόδειξη.** Σύμφωνα με τη βασική λογαριθμική ταυτότητα έχουμε:

$$\theta_1 = \theta_2 \iff a^{\log_a \theta_1} = a^{\log_a \theta_2} \iff \log_a \theta_1 = \log_a \theta_2.$$

**§ 150. Ίδιότητα II.**— Σε κάθε λογαριθμικό σύστημα ο λογάριθμος της  
μονάδας είναι τό μηδέν και ο λογάριθμος της βάσεως είναι ή μονάδα.

$$\text{Δηλαδή: } \log_a 1 = 0 \quad \text{και} \quad \log_a a = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}.$$

**Απόδειξη.** Όπως είδαμε παραπάνω (§ 147) ισχύει:  $\log_a \theta = x \iff a^x = \theta$ ,

$$\text{οπότε: } \left. \begin{array}{l} \log_a 1 = x \iff a^x = 1 \iff x = 0 \\ \text{και } \log_a a = y \iff a^y = a \iff y = 1 \end{array} \right\} \quad \forall a \in (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

**§ 151. Ίδιότητα III.**— "Ο λογάριθμος του γινομένου δύο θετικών αριθ-  
μών, ως προς βάση  $a$  ( $0 < a \neq 1$ ), ισούται με τό άθροισμα των λογαρίθμων αυτών  
των αριθμών (οί λογάριθμοι λαμβάνονται ως προς την ίδια βάση  $a$ ).

$$\text{Δηλαδή: } \begin{array}{|l} \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}^+ \\ 0 < a \neq 1 \end{array} \quad \log_a(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$$

**Απόδειξη.** "Ας ονομάσουμε  $x = \log_a \theta_1$  και  $y = \log_a \theta_2$ . Τότε  $a^x = \theta_1$  και  $a^y = \theta_2$ ,

\* ακριβέστερα ιδιότητες της λογαριθμικής συναρτήσεως  $\log_a$  ( $0 < a \neq 1$ ).

$$\text{οπότε: } a^{x+y} = a^x \cdot a^y = \theta_1 \cdot \theta_2 \iff \log_a(\theta_1 \cdot \theta_2) = x + y = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2.$$

**Σημείωση.** "Η παραπάνω ιδιότητα αποδεικνύεται και ως εξής:

$$\log_a(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2 \iff a^{\log_a(\theta_1 \cdot \theta_2)} = a^{\log_a \theta_1 + \log_a \theta_2} \iff a^{\log_a(\theta_1 \cdot \theta_2)} = a^{\log_a \theta_1} \cdot a^{\log_a \theta_2} \iff \log_a(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2.$$

**Παρατήρηση.** "Αν  $x, y$  είναι όμοσημοι πραγματικοί αριθμοί, τότε ισχύει:

$$\log_a(xy) = \log_a |x| + \log_a |y| \quad \forall a \in (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

Πράγματι, τότε έχουμε:  $xy > 0 \implies xy = |xy| = |x| \cdot |y|$ . "Αρα ...

**Πόρισμα.**— "Αν  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  ( $n \geq 2$ ) είναι θετικοί αριθμοί, τότε ισχύει:

$$\log_a(\theta_1 \cdot \theta_2 \cdot \dots \cdot \theta_n) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2 + \dots + \log_a \theta_n$$

Για συντομία γράφουμε:

$$\log_a \left( \prod_{k=1}^n \theta_k \right) = \sum_{k=1}^n \log_a \theta_k$$

"Η απόδειξη γίνεται εύκολα με τη μέθοδο της τέλειας έπαγωγής, αφού  
είναι γνωστό ότι για  $n = 2$  ισχύει, σύμφωνα με την προηγούμενη ιδιότητα.

"Αμεση συνέπεια της προηγούμενης ιδιότητας είναι και ή εξής:

**§ 152. Ίδιότητα IV.**— "Ο λογάριθμος του πηλίκου δύο θετικών αριθμών,  
ως προς βάση  $a$  ( $0 < a \neq 1$ ), ισούται με τό λογάριθμο του διαιρέτου μείον τό λογά-  
ριθμο του διαιρέτη (οί λογάριθμοι λαμβάνονται ως προς την ίδια βάση  $a$ ).

$$\text{Δηλαδή: } \begin{array}{|l} \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}^+ \\ 0 < a \neq 1 \end{array} \quad \log_a \left( \frac{\theta_1}{\theta_2} \right) = \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2$$

**Απόδειξη.** Σύμφωνα με την προηγούμενη ιδιότητα έχουμε:

$$\log_a \theta_1 = \log_a \left( \frac{\theta_1}{\theta_2} \cdot \theta_2 \right) = \log_a \frac{\theta_1}{\theta_2} + \log_a \theta_2$$

και συνεπώς:

$$\log_a \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2.$$

**Παρατήρηση.** "Αν  $x, y$  είναι όμοσημοι πραγματικοί αριθμοί, τότε ισχύει:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y| \quad (\text{γιατί:})$$

**Πόρισμα.**—Οί αντίστροφοι θετικοί αριθμοί έχουν αντίθετους λογαρίθμους.

Πράγματι: από τις ιδιότητες IV και II έχουμε:

$$\log_a \left( \frac{1}{\theta} \right) = \log_a 1 - \log_a \theta = 0 - \log_a \theta = -\log_a \theta.$$

**Αξιόλογη παρατήρηση.** Πρέπει νά έχουμε πάντοτε υπόψη μας ότι:

$$\log_a(\theta_1 + \theta_2) \neq \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$$



$$\begin{aligned}\log_a(\theta_1 - \theta_2) &\neq \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2 \\ \log_a \theta_1 \cdot \log_a \theta_2 &\neq \log_a(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2 \\ \log_a \theta_1 : \log_a \theta_2 &\neq \log_a \left( \frac{\theta_1}{\theta_2} \right) = \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2.\end{aligned}$$

**§ 153. Ίδιότητα V.**—Ο λογάριθμος οποιασδήποτε δυνάμεως ενός θετικού αριθμού ως προς βάση  $a$  ( $0 < a \neq 1$ ) ισούται με τό γινόμενο του εκθέτη της δυνάμεως επί τό λογάριθμο της βάσεως της δυνάμεως (οί λογάριθμοι λαμβάνονται ως προς τήν ίδια βάση  $a$ ).

Δηλαδή:

|                                                                           |                                                   |
|---------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| $\forall \theta \in \mathbb{R}^+, \beta \in \mathbb{R}$<br>$0 < a \neq 1$ | $\log_a \theta^\beta = \beta \cdot \log_a \theta$ |
|---------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|

**Απόδειξη.** Άς ονομάσουμε  $x = \log_a \theta^\beta$  ( $\beta \in \mathbb{R}$ ) και  $y = \log_a \theta$ . Τότε έχουμε:  $\alpha^x = \theta^\beta$  (1) και  $\alpha^y = \theta$  (2). Ή (1), με βάση τη (2), γράφεται:  $\alpha^x = (\alpha^y)^\beta$  και έπειδή, όπως είπαμε στην αρχή αυτού του κεφαλαίου, οί ιδιότητες των δυνάμεων με πραγματικούς εκθέτες είναι ανάλογες των αντίστοιχων ιδιοτήτων με εκθέτες ρητούς αριθμούς, θά έχουμε:  $\alpha^x = \alpha^{\beta y}$ . Ή τελευταία ισότητα, έπειδή  $0 < a \neq 1$ , ισοδυναμεί με τήν:  $x = \beta y$ , δηλαδή:

$$\log_a \theta^\beta = \beta \cdot \log_a \theta \quad \forall \beta \in \mathbb{R}.$$

**Σημείωση.** Ή παραπάνω ιδιότητα αποδεικνύεται πιό σύντομα ως εξής:

$$\alpha^{\log_a \theta^\beta} = \theta^\beta = [\alpha^{\log_a \theta}]^\beta = \alpha^{\beta \cdot \log_a \theta} \Rightarrow \log_a \theta^\beta = \beta \cdot \log_a \theta, \quad (0 < a \neq 1)$$

**Παρατήρηση.** Άν  $x$  είναι ένας οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός ( $x \neq 0$ ) και  $k$  οποιοσδήποτε άκέραιος αριθμός, τότε ισχύει:

$$\log_a x^{2k} = 2k \cdot \log_a |x| \quad (\text{γιατί};)$$

**Προσέξτε!** θά είναι σφάλμα νά γράψουμε:  $\log_a x^{2k} = 2k \cdot \log_a x$ , πρώτα γιατί για  $x < 0$  ο λογάριθμος του  $\beta$  μέρους αυτής της ισότητας δέν όρίζεται και έπειτα γιατί κατά τη λύση «λογαριθμικών» εξισώσεων, για τίς όποιες κάνουμε λόγο παρακάτω, βρίσκουμε έλλιπείς λύσεις, όπως φαίνεται και από τό επόμενο παράδειγμα:

**Νά βρείτε** τά  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$  ώστε:  $\log x^2 = 2$  (1)

**Λύση.** Ή (1) είναι ισοδύναμη με:  $2 \cdot \log |x| = 2 \Leftrightarrow \log |x| = 1 \Leftrightarrow |x| = 10 \Leftrightarrow x = \pm 10$ .

Άν όμως γράψουμε (έσφαλμένα βέβαια) τήν (1) ως:  $2 \log x = 2 \Leftrightarrow \log x = 1 \Leftrightarrow x = 10$ , τότε χάνουμε τή ρίζα  $x = -10$ .

Ειδικές περιπτώσεις της ιδιότητας V είναι τά επόμενα πορίσματα:

**Πόρισμα 1ο.**—Ο λογάριθμος οποιασδήποτε ρίζας με θετικό υπόρριζο βρίσκεται άν διαιρέσουμε τό λογάριθμο του υπορρίζου με τό δείκτη της ρίζας (οί λογάριθμοι λαμβάνονται ως προς τήν ίδια βάση  $a$ ,  $0 < a \neq 1$ ).

Δηλαδή:

|                                                                       |                                                             |
|-----------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| $\forall \theta \in \mathbb{R}^+, v \in \mathbb{N}$<br>$0 < a \neq 1$ | $\log_a \sqrt[v]{\theta} = \frac{1}{v} \cdot \log_a \theta$ |
|-----------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|

Ή απόδειξη είναι άμεση συνέπεια της προηγούμενης ιδιότητας, άρκει νά

παρατηρήσουμε ότι:  $\log_a \sqrt[v]{\theta} = \log_a \theta^{\frac{1}{v}} = \frac{1}{v} \cdot \log_a \theta$  (δηλαδή:  $\beta = \frac{1}{v}, v \in \mathbb{N}$ )

**Πόρισμα 2ο.**—Γιά κάθε  $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$  και  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει:  $\log_a a^x = x$ .

Πράγματι, έχουμε:  $\log_a a^x = x \cdot \log_a a = x \cdot 1 = x$ .

Άμεση συνέπεια της προηγούμενης ιδιότητας είναι και ή εξής:

**§ 154. Ίδιότητα VI.** (άλλαγή βάσεως λογαρίθμων).—Άν οί αριθμοί  $a, \beta, \theta$  είναι θετικοί και οί  $a$  και  $\beta$  είναι διάφοροι του 1, τότε ισχύει:

|                                                          |                        |     |
|----------------------------------------------------------|------------------------|-----|
| $\log_\beta \theta = \frac{\log_a \theta}{\log_a \beta}$ | (τύπος αλλαγής βάσεως) | (τ) |
|----------------------------------------------------------|------------------------|-----|

**Απόδειξη.** Από τή βασική λογαριθμική ταυτότητα έχουμε:  $\beta^{\log_\beta \theta} = \theta$  (1)

Άν τώρα πάρουμε τούς λογαρίθμους ως προς βάση  $a$  και τών δύο μελών της (1), σύμφωνα με τήν ιδιότητα I, θά έχουμε:  $\log_a (\beta^{\log_\beta \theta}) = \log_a \theta$  και άν λάβουμε υπόψη και τήν προηγούμενη ιδιότητα βρίσκουμε:

$$\log_\beta \theta \cdot \log_a \beta = \log_a \theta, \quad \text{όπότε: } \log_\beta \theta = \frac{\log_a \theta}{\log_a \beta} \quad (\text{άφοϋ } \log_a \beta \neq 0).$$

Ειδικές περιπτώσεις της παραπάνω ιδιότητας είναι τά πορίσματα:

**Πόρισμα 1ο.**—Γιά κάθε  $a, \beta \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$  ισχύει:  $\log_a \beta \cdot \log_\beta a = 1$

Πράγματι, από τόν τύπο αλλαγής βάσεως για  $\theta = a$  βρίσκουμε:

|                                                                         |                                                          |
|-------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| $\log_\beta a = \frac{\log_a a}{\log_a \beta} = \frac{1}{\log_a \beta}$ | (1) και συνεπώς: $\log_a \beta \cdot \log_\beta a = 1$ . |
|-------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|

**\*Παρατήρηση.** Έχοντας υπόψη τή σχέση (1) του παραπάνω πορίσματος, ό τύπος (τ) γράφεται:

|                                                        |      |
|--------------------------------------------------------|------|
| $\log_\beta \theta = \log_\beta a \cdot \log_a \theta$ | (τ') |
|--------------------------------------------------------|------|

Ο αριθμός  $M = \log_\beta a$  επί τόν όποιο άν πολλαπλασιαστεί ό  $\log_a \theta$  μās δίνει τό λογάριθμο του αριθμού  $\theta$  ως προς τή (νέα) βάση  $\beta$  ονομάζεται: **σταθερά της αλλαγής βάσεως** ή **πολλαπλασιαστής** του συστήματος βάσεως  $a$  ως προς τό σύστημα βάσεως  $\beta$ .

Ο τύπος (τ') για  $\beta = 10$  και  $a = e$  ( $e$ : βάση των νεπέριων λογαρίθμων) γράφεται:

$$\log_{10} \theta = \log_{10} e \cdot \log_e \theta, \quad \text{ή ακριβέστερα: } \log \theta = \log e \cdot \log \theta \quad (1)$$

Ή τελευταία ισότητα μās δίνει τή σχέση μεταξύ δεκαδικών και νεπέριων λογαρίθμων.

Έτσι έχουμε, σύμφωνα και με τό προηγούμενο πόρισμα:

$$\log \theta = \frac{1}{\log 10} \cdot \log \theta \quad \text{και} \quad \log \theta = \frac{1}{\log e} \cdot \log \theta \quad (2)$$

Ή σταθερά της αλλαγής βάσεως είναι:  $M = \log e = \log 2,7182 \dots = 0,43429 \dots$ , όπότε από τή δεύτερη ισότητα της (2) έχουμε:

$$\log \theta = \frac{1}{M} \cdot \log \theta \simeq \frac{1}{0,43429} \cdot \log \theta \simeq 2,30258 \cdot \log \theta$$



Ωστε: για κάθε  $\theta > 0$  ισχύει:

$$\log \theta \simeq 2,30258 \cdot \log \theta \quad \text{και} \quad \log \theta \simeq 0,43429 \cdot \log \theta$$

Από τον πρώτο τύπο βρίσκουμε το νεπέρειο λογάριθμο ενός αριθμού  $\theta > 0$ , αν ξέρουμε το δεκαδικό του λογάριθμο και από το δεύτερο τύπο βρίσκουμε το δεκαδικό λογάριθμο ενός αριθμού, αν ξέρουμε το νεπέρειο λογάριθμο αυτού του αριθμού.

**Εφαρμογή:** Αν  $\log 3 = 0,47712$ , τότε  $\log 3 \simeq 2,30258 \cdot 0,47712 = 1,09861$ .

**Πόρισμα. 2ο.**— Για κάθε  $a, \beta \in \mathbb{R}^+$ ,  $a \neq 1$  και  $\rho \in \mathbb{R} - \{0\}$  ισχύει:

$$\log_{a^\rho} \beta = \frac{1}{\rho} \log_a \beta$$

Πράγματι, από τον τύπο αλλαγής βάσεως για  $\theta = \beta$  και  $\beta = a^\rho$  έχουμε:

$$\log_{a^\rho} \beta = \frac{\log_a \beta}{\log_a a^\rho} = \frac{\log_a \beta}{\rho \cdot \log_a a} = \frac{1}{\rho} \cdot \log_a \beta.$$

**Σημείωση.** Για  $\rho = -1$  έχουμε:  $\log_{1/a} \beta = -\log_a \beta$ , δηλαδή:  $\log_{a^{-1}} = -\log_a$  (βλ. και Σχ. 13).

**Εφαρμογή.** Νά αποδείξετε ότι: αν  $a, x \in \mathbb{R}^+$  και  $a \neq 1$ , τότε ισχύει:

$$\log_a x \cdot \log_{a^2} x = \frac{1}{2} (\log_a x)^2$$

**Απόδειξη.** Σύμφωνα με το παραπάνω πόρισμα έχουμε:

$$\log_a x \cdot \log_{a^2} x = \log_a x \cdot \frac{1}{2} \log_a x = \frac{1}{2} (\log_a x)^2.$$

● Θά συμπληρώσουμε τὰ συμπεράσματα τῶν προηγούμενων παραγράφων, με μερικές ακόμη αξιοσημείωτες και χρήσιμες ιδιότητες που έχουν οι λογάριθμοι.

Ας θεωρήσουμε την ανισότητα:  $\log_a \theta_1 > \log_a \theta_2$ , όπου  $\theta_1, \theta_2$  αριθμοί θετικοί και  $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ . Ας ονομάσουμε  $x = \log_a \theta_1$  και  $y = \log_a \theta_2$ . Τότε  $a^x = \theta_1$  και  $a^y = \theta_2$ . Συγκρίνοντας τώρα τις δυνάμεις  $a^x$  και  $a^y$  και έχοντας υπόψη την ιδιότητα 8 της § 146, η οποία ισχύει και για  $x, y \in \mathbb{R}$ , παρατηρούμε ότι: για  $a > 1$  είναι  $a^x > a^y$  (επειδή  $x > y$ ) και για  $0 < a < 1$  είναι  $a^x < a^y$ . Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η ανισότητα  $\log_a \theta_1 > \log_a \theta_2$  συνεπάγεται την  $\theta_1 > \theta_2$  για  $a > 1$  και την  $\theta_1 < \theta_2$  για  $0 < a < 1$  και αντίστροφα.

Από τὰ παραπάνω οδηγούμαστε τώρα στο νά διατυπώσουμε την εξής ιδιότητα:

**§ 155. Ίδιότητα VII.**— Αν  $a, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}^+$  με  $a \neq 1$ , τότε ισχύει:

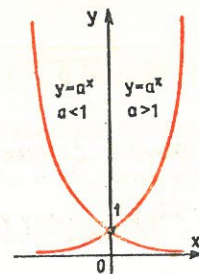
(i) Για  $a > 1$  είναι:  $\log_a \theta_1 > \log_a \theta_2 \iff \theta_1 > \theta_2$

(ii) Για  $a < 1$  είναι:  $\log_a \theta_1 > \log_a \theta_2 \iff \theta_1 < \theta_2$ .

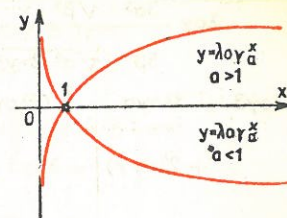
**Σχόλιο.** Όπως θά μάθουμε και στην άλλη τάξη μία συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  με  $A \subseteq \mathbb{R}$  που διατηρεί τη φυσική διάταξη των πραγματικών αριθμών, δηλαδή για την οποία ισχύει:  $x_1 > x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$  την ονομάζουμε **γνησίως αύξουσα**, ενώ αν συμβαίνει:

$$(\forall x_1, x_2 \in A): \quad x_1 > x_2 \implies f(x_1) < f(x_2),$$

την ονομάζουμε **γνησίως φθίνουσα**. Έτσι π.χ. η εκθετική συνάρτηση  $y = a^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  είναι γνησίως αύξουσα για  $a > 1$  και γνησίως φθίνουσα για  $0 < a < 1$  (βλ. Σχ. 14).



Σχ. 14



Σχ. 15

Επίσης έχοντας υπόψη τους παραπάνω ορισμούς και την προηγούμενη ιδιότητα συμπεραίνουμε ότι: η λογαριθμική συνάρτηση  $y = \log_a x$ ,  $x \in \mathbb{R}^+$  είναι γνησίως αύξουσα για  $a > 1$  και γνησίως φθίνουσα για  $0 < a < 1$  (βλ. Σχ. 15).

Ειδικά, επειδή  $e > 1$ , η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \log x$  είναι γνησίως αύξουσα.

Μία άμεση συνέπεια της ιδιότητας VII είναι το επόμενο πόρισμα:

**Πόρισμα.**— Αν  $a, \theta \in \mathbb{R}^+$  με  $a \neq 1$ , τότε ισχύει:

- (i) Για  $a > 1$  είναι:  $\begin{cases} \log_a \theta > 0, & \text{αν } \theta > 1 \\ \log_a \theta < 0, & \text{αν } \theta < 1 \end{cases}$
- (ii) Για  $a < 1$  είναι:  $\begin{cases} \log_a \theta < 0, & \text{αν } \theta > 1 \\ \log_a \theta > 0, & \text{αν } \theta < 1. \end{cases}$

**Εφαρμογές στις ιδιότητες των λογαρίθμων.**

**1η.** Αν  $\log 2 = 0,301$  και  $\log 5 = 0,698$ , νά βρείτε το  $\log 250$  και το  $\log_2 250$ .

**Λύση.** α)  $\log 250 = \log(2 \cdot 5^3) = \log 2 + 3 \log 5 = 0,301 + 3 \cdot 0,698 = 0,301 + 2,094 = 2,395$ .

$$\beta) \log_2 250 = \frac{\log 250}{\log 2} = \frac{2,395}{0,301} = 7,956.$$

**2η.** Αν  $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$ , νά εκφράσετε με μορφή αλγεβρικού άθροισματος λογαρίθμων το:

$$\log_3 \left( \frac{3a^2}{5\beta\sqrt{\gamma}} \right)$$

**Λύση.** Έχουμε:

$$\begin{aligned} \log_3 \left( \frac{3a^2}{5\beta\sqrt{\gamma}} \right) &= \log_3(3a^2) - \log_3(5\beta\sqrt{\gamma}) = \log_3 3 + \log_3 a^2 - (\log_3 5 + \log_3 \beta + \\ &+ \log_3 \sqrt{\gamma}) = 1 + 2\log_3 a - \log_3 5 - \log_3 \beta - \frac{1}{4} \log_3 \gamma. \end{aligned}$$

**3η.** Νά εφαρμόσετε όλες τις δυνατές ιδιότητες των λογαρίθμων στο:

$$\log \frac{3a^3 \cdot \sqrt{\beta^2 \cdot \gamma}}{5\beta^2 \cdot \sqrt{a^2 \cdot \beta \cdot \gamma^2}}, \quad \text{όπου } a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+.$$

**Λύση.** Έχουμε:



$$\log \frac{3\alpha^3 \cdot \sqrt[4]{\beta^2 \cdot \gamma}}{5\beta^2 \cdot \sqrt{\alpha^2 \cdot \beta \cdot \gamma^2}} = \log(3\alpha^3 \cdot \sqrt[4]{\beta^2 \cdot \gamma}) - \log(5\beta^2 \cdot \sqrt{\alpha^2 \cdot \beta \cdot \gamma^2}) =$$

$$= \left[ \log 3 + 3\log \alpha + \frac{1}{4}(2\log \beta + \log \gamma) \right] - \left[ \log 5 + 2\log \beta + \frac{1}{3}(2\log \alpha + \log \beta + \log \gamma) \right]$$

$$= \log 3 - \log 5 + \frac{7}{3}\log \alpha - \frac{11}{6}\log \beta - \frac{5}{12}\log \gamma.$$

4η. 'Αν  $\log e i = -\frac{Rt}{L} + \log e I$ , τότε  $i = I \cdot e^{-\frac{Rt}{L}}$ .

Λύση. 'Η σχέση που μᾶς δόθηκε γράφεται:

$$\log e i - \log e I = -\frac{Rt}{L} \quad \text{ή} \quad \log e \frac{i}{I} = -\frac{Rt}{L}.$$

Σύμφωνα με τὸν ὀρισμὸ τοῦ λογαρίθμου ἔχουμε ἀπὸ τὴν τελευταία ἰσότητα:

$$e^{-\frac{Rt}{L}} = \frac{i}{I} \quad \text{καὶ συνεπῶς: } i = I \cdot e^{-\frac{Rt}{L}}$$

5η. 'Αν  $\alpha > \beta > 0$  καὶ  $\alpha^2 + \beta^2 = 11\alpha\beta$ , νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\log \frac{\alpha - \beta}{3} = \frac{1}{2}(\log \alpha + \log \beta).$$

'Απόδειξη. 'Εχουμε:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 11\alpha\beta \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = 9\alpha\beta \Rightarrow \left(\frac{\alpha - \beta}{3}\right)^2 = \alpha\beta \Rightarrow \frac{\alpha - \beta}{3} = \sqrt{\alpha\beta},$$

ἐπειδὴ  $\alpha - \beta > 0$ .

Τότε ὁμως θά ἔχουμε καί:

$$\log \left(\frac{\alpha - \beta}{3}\right) = \log \sqrt{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\log \alpha + \log \beta).$$

6η. Νά ὑπολογίσετε τὴν ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παραστάσεως:

$$k = \frac{(\log_2 5 + \log_3 5) \cdot \log_6 5}{\log_2 5 \log_3 5}.$$

Λύση. Σύμφωνα με τὸ πόρισμα 1 τῆς § 154 ἔχουμε:

$$k = \frac{\left(\frac{1}{\log_5 2} + \frac{1}{\log_5 3}\right) \cdot \frac{1}{\log_5 6}}{\frac{1}{\log_5 2 \cdot \log_5 3}} = \frac{\log_5 2 + \log_5 3}{\log_5 6} = \frac{\log_5 (2 \cdot 3)}{\log_5 6} = 1.$$

7η. 'Αν  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha\beta > 0$  καὶ  $\alpha^3 + \beta^3 = 6\alpha\beta(\alpha + \beta)$ , νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\log \frac{|\alpha + \beta|}{3} = \frac{1}{2}(\log |\alpha| + \log |\beta|).$$

'Απόδειξη. 'Επειδὴ:  $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$  ἔχουμε:

$$(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 6\alpha\beta(\alpha + \beta) \Rightarrow (\alpha + \beta)^3 = 9\alpha\beta.$$

Τότε ὁμως, σύμφωνα καὶ με τὶς παρατηρήσεις τῶν παραγράφων 153 καὶ 151, θά ἔχουμε:

$$2 \cdot \log |\alpha + \beta| = \log(9\alpha\beta) = \log 9 + \log(\alpha\beta) = \log 3^2 + \log |\alpha| + \log |\beta|, \quad \text{ὁπότε:}$$

$$2\log |\alpha + \beta| - 2\log 3 = \log |\alpha| + \log |\beta| \Rightarrow \log |\alpha + \beta| - \log 3 = \frac{1}{2}(\log |\alpha| + \log |\beta|)$$

καὶ συνεπῶς:

$$\log \frac{|\alpha + \beta|}{3} = \frac{1}{2}(\log |\alpha| + \log |\beta|).$$

8η. Νά ἀποδείξετε τὴν ἀλήθεια τῆς ἰσότητος:

$$\frac{7}{16} \log(3 + 2\sqrt{2}) - 4\log(\sqrt{2} + 1) = \frac{25}{8} \log(\sqrt{2} - 1).$$

Λύση. Παρατηροῦμε ὅτι:  $3 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^2$ .

$$\text{*Αρα: } \frac{7}{16} \log(3 + 2\sqrt{2}) - 4\log(\sqrt{2} + 1) = \frac{7}{16} \log(\sqrt{2} + 1)^2 - 4\log(\sqrt{2} + 1) =$$

$$= \frac{7}{8} \log(\sqrt{2} + 1) - 4\log(\sqrt{2} + 1) = -\frac{25}{8} \log(\sqrt{2} + 1) \quad (1)$$

'Αλλά, σύμφωνα με τὸ πόρισμα τῆς § 152, ἔχουμε:

$$-\log(\sqrt{2} + 1) = \log\left(\frac{1}{\sqrt{2} + 1}\right) = \log(\sqrt{2} - 1) \quad (2)$$

'Η (1), λόγω τῆς (2), γίνεται:

$$\frac{7}{16} \log(3 + 2\sqrt{2}) - 4\log(\sqrt{2} + 1) = \frac{25}{8} \log(\sqrt{2} - 1).$$

**\*§ 156. Συλλογάρηθος ἑνὸς ἀριθμοῦ.**—Συλλογάρηθος ἑνὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ  $\theta$  ὡς πρὸς βάση  $a$  (συμβολισμός: συλλογ $_a \theta$ ), ὀνομάζουμε τὸ λογάριθμο τοῦ ἀντίστροφου τοῦ  $\theta$ , δηλ. τοῦ  $\frac{1}{\theta}$ , ὡς πρὸς τὴν ἴδια βάση.

'Ωστε:

$$\text{συλλογ}_a \theta \stackrel{\text{ορσ}}{=} \log_a \frac{1}{\theta} \quad (1)$$

$$\text{'Αλλά: } \log_a \left(\frac{1}{\theta}\right) = \log_a 1 - \log_a \theta = 0 - \log_a \theta = -\log_a \theta.$$

'Αρα:

$$\text{συλλογ}_a \theta = \log_a \frac{1}{\theta} = -\log_a \theta \quad (2)$$

'Η εἰσαγωγή τῶν συλλογαρίθμων μᾶς ἐπιτρέπει νά ἀντικαθιστοῦμε μία διαφορὰ λογαρίθμων με τὸ ἄθροισμά τους. 'Ετσι ἔχουμε:

$$\log_a \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2 = \log_a \theta_1 + \text{συλλογ}_a \theta_2.$$

**Σημείωση.** 'Απὸ τὴ (2) ἔχουμε ὅτι:

$$\log_a \theta + \text{συλλογ}_a \theta = 0 \quad (3)$$

**\* § 157. Μερικὲς ἀξιοσημείωτες καὶ χρήσιμες ἐφαρμογές.**—Σ' αὐτὴ τὴν παράγραφο θά συμπληρώσουμε τὰ συμπεράσματα τῶν προηγούμενων παραγράφων με τὶς παρακάτω ἀξιοσημείωτες ιδιότητες τῆς ἐκθετικῆς καὶ λογαριθμικῆς συναρτήσεως:

1η. 'Αν θεωρηθεῖ γνωστὸ ὅτι:  $\lim \left(1 + \frac{a}{v}\right)^v = e^a$  γιὰ κάθε  $a \in \mathbb{R}$ , νά ἀποδείξετε ὅτι ἰσχύει:



$$(i). \quad e^a \geq 1 + a \quad \text{για κάθε } a \in \mathbb{R}$$

$$(ii). \quad 1 - \frac{1}{a} \leq \log a \leq a - 1 \quad \text{για κάθε } a > 0.$$

**Απόδειξη.** (i) Για κάθε  $a \in \mathbb{R}$  ισχύει:  $\frac{a}{v} \rightarrow 0$ , οπότε για  $\varepsilon = 1$  υπάρχει δείκτης  $v_0 \in \mathbb{N}$  τέτοιος, ώστε:  $\left| \frac{a}{v} \right| < 1$ , δηλαδή:  $-1 < \frac{a}{v} < 1$  για κάθε  $v \geq v_0$ .

Ωστε για κάθε  $a \in \mathbb{R}$  τελικά ισχύει:  $1 + \frac{a}{v} > 0$ , οπότε, σύμφωνα με την ανισότητα του Bernoulli (βλ. Κεφ. II, σελ. 23) έχουμε:

$$\left(1 + \frac{a}{v}\right)^v \geq 1 + v \frac{a}{v} = 1 + a$$

και συνεπώς (πόρισμα 2ο, § 55):  $\lim \left(1 + \frac{a}{v}\right)^v = e^a \geq 1 + a$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}$ .

(ii) Έστω  $a > 0$ , τότε ορίζεται ο νεπέριος λογάριθμος  $\log a$  και όπως ξέρουμε (βλ. παρατήρηση 2, § 148) ισχύει:  $e^{\log a} = a$ . Η ανισότητα  $e^a \geq 1 + a$  που αποδείξαμε προηγούμενως ισχύει για κάθε  $a \in \mathbb{R}$ , άρα θα ισχύει και αν στη θέση του  $a$  θέσουμε τον πραγματικό αριθμό  $\log a$ , οπότε θα έχουμε:  $e^{\log a} = a \geq 1 + \log a$ . Άρα:  $\log a \leq a - 1$  (1)

Από την (1), επειδή για  $a > 0$  είναι και  $\frac{1}{a} > 0$ , λαμβάνουμε:

$$\log \frac{1}{a} \leq \frac{1}{a} - 1 \iff -\log a \leq \frac{1}{a} - 1 \iff \log a \geq 1 - \frac{1}{a} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) τελικά έχουμε ότι:

$$\forall a > 0 \quad \boxed{1 - \frac{1}{a} \leq \log a \leq a - 1} \quad (3)$$

**2η. Νά αποδείξετε ότι:** για κάθε ακολουθία  $(a_n)$  θετικών όρων με  $a_n \rightarrow a$ , όπου  $a > 0$ , ισχύει:

$$\log a_n \rightarrow \log a.$$

**Απόδειξη.** Από την ανισότητα (3) της προηγούμενης εφαρμογής έχουμε:

$$1 - \frac{a}{a_n} \leq \log \frac{a_n}{a} \leq \frac{a_n}{a} - 1$$

Αλλά  $\frac{a_n}{a} \rightarrow 1$ ,  $\frac{a}{a_n} \rightarrow 1$ , οπότε, σύμφωνα με την ιδιότητα των ισοσυγκλινουσών

ακολουθιών (§ 54), θα έχουμε:  $\log \frac{a_n}{a} \rightarrow 0$ .

Αλλά:  $\log \frac{a_n}{a} = \log a_n - \log a$ . Άρα:

$$\log \frac{a_n}{a} \rightarrow 0 \iff \log a_n - \log a \rightarrow 0 \iff \log a_n \rightarrow \log a.$$

**Ανακεφαλαίωση.** Οί όρισμοί και οί κυριότερες ιδιότητες των λογαρίθμων που απορρέουν από τις προηγούμενες παραγράφους συνοψίζονται στον επόμενο πίνακα:

#### ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ ΩΣ ΠΡΟΣ ΒΑΣΗ $\alpha$ ( $0 < \alpha \neq 1$ )

**α) Όρισμός:**  $\forall \theta \in \mathbb{R}^+$  ισχύει:

$$\log_{\alpha} \theta = x \iff \alpha^x = \theta$$

ορίζεται έτσι η ακόλουθη συνάρτηση:

$$\log_{\alpha}: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}: x \rightarrow \log_{\alpha} x$$

ή οποία είναι γνησίως αύξουσα για  $\alpha > 1$  και γνησίως φθίνουσα για  $0 < \alpha < 1$ .

**β) Ιδιότητες:**  $\forall \theta, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}^+$  ισχύει:

1.  $\alpha^{\log_{\alpha} \theta} = \theta$
2.  $\log_{\alpha} \theta_1 = \log_{\alpha} \theta_2 \iff \theta_1 = \theta_2$
3.  $\log_{\alpha} 1 = 0, \log_{\alpha} \alpha = 1$
4.  $\log_{\alpha} (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_{\alpha} \theta_1 + \log_{\alpha} \theta_2$
5.  $\log_{\alpha} \left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) = \log_{\alpha} \theta_1 - \log_{\alpha} \theta_2$
6.  $\log_{\alpha} \theta^{\beta} = \beta \cdot \log_{\alpha} \theta \quad (\beta \in \mathbb{R})$
7.  $\log_{\alpha} \sqrt[v]{\theta} = \frac{1}{v} \log_{\alpha} \theta \quad (v \in \mathbb{N})$
8.  $\log_{\alpha} \theta_1 > \log_{\alpha} \theta_2 \iff \theta_1 > \theta_2$  για  $\alpha > 1$   
 $\log_{\alpha} \theta_1 > \log_{\alpha} \theta_2 \iff \theta_1 < \theta_2, 0 < \alpha < 1$

**γ) Τύπος αλλαγής βάσεως:**

$$\log_{\beta} \theta = \frac{\log_{\alpha} \theta}{\log_{\alpha} \beta}$$

**δ) Συνέπειες των ιδιοτήτων 4, 5, 6:**

Αν  $xy > 0$ , τότε:

1.  $\log_{\alpha} (xy) = \log_{\alpha} |x| + \log_{\alpha} |y|$
2.  $\log_{\alpha} (x:y) = \log_{\alpha} |x| - \log_{\alpha} |y|$
3.  $\log_{\alpha} x^{2k} = 2k \cdot \log_{\alpha} |x|, \quad (k \in \mathbb{Z})$

#### ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

**α') Όρισμός:**  $\forall \theta \in \mathbb{R}^+$  ισχύει:

$$\log \theta = x \iff 10^x = \theta$$

ορίζεται έτσι η ακόλουθη συνάρτηση:

$$\log: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}: x \rightarrow \log x.$$

ή οποία είναι πάντοτε γνησίως αύξουσα.

**β') Ιδιότητες:**  $\forall \theta, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}^+$  ισχύει:

- 1'.  $10^{\log \theta} = \theta$
- 2'.  $\log \theta_1 = \log \theta_2 \iff \theta_1 = \theta_2$
- 3'.  $\log 1 = 0, \log 10 = 1$
- 4'.  $\log (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log \theta_1 + \log \theta_2$
- 5'.  $\log \left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) = \log \theta_1 - \log \theta_2$
- 6'.  $\log \theta^{\beta} = \beta \cdot \log \theta \quad (\beta \in \mathbb{R})$
- 7'.  $\log \sqrt[v]{\theta} = \frac{1}{v} \log \theta \quad (v \in \mathbb{N})$
- 8'. Προσέξτε! Επειδή  $\alpha = 10 > 1$  ισχύει:  
 $\log \theta_1 > \log \theta_2 \iff \theta_1 > \theta_2$

**γ') Τύπος αλλαγής βάσεως:**

$$\log_{\beta} \theta = \frac{\log \theta}{\log \beta}$$

**δ') Συνέπειες των ιδιοτήτων 4', 5', 6':**

Αν  $xy > 0$ , τότε:

- 1'.  $\log (xy) = \log |x| + \log |y|$
- 2'.  $\log (x:y) = \log |x| - \log |y|$
- 3'.  $\log x^{2k} = 2k \cdot \log |x| \quad (k \in \mathbb{Z})$

**Σημείωση.** Ειδικά για  $\alpha = e = 2,718 \dots > 1$ , η πρώτη στήλη του παραπάνω πίνακα μάς δίνει τις ιδιότητες των νεπέριων λογαρίθμων. Ο νεπέριος λογάριθμος του  $\theta$  ( $\theta > 0$ ) συνδέεται με τό δεκαδικό λογάριθμο του  $\theta$  με τη σχέση:

$$\log \theta \simeq 2,30258 \cdot \log_{\alpha} \theta.$$

Επίσης για τό νεπέριο λογάριθμο ενός αριθμού  $\theta > 0$  ισχύει και ό τύπος:

$$\boxed{1 - \frac{1}{\theta} \leq \log \theta \leq \theta - 1 < \theta}$$



# ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Ομάδα Α.** 323. Νά αποδείξετε ότι είναι αληθείς οι παρακάτω ισότητες:

$$\begin{aligned} \alpha) \log 21 &= \log 3 + \log 7, & \beta) \log 2 \frac{1}{3} &= \log 7 - \log 3, & \gamma) \log 81 &= 4 \cdot \log 3, \\ \delta) \log 3 + 2 \cdot \log 4 - \log 12 &= 2 \log 2, & \epsilon) 3 \log 2 + \log 5 - \log 4 &= 1, \\ \sigma\tau) \frac{1}{2} \log 25 + \frac{1}{3} \log 8 + \frac{1}{5} \log 32 &= 1 + \log 2. \end{aligned}$$

324. "Αν  $x, y, z \in \mathbb{R}^+$  νά εφαρμόσετε όλες τις δυνατές ιδιότητες των λογαρίθμων στους:

$$1) \log_3 3x \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{2x}}, \quad 2) \log \frac{x^3 \sqrt{y}}{4\sqrt{x} \cdot y^3}, \quad 3) \log \frac{\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[10]{2}}{\sqrt{18} \sqrt{2}}, \quad 4) \log \frac{5x^3 \sqrt[4]{y^2 z}}{7y^2 \cdot \sqrt{x^2 y z^2}}.$$

325. "Αν  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ , νά αποδείξετε ότι:  $\alpha^{\log \beta} = \beta^{\log \alpha}$ .

326. Σέ ποιο λογαριθμικό σύστημα μέ βάση μεγαλύτερη από τό 1 ισχύει:

$$\alpha) 2(\log_x 8)^2 + \log_x 64 + \log_x 8 = 9, \quad \beta) \log_x \sqrt[3]{625} - \log_x \sqrt{125} + \frac{1}{6} = 0.$$

327. Νά αποδείξετε ότι: γιά κάθε  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$  ισχύει:  $\log_\alpha \beta \cdot \log_\beta \gamma \cdot \log_\gamma \alpha = 1$ .

328. "Αν  $\alpha > 1, \beta > 1$  καί  $\alpha^2 + \beta^2 = 7\alpha\beta$ , νά αποδείξετε ότι:

$$\log \frac{\alpha + \beta}{3} = \frac{1}{2} (\log \alpha + \log \beta) \geq \sqrt{\log \alpha \cdot \log \beta}.$$

329. "Αν  $\log(x^2 y^3) = \alpha$  καί  $\log x - \log y = \beta$  νά εκφράσετε τό  $\log x$  καί  $\log y$  συναρτήσει των  $\alpha$  καί  $\beta$ .

330. "Αν  $\log 2 \cdot \log 5 = \theta$ , νά εκφράσετε τό  $\log 2$  καί τό  $\log 5$  συναρτήσει του  $\theta$ . Γιά ποιές τιμές του  $\theta$  τό πρόβλημα έχει λύση;

331. "Αν  $\alpha > 1, \beta > 1$  νά υπολογιστεί ή τιμή της παραστάσεως:

$$y = \log(\alpha^2 - 1) + \log(\beta^2 - 1) - \log[(\alpha\beta + 1)^2 - (\alpha + \beta)^2].$$

332. "Αν  $\log 2 = 0,30103$ , νά υπολογίσετε την τιμή της παραστάσεως:

$$y = \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log(2 + \sqrt{2}) + \frac{1}{2} \log(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}) + \frac{1}{2} \log(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}).$$

333. "Αν  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$  μέ  $\beta \neq 1$  καί  $\alpha\beta \neq 1$ , νά αποδείξετε ότι:  $\log_{\alpha\beta} \gamma = \frac{\log \alpha \gamma}{1 + \log \beta \alpha}$ .

334. Νά αποδείξετε ότι:  $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdots \log_7 8 = 3$ .

335. "Αν  $\alpha, \beta, \gamma, \theta \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$  καί οί  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, νά αποδείξετε ότι οί αριθμοί:  $\log_\alpha \theta, \log_\beta \theta, \log_\gamma \theta$  είναι διαδοχικοί όροι αρμονικής προόδου.

336. "Αν γιά τούς διαφορετικούς μεταξύ τους θετικούς αριθμούς  $\alpha, \beta, \gamma$  ισχύει:

$$\frac{\log \alpha}{\beta - \gamma} = \frac{\log \beta}{\gamma - \alpha} = \frac{\log \gamma}{\alpha - \beta}, \quad \text{νά αποδείξετε ότι: } \alpha^\beta \cdot \beta^\gamma \cdot \gamma^\alpha = 1.$$

337. "Αν  $\varphi(x) = \log \frac{1-x}{1+x}$ , τότε ισχύει:  $\varphi(\alpha) + \varphi(\beta) = \varphi\left(\frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}\right)$ .

338. "Αν  $0 < \alpha \neq 1$  καί  $\beta = \frac{1}{2}(\alpha^x - \alpha^{-x})$ , νά αποδείξετε ότι:  $x = \log_\alpha(\beta + \sqrt{\beta^2 + 1})$ .

339. "Αν  $\alpha, \beta, x \in \mathbb{R}^+$  μέ  $\alpha \neq 1, \beta \neq 1$  καί  $\alpha\beta \neq 1$ , νά αποδείξετε ότι:

$$\log_\alpha x + \log_\beta x = \log_{\alpha\beta} x \cdot (1 + \log_\beta \alpha)^2 \cdot \log_{\alpha\beta} x.$$

340. Νά αποδείξετε ότι: τό άθροισμα  $\Sigma$ , των  $n$  πρώτων όρων μιάς αριθμητικής προόδου μέ πρώτο όρο τό  $\log \alpha$  καί δεύτερο όρο τό  $\log \beta$  είναι:

$$\Sigma_n = \frac{1}{2} \cdot \log \frac{\beta^n (n-1)}{\alpha^n (n-3)}.$$

341. "Αν οί διαφορετικοί μεταξύ τους θετικοί αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  κατέχουν αντίστοιχως τίς τάξεις  $\mu, \nu, \rho$  σέ μία γεωμετρική καί σέ μία αρμονική πρόοδο, νά αποδείξετε ότι:

$$\alpha(\beta - \gamma) \log \alpha + \beta(\gamma - \alpha) \log \beta + \gamma(\alpha - \beta) \log \gamma = 0.$$

**Ομάδα Β.** 342. "Εστω ή συνάρτηση  $f$  μέ τύπο:  $f(x) = \log |\log x|$ .

Νά βρείτε: (i) Γιά ποιές τιμές του  $x$  ή συνάρτηση είναι όρισμένη.

(ii) Γιά ποιές τιμές του  $x$  ή συνάρτηση μηδενίζεται.

(iii) Τόν πληθικό αριθμό  $\nu(A)$  του συνόλου  $A = \{x \in \mathbb{Z} : f(x) < 0\}$ .

343. Νά βρείτε τό άθροισμα των  $n$  πρώτων όρων της σειράς  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ , αν  $\alpha_n = \log 3^n$ .

344. "Αν  $x, y \in \mathbb{R}^+, 0 < \alpha \neq 1, 0 < \beta \neq 1$  καί  $\alpha^x = \beta^y, x^y = y^x$ , νά αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{x}{\log_\alpha \beta}\right)^a = \left(\frac{y}{\log_\beta \alpha}\right)^b$$

345. "Εχοντας υπόψη ότι:  $\pi^2 = (3,14 \dots)^2 < 10$ , νά αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} > 2.$$

346. "Αν  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq \beta$ , νά αποδείξετε ότι:  $\frac{e^\alpha + e^\beta}{2} > e^{\frac{\alpha + \beta}{2}}$ .

347. "Αν  $0 < \alpha < \beta$ , νά αποδείξετε ότι:  $\frac{2}{\sqrt{\beta}} \leq \frac{\log \beta - \log \alpha}{\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}} \leq \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$ . Από αυτό κα-

τόπιν νά συμπεράνετε ότι:  $\frac{2}{3} < \log 2,25 < 1$ .

**Υπόδειξη.** Ξέρουμε ότι: γιά κάθε  $\theta > 0$  ισχύει:  $1 - \frac{1}{\theta} \leq \log \theta \leq \theta - 1 < \theta$ .

348. "Αν θεωρηθεί ως γνωστό ότι:  $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ , νά αποδείξετε ότι ή σειρά

$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ , μέ γενικό όρο  $\alpha_n = n \{ \log(n+1) - \log n \}$  δέ συγκλίνει στό  $\mathbb{R}$ .

**Υπόδειξη.** Νά λάβετε υπόψη τη 2η εφαρμογή της § 157 καί την § 99.

349. Νά αποδείξετε ότι οί σειρές  $\sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n$  καί  $\sum_{n=2}^{\infty} \beta_n$  μέ γενικούς όρους αντίστοιχως:

$$\alpha_n = \sqrt[n]{\log n}, \quad \beta_n = \frac{1}{\log n} \quad \text{άπειρίζονται θετικά.}$$

**Υπόδειξη.** Νά αποδείξετε ότι:  $\sqrt[n]{\log n} \rightarrow 1$  (βλ. καί άσκ. 117). Επίσης είναι:  $\log n < n$ .

350. "Εστω οί σειρές μέ θετικούς όρους:  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  καί  $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + \alpha_n)$ . Νά αποδείξετε ότι:



άν ή μία από αυτές συγκλίνει (άντ. άπειρίζεται φ. ικά), τότε και ή άλλη συγκλίνει (άντ. άπειρίζεται θετικά). **Έφαρμογή:**  $\alpha_n = \frac{1}{n}$ .

**Υπόδειξη.** Για  $x > -1$  ισχύει:  $\frac{x}{1+x} \leq \log(1+x) \leq x$  (γιατί;). Κατόπιν νά λάβετε υπόψη τή δεύτερη έφαρμογή τής § 105.

**351.** Έχοντας υπόψη τήν άνισότητα (3) τής § 157 νά άποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό  $n$  ισχύει:

$$\frac{1}{n+1} < \log(n+1) - \log n < \frac{1}{n}$$

Στή συνέχεια νά συμπεράνετε ότι ή άκολουθία  $(\alpha_n)$  μέ γενικό όρο:

$$\alpha_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

άπειρίζεται θετικά.

**Υπόδειξη.** Νά λάβετε υπόψη και τήν προηγούμενη άσκηση.

**352.** Άν  $\alpha, \beta, x \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$  και ισχύει:  $\log_p \alpha \cdot \log_\lambda \beta = \frac{1}{4}$ , όπου  $p = \beta^2$ ,  $\lambda = x^2$ , νά άποδείξετε ότι ό  $x$  δέν εξαρτάται από τό  $\beta$ .

**Υπόδειξη.** Νά λάβετε υπόψη τό πόρισμα 2ο τής § 154.

**353.** Άν  $x, y, z \in \mathbb{R}^+$  και είναι διάφοροι από τόν  $\alpha$ , όπου  $0 < \alpha \neq 1$ , νά άποδείξετε ότι:

$$\left( y = \alpha^{\frac{1}{1-\log_\alpha x}} \wedge z = \alpha^{\frac{1}{1-\log_\alpha y}} \right) \Rightarrow x = \alpha^{\frac{1}{1-\log_\alpha z}}$$

**354.** Άν  $\alpha, x, y \in \mathbb{R}^+$  και  $y < x$ , νά άποδείξετε ότι:  $\frac{1}{x} \log(1+\alpha^x) < \frac{1}{y} \log(1+\alpha^y)$ .

**Υπόδειξη.** Νά διακρίνετε τίς περιπτώσεις: (i)  $\alpha = 1$ , (ii)  $0 < \alpha < 1$ , (iii)  $\alpha > 1$ .

**355.** Νά άποδείξετε ότι: για κάθε  $\alpha > 0$  ή άκολουθία  $(\gamma_n)$  μέ γενικό όρο:

$$\gamma_n = (1+\alpha)(1+\alpha^2) \dots (1+\alpha^n)$$

είναι γνησίως αύξουσα και ίκανοποιεί τή σχέση:  $0 < \gamma_n < e^{\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}} \forall n \in \mathbb{N}$ .

Ειδικά για  $0 < \alpha < 1$ , νά άποδείξετε ότι υπάρχουν αριθμοί  $M$  που εξαρτώνται από τό  $\alpha$ , ώστε νά ισχύει:  $\gamma_n < M \forall n \in \mathbb{N}$ . Τέλος, νά άποδείξετε ότι: για  $0 < \alpha < 1$  ισχύει:

$$\frac{1}{1-\alpha} \leq \lim \gamma_n \leq e^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

**Υπόδειξη.** Για κάθε  $x > 0$  ισχύει  $e^x > 1+x$  (βλ. 1η έφαρμογή, § 157). Επίσης νά λάβετε υπόψη και τήν άσκηση 23 (1) τής σελίδας 27.

## II. ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

**§ 158. Όρισμοί - Ιδιότητες.** — Όπως μάθαμε και στην § 147 οί λογάριθμοι ως προς βάση 10 ονομάζονται **δεκαδικοί λογάριθμοι** και παριστάνονται μέ λογ αντί  $\log_{10}$ . Έτσι έχουμε:

$$\log \theta = x \iff 10^x = \theta \quad (1)$$

Άπό τήν παραπάνω ισοδυναμία συμπεραίνουμε ότι:

**Δεκαδικός λογάριθμος** ενός θετικού αριθμού  $\theta$  είναι ο πραγματικός αριθμός  $x$  στον οποίο πρέπει νά ύψωθεί ή βάση 10 για νά δώσει τόν αριθμό  $\theta$ .

Έτσι, π.χ., έχουμε:

$$\begin{aligned} \log 100 = 2, \text{ έπειδή } 10^2 = 100 & \quad \parallel \quad \log 1000 = 3, \text{ έπειδή } 10^3 = 1000 \\ \log 0,01 = -2, \text{ έπειδή } 10^{-2} = 0,01 & \quad \parallel \quad \log \sqrt[5]{10^3} = \frac{3}{5}, \text{ έπειδή } 10^{3/5} = \sqrt[5]{10^3}. \end{aligned}$$

Στά έπόμενα θά άσχοληθούμε **μόνο** μέ δεκαδικούς λογαρίθμους. Έτσι στό έξής μέ τόν όρο: «**λογάριθμος**» θά έννοοϋμε: «**δεκαδικό λογάριθμο**».

Οί ιδιότητες τών δεκαδικών λογαρίθμων έχουν καταγραφεί στή δεύτερη στήλη του πίνακα τής σελίδας 219. Επίπλέον, σύμφωνα και μέ τό πόρισμα τής § 155, έχουμε:

$$\theta > 1 \iff \log \theta > 0 \quad \text{και} \quad 0 < \theta < 1 \iff \log \theta < 0.$$

Επίσης είναι:

$$\log \theta \equiv \log_{10} \theta = \frac{\log \theta}{\log 10} = M \cdot \log \theta, \text{ όπου } M = \frac{1}{\log 10} = \frac{\log e}{\log 10} = \log e = 0,43429 \dots$$

Ειδικότερα για τούς δεκαδικούς λογαρίθμους ισχύουν:

**α)** Ο **λογάριθμος μιας δυνάμεως του 10 μέ εκθέτη ρητό αριθμό είναι ίσος μέ τό ρητό εκθέτη.**

Δηλαδή: άν  $\rho \in \mathbb{Q}$ , τότε  $\log 10^\rho = \rho$ .

Στήν ειδική περίπτωση που  $\rho \in \mathbb{Z}$ , ο λογάριθμος του  $10^\rho$  είναι ο άκέραιος αριθμός  $\rho$ . Έτσι π.χ.  $\log 100 = \log 10^2 = 2$ ,  $\log 0,01 = \log 10^{-2} = -2$ .

Είναι χρήσιμο νά ξέρουμε από μνήμης τούς λογαρίθμους μερικών αριθμών:

|       |     |        |       |      |     |   |    |     |      |       |     |
|-------|-----|--------|-------|------|-----|---|----|-----|------|-------|-----|
| x     | ... | 0,0001 | 0,001 | 0,01 | 0,1 | 1 | 10 | 100 | 1000 | 10000 | ... |
| log x | ... | -4     | -3    | -2   | -1  | 0 | 1  | 2   | 3    | 4     | ... |

**β)** Οί **λογάριθμοι τών αριθμών που δέν είναι δυνάμεις του 10 μέ εκθέτη ρητό αριθμό είναι άρρητοι αριθμοί.**

Πράγματι, άς θεωρήσουμε έναν (θετικό) αριθμό  $\theta$  μέ  $\theta \neq 10^\rho$ , όπου  $\rho \in \mathbb{Q}$ , και άς υποθέσουμε ότι  $\log \theta = \frac{\mu}{\nu}$ , όπου  $\mu \in \mathbb{Z}$  και  $\nu \in \mathbb{N}$ . Τότε, σύμφωνα μέ τήν

ισοδυναμία (1), θά έχουμε:  $\theta = 10^{\frac{\mu}{\nu}} \equiv 10^\rho$ , όπου  $\rho \in \mathbb{Q}$ . Αυτό όμως είναι άτοπο, λόγω τής υποθέσεως που κάναμε για τό  $\theta$ .

Άπό τά παραπάνω συμπεραίνουμε ότι: Οί **λογάριθμοι όλων τών θετικών αριθμών, εκτός από τίς δυνάμεις του 10 μέ ρητό εκθέτη, είναι άρρητοι αριθμοί και κατά συνέπεια δέν ύπολογίζονται άκριβώς, αλλά κατά προσέγγιση μιας δεκαδικής μονάδας (συνήθως ύπολογίζονται κατά προσέγγιση 0,00001).**

**γ)** Άν οί θετικοί αριθμοί  $\theta_1$  και  $\theta_2$  έχουν **πηλίκο άκέραιη δύναμη του 10**, τότε ο  $(\log \theta_1 - \log \theta_2)$  είναι **άκέραιος αριθμός**.



Πράγματι, επειδή  $\theta_1 = 10^k \cdot \theta_2$ , με  $k \in \mathbb{Z}$ , έχουμε:  $\log \theta_1 = \log 10^k + \log \theta_2 = k + \log \theta_2$ . Άρα:  $\log \theta_1 - \log \theta_2 = k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

### § 159. Χαρακτηριστικό και δεκαδικό μέρος ενός λογαρίθμου.—

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το  $\log 557$ .

Επειδή  $10^2 < 557 < 10^3$ , λογαριθμίζοντας και τα τρία μέλη θα έχουμε:

$$2 < \log 557 < 3.$$

$$\text{Άρα: } \log 557 = 2 + d, \dots$$

Επομένως:  $\log 557 = 2 + d$ , όπου  $d$  είναι ένας θετικός αριθμός μικρότερος από τη μονάδα.

Τό ακέραιο μέρος του λογαρίθμου (στό παραπάνω παράδειγμα ο αριθμός 2) λέγεται «**χαρακτηριστικό**» του λογαρίθμου και ο θετικός και μικρότερος από τη μονάδα δεκαδικός αριθμός  $d$  λέγεται «**δεκαδικό μέρος**» του λογαρίθμου. Τό χαρακτηριστικό του λογαρίθμου ενός αριθμού  $\theta$ , ( $\theta > 0$ ) τό παριστάνουμε με  $[\log \theta]$ .

Από τό παραπάνω παράδειγμα και τόν όρισμό του χαρακτηριστικού ενός λογαρίθμου παρατηρούμε ότι ως χαρακτηριστικό ενός λογαρίθμου όρίζουμε τό μικρότερο από δύο διαδοχικούς άκεραίους μεταξύ των οποίων βρίσκεται ο λογάριθμος αυτός. Έτσι έχουμε:

$$\text{Άν } \log \alpha = 5,03426, \text{ τότε } [\log \alpha] = 5 \text{ και } d = 0,03426.$$

$$\text{Άν } \log \gamma = -2,32715, \text{ τότε } [\log \gamma] = -3, \text{ επειδή } -3 < -2,32715 < -2.$$

Τό δεκαδικό μέρος του λογαρίθμου είναι μηδέν μόνο για τίς άκεραιες δυνάμεις του 10 και θετικό σε κάθε άλλη περίπτωση.

Ωστε: Τό δεκαδικό μέρος ενός λογαρίθμου είναι μη άρνητικός αριθμός.

Άν  $d$  είναι τό δεκαδικό μέρος του  $\log \theta$  και  $[\log \theta]$  τό χαρακτηριστικό του, τότε από τη σχέση:  $\log \theta = [\log \theta] + d$  προκύπτει:  $d = \log \theta - [\log \theta]$

Έτσι έχουμε: Άν  $\log \theta = -3,45217$ , τότε  $[\log \theta] = -4$  και  $d = -3,45217 - (-4) = 0,54783$ .

\* Παρατηρήσεις: α) Πιο γενικά: ως χαρακτηριστικό του  $\log_a \theta$  με  $a, \theta \in \mathbb{R}^+$  και  $a \neq 1$  όνομάζουμε τό άκέραιο μέρος (§ 44) του πραγματικού αριθμού  $\log_a \theta$ , δηλαδή τό μεγαλύτερο άκέραιο αριθμό  $k$  για τόν οποίο ισχύει:

$$k \leq \log_a \theta < k + 1 \quad (1)$$

Από τόν παραπάνω όρισμό συμπεραίνουμε ότι τό χαρακτηριστικό του  $\log_a \theta$  είναι πάντοτε ένας άκέραιος αριθμός (θετικός, άρνητικός ή τό μηδέν). Έξάλλου, επειδή  $\log_a a = 1$ , ή (1) γράφεται:

$$k \cdot \log_a a \leq \log_a \theta < (k + 1) \log_a a \Rightarrow \log_a (a^k) \leq \log_a \theta < \log_a (a^{k+1}) \quad (2)$$

Διακρίνουμε τώρα τίς περιπτώσεις:

$$(i) \text{ Άν } a > 1, \text{ τότε από τη (2) έχουμε: } a^k \leq \theta < a^{k+1} \quad (3)$$

δηλαδή οί αριθμοί  $\theta$  που ανήκουν στό διάστημα  $[a^k, a^{k+1})$ , και μόνο αυτοί, έχουν λογαρίθμους ως προς βάση  $a$  με χαρακτηριστικό τόν άκέραιο αριθμό  $k$ .

$$\text{Στήν ειδική περίπτωση που είναι } a = 10, \text{ ή (3) γράφεται: } 10^k \leq \theta < 10^{k+1} \quad (4)$$

Από την (4) συμπεραίνουμε τώρα ότι: οί θετικοί αριθμοί  $\theta$  που έχουν δεκαδικούς λογαρίθμους με χαρακτηριστικό  $k$  είναι αυτοί που έχουν  $k + 1$  άκεραία ψηφία ( $k \in \mathbb{N}_0$ ). Επίσης από την (4) συμπεραίνουμε ότι: τό χαρακτηριστικό του δεκαδικού λογαρίθμου ενός θετικού αριθμού  $\theta$  είναι ο εκθέτης της μεγαλύτερης άκεραιης δυνάμεως του 10, ή οποία δέν υπερβαίνει τόν αριθμό αυτό.

$$(ii) \text{ Άν } 0 < a < 1, \text{ τότε από τη (2) έχουμε: } a^k \geq \theta > a^{k+1} \quad (5)$$

δηλαδή οί αριθμοί που ανήκουν στό διάστημα  $(a^{k+1}, a^k]$  έχουν λογαρίθμους με χαρακτηριστικό  $k$ .

β). Είδαμε προηγουμένως ότι: Άν  $[\log \theta] = k, k \in \mathbb{Z}$ , τότε ισχύει:

$$10^k \leq \theta < 10^{k+1} \quad (6)$$

Αντιστρόφως, Άν ισχύει ή (6), τότε  $[\log \theta] = k$ . Πράγματι, από την (6) έχουμε:  $\log 10^k \leq \log \theta < \log 10^{k+1}$ , δηλ.  $k \leq \log \theta < k + 1$ . Άρα  $[\log \theta] = k$ , επειδή ο  $k$  είναι ο μεγαλύτερος άκέραιος που δέν υπερβαίνει τό  $\log \theta$ .

γ) Όπως ξέρουμε (§ 44, α) για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει:  $x = [x] + d$ , όπου  $0 \leq d < 1$ . Άρα:  $\log \theta = [\log \theta] + d$  με  $0 \leq d < 1$ . Αυτόν τό μη άρνητικό αριθμό  $d$  τόν όνομάζουμε δεκαδικό μέρος του  $\log \theta$ .

### § 160. Τροπή άρνητικού λογαρίθμου σε ήμιαρνητικό.—

Είπαμε παραπάνω ότι τό δεκαδικό μέρος ενός λογαρίθμου είναι μη άρνητικός αριθμός: επειδή όμως οί λογάριθμοι των θετικών αριθμών που είναι μικρότεροι από τη μονάδα είναι άρνητικοί, και τέτοιοι λογάριθμοι δέν είναι εύκολοι στη χρήση, γι' αυτό τούς άρνητικούς λογαρίθμους τούς μετατρέπουμε σε «ήμιαρνητικούς», δηλαδή σε λογαρίθμους που έχουν μόνο τό άκέραιο μέρος τους (χαρακτηριστικό) άρνητικό, ενώ τό δεκαδικό τους μέρος είναι θετικό.

Η μετατροπή αυτή γίνεται ως εξής:

Έστω  $-2,54327$  ή  $-2 - 0,54327$  ο λογάριθμος κάποιου αριθμού: Άν σ' αυτό προσθέσουμε τό  $-1$  και  $+1$  (και έτσι ο αριθμός δέν αλλάζει) λαμβάνουμε:

$$-2 - 1 + 1 - 0,54327 = -3 + (1 - 0,54327) = -3 + 0,45673.$$

$$\text{Ωστε είναι: } -2,54327 = -3 + 0,45673.$$

Συμφωνούμε να γράφουμε τόν αριθμό  $-3 + 0,45673$  ως εξής:  $\bar{3},45673$ : δηλαδή γράφουμε τό  $-$  πάνω από τό άκέραιο μέρος για να δείξουμε ότι μόνο αυτό είναι άρνητικό. Έτσι φαίνεται, ότι τό χαρακτηριστικό του λογαρίθμου είναι τό άκέραιο μέρος  $-3$ , επειδή  $-3 < -2,54327 < -2$ , και δεκαδικό μέρος του λογαρίθμου είναι τό δεκαδικό μέρος που είναι γραμμένο, επειδή αυτό είναι ή διαφορά που προκύπτει Άν από τό λογάριθμο  $-3 + 0,45673$  αφαιρέσουμε τό χαρακτηριστικό του  $-3$ .

Από τά παραπάνω έχουμε τόν εξής πρακτικό κανόνα:

**Κανόνας:** Για να μετατρέψουμε έναν άρνητικό λογάριθμο σε ήμιαρνητικό, αυξάνουμε την απόλυτη τιμή του άκεραίου κατά 1, στον αριθμό που προκύπτει γράφουμε από πάνω τό  $-$ , και δεξιά απ' αυτόν γράφουμε ως δεκαδικά ψηφία τούς αριθμούς που βρίσκουμε, Άν αφαιρέσουμε κάθε ψηφίο του δεκαδικού μέρους του λογαρίθμου που μάς δόθηκε από τό 9 και του τελευταίου από τό 10.

$$\text{Έτσι, π.χ.: } \text{Άν } \log \theta = -3,85732, \text{ θα έχουμε: } \log \theta = \bar{4},14268.$$

$$\text{Άν } \log \theta = -2,35724, \text{ θα έχουμε: } \log \theta = \bar{3},64276.$$



**§ 161. Ιδιότητες των δεκαδικών λογαρίθμων.**— α) Τό χαρακτηριστικό του λογαρίθμου ενός αριθμού  $\theta$  είναι ο εκθέτης της μεγαλύτερης άκεραιο δύναμεις του 10, ή οποία δεν υπερβαίνει τον αριθμό αυτό.

\*Απόδειξη. \*Ας πάρουμε ένα αριθμητικό παράδειγμα. \*Εστω ότι θέλουμε να βρούμε τό χαρακτηριστικό του:  $\log 257$ .

\*Επειδή:  $10^2 = 100 < 257 < 1000 = 10^3$  (1)

αν λάβουμε τούς λογαρίθμους των αριθμών που βρίσκονται στα τρία μέλη της (1), θά έχουμε:  $2 < \log 257 < 3$ .

Δηλαδή:  $\log 257 = 2 + d$ , όπου  $0 < d < 1$ , και συνεπώς  $[\log 257] = 2$ .

\*Εστω τώρα ότι θέλουμε να βρούμε τό  $[\log \theta]$ . \*Αν  $10^k$  είναι ή μεγαλύτερη άκεραιο δύναμη του 10 που δεν υπερβαίνει τό (θετικό) αριθμό  $\theta$ , τότε θά έχουμε:

$$10^k \leq \theta < 10^{k+1}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

οπότε:  $k \leq \log \theta < k + 1$ .

Τότε όμως ο  $\log \theta$  θά είναι ίσος ή μέ  $k$  ή μέ  $k + d$ , όπου  $0 < d < 1$ .

\*Αρα τό χαρακτηριστικό του  $\log \theta$  είναι ίσο μέ  $k$ .

β) Τό χαρακτηριστικό του λογαρίθμου ενός αριθμού  $\theta > 1$  είναι μικρότερο κατά μία μονάδα από τό πλήθος των ψηφίων του άκεραιου μέρους του  $\theta$ .

Δηλαδή: αν  $k$  είναι τό πλήθος των ψηφίων του άκεραιου μέρους του  $\theta$ , τότε τό χαρακτηριστικό του  $\log \theta$  θά είναι  $(k - 1)$ .

\*Απόδειξη. \*Ας πάρουμε πάλι ένα αριθμητικό παράδειγμα. \*Εστω  $\theta = 23,5$ .

\*Επειδή  $10 < 23,5 < 100$ , δηλ.  $10^1 < 23,5 < 10^2$ ,

δηλ.  $10^{2-1} < 23,5 < 10^2$ ,

θά έχουμε:  $(2 - 1) < \log 23,5 < 2$ .

\*Αρα:  $[\log 23,5] = 1 = 2 - 1$ .

\*Εστω τώρα ότι θέλουμε να βρούμε τό  $[\log \theta]$ , όπου  $\theta > 1$ . \*Αν τό άκεραιο μέρος του  $\theta$  έχει  $k$  ψηφία, τότε ο  $\theta$  θά περιέχεται μεταξύ των  $10^{k-1}$  και  $10^k$ , δηλ. θά έχουμε:

$$10^{k-1} \leq \theta < 10^k \Rightarrow (k - 1) \leq \log \theta < k.$$

\*Αρα τό χαρακτηριστικό του  $\log \theta$  είναι ίσο μέ  $(k - 1)$ .

\*Ετσι, π.χ. έχουμε:  $\log 5378,4 \doteq 3, \dots, \log 3,748 = 0, \dots$

γ) Τό χαρακτηριστικό του λογαρίθμου ενός θετικού αριθμού  $\theta < 1$ , ο οποίος είναι γραμμένος μέ δεκαδική μορφή, έχει τόσες άρνητικές μονάδες όση είναι ή τάξη του πρώτου σημαντικού ψηφίου του μετά την υποδιαστολή.

\*Απόδειξη. \*Εστω, π.χ. ότι  $\theta = 0,025$ , τότε:  $10^{-2} < \theta = 0,025 < 10^{-1}$

(γιατί:  $\frac{1}{100} < \frac{25}{1000} < \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{100} < \frac{1}{40} < \frac{1}{10} \Leftrightarrow 10 < 40 < 100$ )

οπότε:  $\log 10^{-2} < \log 0,025 < \log 10^{-1}$

ή  $-2 < \log 0,025 < -1$ ,

άρα:  $[\log 0,025] = -2$ .

\*Εστω τώρα ότι θέλουμε να βρούμε τό  $[\log \theta]$ , όπου  $0 < \theta < 1$ . \*Αν  $k$  είναι ή τάξη του πρώτου σημαντικού ψηφίου μετά την υποδιαστολή στη δεκαδική μορφή του  $\theta$ , θά είναι:

$$10^{-k} \leq \theta < 10^{-k+1},$$

οπότε:

$$\log 10^{-k} \leq \log \theta < \log 10^{-k+1},$$

δηλ.

$$-k \leq \log \theta < -k + 1.$$

\*Αρα:  $[\log \theta] = -k$ .

\*Ετσι, π.χ. έχουμε:  $\log 0,00729 = \bar{3}, \dots, \log 0,27508 = \bar{1}, \dots$

**Παρατήρηση.** \*Εφαρμόζοντας τίς παραπάνω ιδιότητες μπορούμε να βρίσκουμε από μνήμης τό χαρακτηριστικό του λογαρίθμου ενός αριθμού.

\*Αντιστρόφως: από τίς ιδιότητες β και γ έχουμε:

δ) \*Αν τό χαρακτηριστικό του λογαρίθμου ενός αριθμού (θετικού)  $x$  είναι αριθμός θετικός ή μηδέν, τότε ο αριθμός  $x$  έχει τόσα άκεραιο ψηφία, όσες μονάδες έχει τό χαρακτηριστικό και ένα άκόμη. \*Αν ο λογάριθμος του  $x$  είναι ήμιαρνητικός, τότε τό άκεραιο μέρος του  $x$  είναι τό μηδέν, και τό πρώτο σημαντικό ψηφίο του  $x$  μετά την υποδιαστολή κατέχει τάξη ίση μέ τό πλήθος των μονάδων της απόλυτης τιμής του χαρακτηριστικού.

\*Ετσι, αν τό χαρακτηριστικό του λογαρίθμου ενός αριθμού είναι 3, τό άκεραιο μέρος αυτού του αριθμού έχει τέσσερα ψηφία: αν τό χαρακτηριστικό είναι 0, τό άκεραιο μέρος του αριθμού έχει ένα ψηφίο: αν τό χαρακτηριστικό είναι  $\bar{2}$ , ο αριθμός είναι δεκαδικός της μορφής  $0,0y_1y_2y_3y_4\dots$ , όπου  $1 \leq y_1 \leq 9$ .

ε) \*Αν πολλαπλασιάσουμε (ή διαιρέσουμε) έναν αριθμό μέ  $10^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , τό δεκαδικό μέρος του λογαρίθμου δέ μεταβάλλεται, τό χαρακτηριστικό όμως αύξάνεται (ή ελαττώνεται) κατά  $n$  μονάδες.

\*Απόδειξη. \*Εστω ο θετικός αριθμός  $\theta$  μέ  $\log \theta = y_0, y_1y_2y_3\dots$

Πολλαπλασιάζοντας τον αριθμό  $\theta$  μέ  $10^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  έχουμε:

$$\log (10^n \cdot \theta) = \log 10^n + \log \theta = n + \log \theta = n + y_0, y_1y_2y_3\dots = (y_0 + n), y_1y_2y_3\dots \quad (1)$$

\*Επίσης αν διαιρέσουμε τό  $\theta$  μέ  $10^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  έχουμε:

$$\log \left( \frac{\theta}{10^n} \right) = \log \theta - \log 10^n = -n + \log \theta = -n + y_0, y_1y_2y_3\dots = (y_0 - n), y_1y_2y_3\dots \quad (2)$$

Οι ισότητες (1) και (2) δείχνουν ότι ενώ τό δεκαδικό μέρος του  $\log(\theta \cdot 10^k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , είναι τό ίδιο μέ τό δεκαδικό μέρος του  $\log \theta$ , τό χαρακτηριστικό όμως του  $\log(\theta \cdot 10^k)$  αύξάνεται σε σχέση ή μέ τό χαρακτηριστικό του  $\log \theta$  κατά  $k$  άκεραιοι μονάδες, αν  $k$  είναι μή άρνητικός άκεραιο ή ελαττώνεται κατά  $k$  άκεραιοι μονάδες, αν  $k$  είναι άρνητικός άκεραιο αριθμός.

Σύμφωνα μέ την πιο πάνω ιδιότητα οί αριθμοί, π.χ., 5, 50, 500, 5000, ... έχουν τό ίδιο δεκαδικό μέρος στο λογάριθμό τους. \*Επίσης οί αριθμοί: 0,5, 0,05, 0,005, 0,0005, ...



**Πόρισμα.**— "Αν δύο αριθμοί γραμμένοι σε δεκαδική μορφή έχουν τα ίδια ψηφία και με την ίδια τάξη διαφέρουν όμως ως προς τη θέση της υποδιαστολής, οι λογάριθμοί τους θα διαφέρουν μόνο ως προς το χαρακτηριστικό τους.

"Αν είναι, π.χ.,  $\log 312,865 = 2,49536$ , τότε θα είναι:

$$\log 31,2865 = 1,49536$$

$$\log 31286,5 = 4,49536$$

$$\log 0,312865 = \bar{1},49536$$

$$\log 3,12865 = 0,49536.$$

**§ 162. Πράξεις στους δεκαδικούς λογαρίθμους.**—Οι πράξεις στους δεκαδικούς λογαρίθμους γίνονται όπως και στους δεκαδικούς αριθμούς, με μερικές παραλλαγές, όταν οι λογάριθμοι έχουν αρνητικό χαρακτηριστικό. Έχουμε τις εξής πράξεις:

**α') Πρόσθεση λογαρίθμων.** Για να προσθέσουμε δεκαδικούς λογαρίθμους προσθέτουμε τα δεκαδικά μέρη (πού είναι όλα θετικά) και το άκεραιο μέρος του αθροίσματός τους το προσθέτουμε αλγεβρικά στο (άλγεβρικό) αθροισμα των άκεραιων μερών των λογαρίθμων.

Π.χ. Νά γίνει η πρόσθεση:  $\bar{2},85643 + 2,24482 + \bar{3},42105 + \bar{1},24207$ . Έχουμε:

$$\bar{2},85643$$

$$2,24482$$

$$\bar{3},42105$$

$$\bar{1},24207$$

$$\hline \bar{3},76437$$

Έδω το αθροισμα των δεκαδικών μερών έχει μία άκεραία μονάδα και συνεπώς το άκεραιο μέρος του αθροίσματος είναι:

$$1 + (-1) + (-3) + 2 + (-2) = -3 = \bar{3}.$$

**β') Αφαίρεση λογαρίθμων.** Για να αφαιρέσουμε δεκαδικούς λογαρίθμους αφαιρούμε τα δεκαδικά μέρη· αν από αυτή την αφαίρεση προκύψει τελικά κρατούμενο (αυτό είναι θετικό), το προσθέτουμε (άλγεβρικά) στο χαρακτηριστικό του αφαιρετέου και το αθροισμα πού προκύπτει το αφαιρούμε από το χαρακτηριστικό του μειωτέου.

Π.χ. 1) Νά γίνει η αφαίρεση:  $\bar{2},83754 - \bar{5},32452$ . Έχουμε:

$$\bar{2},83754$$

$$\bar{5},32452$$

$$\hline 3,51302$$

Έδω δεν υπάρχει κρατούμενο και το χαρακτηριστικό ισοῦται με:  $-2 - (-5) = 3$ .

2) Νά γίνει η αφαίρεση:  $\bar{3},48765 - \bar{2},75603$ . Έχουμε:

$$\bar{3},48765$$

$$\bar{2},75603$$

$$\hline \bar{2},73162$$

Έδω το τελικό κρατούμενο είναι 1 και το χαρακτηριστικό ισοῦται με:  $-3 - (-2 + 1) = -3 - (-1) = -2 = \bar{2}$ .

**Παρατήρηση:** Είναι γνωστό (§ 156) ότι:  $\log \alpha - \log \beta = \log \alpha + \text{συλλογ} \beta$ , δηλαδή η αφαίρεση ενός λογαρίθμου ανάγεται στην πρόσθεση του συλλογαρίθμου του.

Για να υπολογίσουμε το συλλογαρίθμο ενός (θετικού) αριθμού, όταν είναι γνωστός ο λογάριθμός του, προσθέτουμε στο χαρακτηριστικό του λογαρίθμου τό + 1 και αλλάζουμε το σημείο στο αθροισμα, και στη συνέχεια το δεκαδικό μέρος του λογαρίθμου τό αφαιρούμε από τη μονάδα.

Π.χ. 1) "Αν  $\log \beta = 2,54675$ . Τότε θα έχουμε:  $\text{συλλογ} \beta = -\log \beta = -2,54675$  (1)  
"Επειδή (§ 160)  $-2,54675 = \bar{3},45325$ , ή (1) γίνεται:  $\text{συλλογ} \beta = \bar{3},45325$ .

2) "Αν  $\log \alpha = \bar{1},37260$ , τότε  $\text{συλλογ} \alpha = 0,62740$ .

3) "Αν  $\log 0,06543 = \bar{2},81578$ , τότε  $\text{συλλογ} 0,06543 = 1,18422$ .

**γ') Πολλαπλασιασμός ενός λογαρίθμου με άκεραιο αριθμό.**

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

i) "Αν ο άκεραίος είναι θετικός, τότε πολλαπλασιάζουμε το δεκαδικό μέρος του λογαρίθμου επί το θετικό άκεραιο και γράφουμε μόνο τα δεκαδικά ψηφία του γινομένου· το άκεραιο μέρος αυτού του γινομένου το προσθέτουμε αλγεβρικά στο γινόμενο: του χαρακτηριστικού επί το θετικό αριθμό.

Π.χ. Νά γίνει ο πολλαπλασιασμός:  $\bar{2},65843 \times 4$ . Έχουμε:

$$\bar{2},65843$$

$$\hline 4$$

$$\hline \bar{6},63372$$

Έδω το τελικό κρατούμενο είναι 2 και το χαρακτηριστικό του γινομένου ισοῦται με:

$$(-2) \cdot 4 + 2 = -6 = \bar{6}.$$

ii) "Αν ο άκεραίος είναι αρνητικός, τότε πολλαπλασιάζουμε το συλλογαρίθμο του αριθμού επί τον αντίθετο του άκεραίου. Άλλά τότε αναγόμεσθε στην πρώτη περίπτωση.

Π.χ. Νά γίνει ο πολλαπλασιασμός:  $\bar{3},67942 \times (-4)$ .

"Εστω  $\log x = \bar{3},67942$ , τότε  $\text{συλλογ} x = 2,32058$

και συνεπώς:  $\bar{3},67942 \times (-4) = 2,32058 \times 4 = 9,28232$ .

**δ') Διάρθρωση ενός λογαρίθμου με άκεραιο αριθμό.**

1) Για να διαιρέσουμε το λογθ με θετικό άκεραιο (φυσικό) αριθμό k, εφόσον  $\log \theta > 0$  εργαζόμεσθε όπως και στους δεκαδικούς αριθμούς· αν όμως ο λογθ είναι ήμιαρνητικός, εργαζόμεσθε ως εξής:

1α) "Αν ο k διαιρεί (άκριβώς) το χαρακτηριστικό του λογθ, τότε διαιρούμε χωριστά το δεκαδικό μέρος και χωριστά το χαρακτηριστικό και προσθέτουμε τα πηλικά.

1β) "Αν ο k δέ διαιρεί το χαρακτηριστικό, τότε σ' αυτό το χαρακτηριστικό προσθέτουμε το μικρότερο αρνητικό άκεραιο -μ έτσι, ώστε: ο αριθμός πού θα προκύψει να είναι διαιρετός διά του k. Μετά προσθέτουμε τό + μ στο δεκαδικό μέρος του λογαρίθμου και βρίσκουμε, χωριστά, τα πηλικά των δύο αυτών μερών (διά του k) και τελικά τα προσθέτουμε.

Π.χ. Νά γίνουν οι διαιρέσεις: 1)  $(\bar{6},54782) : 3$  και 2)  $(\bar{5},62891) : 3$

|    |                                                                                                                                                                                      |                                                                                          |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                          |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1) | $\begin{array}{r} \bar{6},54782 \\ \bar{6} \overline{) 0 + 0,54782} \\ \underline{24} \phantom{00} \\ 07 \phantom{00} \\ \underline{18} \phantom{00} \\ 02 \phantom{00} \end{array}$ | $\begin{array}{r} 3 \\ \hline \bar{2} + 0,18260 = \\ \hline = \bar{2},18260 \end{array}$ | 2) | $\begin{array}{r} \bar{5},62891 \\ \bar{5} + \bar{1} + 1 + 0,62891 \\ \hline \bar{6} + 1,62891 \\ \hline \bar{6} \overline{) 0 + 1,62891} \\ \underline{12} \phantom{00} \\ 08 \phantom{00} \\ \underline{29} \phantom{00} \\ 21 \phantom{00} \\ \underline{0} \phantom{00} \end{array}$ | $\begin{array}{r} 3 \\ \hline \bar{2} + 0,54297 = \\ \hline = \bar{2},54297 \end{array}$ |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|

2) Για να διαιρέσουμε το λογθ διά του αρνητικού άκεραίου k, διαιρούμε το συλλογθ διά του -k > 0.



Π.χ. Νά γίνει η διαίρεση:  $(5,92158) : (-2)$ . Έχουμε:

\*Αν  $\log x = 5,92158$ , τότε  $\text{συλλογ} x = \overline{6},07842$ , οπότε:

$$(5,92158) : (-2) = (\overline{6},07842) : 2 = \overline{3},03921.$$

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Ομάδα Α'. 356.** Νά γίνουν ήμισυρητικοί οι λογάριθμοι:

- 1)  $-2,32254$     2)  $-0,69834$     3)  $-1,27218$     4)  $-3,54642$   
5)  $-0,41203$     6)  $-5,78952$     7)  $-0,00208$     8)  $-2,05024$ .

**357.** Νά γράψετε το χαρακτηριστικό των λογαρίθμων των αριθμών:

- 1) 135    2) 2050    3) 9,5    4) 0,003    5) 382,27  
6) 47,5    7)  $\frac{17}{3}$     8) 12,25    9) 0,56    10) 3041,7.

**358.** Πόσα άκέραια ψηφία έχει ένας αριθμός, του οποίου ο λογάριθμος έχει χαρακτηριστικό: 3, 5, 0, 1, 7, 4, 2;

**359.** Ο λογάριθμος ενός αριθμού έχει χαρακτηριστικό:  $-1, -2, -3, -4, -5, -7$ .

Ποιά είναι η τάξη του πρώτου σημαντικού ψηφίου του αριθμού μετά την υποδιαστολή;

**360.** \*Αν  $\log \alpha = \overline{1},63819$  και  $\log 4347 = 3,63819$ , τότε νά υπολογίσετε το  $\alpha$ .

**361.** \*Αν είναι  $\log 7283 = 3,86231$ , νά υπολογίσετε τους λογαρίθμους των αριθμών: 0,7283, 7,283, 0,007283, 728300, 728,3.

**362.** Νά βρεθούν τά εξαγόμενα:

$$\log 724 - \log 7,24, \quad \log 0,65 - \log 6,5, \quad \log 17,62 - \log 1,762.$$

**363.** \*Αν  $\log \alpha = \overline{2},29814$  και  $\log \beta = \overline{2},84212$ , νά υπολογίσετε τά:

1.  $\log \alpha + \log \beta$ ,    2.  $\log \alpha - \log \beta$ ,    3.  $3\log \alpha + 5\log \beta$ ,  
4.  $2\log \beta - \frac{3}{4}\log \alpha$ ,    5.  $\frac{7}{5}(\log \alpha + \log \beta) - \frac{3}{4}(\log \alpha - \log \beta)$ .

**364.** Νά υπολογίσετε τά άθροίσματα:

1.  $\overline{5},27124 + 3,4751 + \overline{1},81523 + 0,47214$   
2.  $4,67471 + \overline{2},14523 + 0,67215 + \overline{3},04703$ .

**365.** Νά εκτελέσετε τις πράξεις:

1.  $\overline{3},24518 + 1,41307 - \overline{2},47503$   
2.  $0,03182 - \overline{4},27513 + \overline{3},82504 - \overline{1},08507$ .

**366.** Νά υπολογίσετε τά γινόμενα:

1.  $\overline{3},82307 \times 5$ ,    2.  $0,24507 \times (-2)$ ,    3.  $\overline{1},24513 \times 4$ .

**367.** Νά εκτελέσετε τις διαιρέσεις:

1.  $\overline{4},89524 : 3$ ,    2.  $\overline{5},60106 : (-3)$ ,    3.  $\overline{4},57424 : \left(-\frac{3}{7}\right)$ ,  
4.  $\overline{1},42118 : 4$ ,    5.  $\overline{6},27508 : (-2)$ ,    6.  $\overline{8},32403 : 4$ .

**\*Ομάδα Β'. 368.** Νά βρείτε όλους τους φυσικούς αριθμούς  $n$  για τους οποίους ο  $\log_3 \left(\frac{1}{n}\right)$  έχει χαρακτηριστικό:  $-2$ .

**369.** Νά αποδείξετε ότι: αν ξέρουμε τους λογαρίθμους ως προς βάση  $\alpha$ ,  $\alpha > 1$ , όλων των αριθμών που περιέχονται μεταξύ του 1 και του  $\alpha$ , τότε μπορούμε νά βρούμε το λογάριθμο του οποιουδήποτε θετικού αριθμού  $\theta$  ως προς βάση  $\alpha$ .

**370.** \*Αν  $K$  είναι τό πλήθος των άκέραιων αριθμών πού οι λογάριθμοί τους έχουν χαρακτηριστικό  $k$  και  $\Lambda$  είναι τό πλήθος των άκέραιων πού οι αντίστροφοί τους έχουν λογαρίθμους μέ χαρακτηριστικό  $-\lambda$  ( $\lambda > 0$ ), νά αποδείξετε ότι:  $\log K - \log \Lambda = k - \lambda + 1$ .

### Λογαριθμικοί Πίνακες

\*Όπως είδαμε, εκτός από τίς ρητές δυνάμεις του 10, όλοι οι άλλοι (θετικοί) αριθμοί έχουν λογαρίθμους άρρητους αριθμούς (γι' αυτό έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία μη περιοδικά). Γι' αυτό, τούς λογαρίθμους αυτούς τούς βρίσκουμε κατά προσέγγιση (συνήθως 0,00001).

\*Εξάλλου, επειδή  $\log \frac{1}{\alpha} = -\log \alpha$ , όταν ξέρουμε τούς λογαρίθμους των αριθμών  $\alpha > 1$ , μπορούμε νά υπολογίσουμε τούς λογαρίθμους των (θετικών) αριθμών πού είναι  $< 1$ .

\*Επίσης είδαμε, ότι ο λογάριθμος ενός αριθμού αποτελείται από δύο μέρη: από τό **χαρακτηριστικό** του και από τό **δεκαδικό** του μέρος.

Στήν § 161 δείξαμε πώς τό χαρακτηριστικό του υπολογίζεται από μνήμης.

Τό δεκαδικό του μέρος υπολογίζεται κατά προσέγγιση μέ μεθόδους πού αναπτύσσονται στά Άνώτερα Μαθηματικά. Μέ τίς μεθόδους αυτές υπολογίστηκε τό δεκαδικό μέρος (μέ 5 ή 7 ή 11 ή 15 δεκαδικά ψηφία) όλων των άκέραιων αριθμών από τό 1 μέχρι τό 10.000 και είναι γραμμένο σέ πίνακες πού λέγονται **λογαριθμικοί πίνακες** ή **«πίνακες του δεκαδικού μέρους»**. Συνήθως για τίς εφαρμογές χρησιμοποιούμε τόν 5-ψήφιο πίνακα κατά τό σύστημα Dupuis, για τόν όποιο υπάρχουν και εκδόσεις ελληνικές: στά έπόμενα θά περιγράψουμε μέ συντομία τόν πίνακα αυτό και θά εκθέσουμε τόν τρόπο χρήσεώς του.

**§ 163. Περιγραφή των λογαριθμικών πινάκων Dupuis.** — Οι λογαριθμικοί πίνακες Dupuis περιέχουν τό δεκαδικό μέρος των λογαρίθμων των άκέραιων αριθμών από 1 μέχρι 10.000. Ο παρακάτω «πίνακας» είναι ένα τμήμα από τούς λογαριθμικούς πίνακες τής γαλλικής εκδόσεως του J. Dupuis.

| N   | 0     | 1   | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    |
|-----|-------|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 500 | 69897 | 906 | 914  | 923  | 932  | 940  | 949  | 958  | 966  | 975  |
| 1   | 984   | 992 | *001 | *010 | *018 | *027 | *036 | *044 | *053 | *062 |
| 2   | 70070 | 079 | 088  | 096  | 105  | 114  | 122  | 131  | 140  | 148  |
| 3   | 157   | 165 | 174  | 183  | 191  | 200  | 209  | 217  | 226  | 236  |
| 4   | 243   | 252 | 260  | 269  | 278  | 286  | 295  | 303  | 312  | 321  |
| 5   | 329   | 338 | 346  | 355  | 364  | 372  | 381  | 389  | 398  | 406  |
| 6   | 415   | 424 | 432  | 441  | 449  | 458  | 467  | *475 | 484  | 492  |
| 7   | 501   | 509 | 518  | 526  | 535  | 544  | 552  | 561  | 569  | 578  |
| 8   | 586   | 595 | 603  | 612  | 621  | 629  | 638  | 646  | 655  | 663  |
| 9   | 672   | 680 | 689  | 697  | 706  | 714  | 723  | 731  | 740  | 749  |
| 510 | 757   | 766 | 774  | 783  | 791  | 800  | 808  | 817  | 825  | 834  |
| 1   | 842   | 851 | 859  | 868  | 876  | 885  | 893  | 902  | 910  | 919  |
| 2   | 927   | 935 | 944  | 952  | 961  | 969  | 978  | 986  | 995  | *003 |
| ... | ...   | ... | ...  | ...  | ...  | ...  | ...  | ...  | ...  | ...  |
| 549 | 73957 | 965 | 973  | 981  | 989  | 997  | *005 | *013 | *020 | *028 |
| N   | 0     | 1   | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    |

Στήν άριστερή στήλη — όπου στην κορυφή υπάρχει τό γράμμα N (Nombres = αριθμοί), στίς Έλληνικές εκδόσεις τό γράμμα A (αριθμοί) — είναι γραμμένες κατακόρυφα οι δεκάδες των αριθμών και στην ίδια οριζόντια γραμμή μέ τό N, οι μονάδες τους. Στίς άλλες στή-



λες είναι γραμμένα τὰ δεκαδικὰ μέρη τῶν λογαρίθμων. Τὰ δύο πρῶτα ψηφία πού ἐξέχου-  
στη δεύτερη στήλη, ἐννοεῖται ὅτι ἐπαναλαμβάνονται τὰ ἴδια μέχρι ν' ἀλλάξουν· καί τοῦτο  
γιατί πολλοί ἐφεξῆς λογάριθμοι ἔχουν ἴδια τὰ δύο πρῶτα ψηφία.

Ὁ λογάριθμος κάθε ἀριθμοῦ βρίσκεται ἐκεῖ πού διασταυρῶνεται ἡ κατακόρυφη στήλη  
τῶν μονάδων μέ τήν ὀριζόντια στήλη τῶν δεκάδων τοῦ ἀριθμοῦ.

Ὁ ἀστερίσκος (\*) πού τόν βλέπουμε μπροστά στά τρία τελευταῖα δεκαδικὰ ψηφία  
μερικῶν λογαρίθμων δείχνει ὅτι τὰ δύο πρῶτα ψηφία πού παραλείπονται ἀλλάξαν καί  
πρέπει νά πάρουμε τὰ ἀμέσως ἐπόμενα.

Σύμφωνα μέ τὰ παραπάνω καί μέ βάση τόν «πίνακα» τῆς σελίδας 231 ἔχουμε ὅτι:

|                    |                     |                     |
|--------------------|---------------------|---------------------|
| λογ 500 = 2,69897, | λογ 5047 = 3,70303, | λογ 5084 = 3,70621  |
| λογ 503 = 2,70157, | λογ 5128 = 3,70995, | λογ 5017 = 3,70044. |

**§ 164. Χρήση τῶν λογαριθμικῶν πινάκων.**— Τούς λογαριθμικούς  
πίνακες τούς χρησιμοποιοῦμε:

- 1) γιά νά βροῦμε τόν λογάριθμο ἑνός ἀριθμοῦ,
- καί 2) γιά νά βροῦμε τόν ἀριθμό, ὅταν ξέρουμε τόν λογάριθμό του.

**§ 165. Πρόβλημα I.**— Νά βρεθεῖ ὁ λογάριθμος ἑνός ἀριθμοῦ.

Γιά νά λύσουμε αὐτό τό πρόβλημα ὑποθέτουμε ὅτι ὁ ἀριθμός πού μᾶς δόθηκε εἶναι  
πάντοτε γραμμένος μέ δεκαδική μορφή καί ὅτι χρησιμοποιοῦμε πενταψήφιους πίνακες. Τό  
χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ θά τό βροῦμε ἀπό μνήμης (§ 161), ἐνῶ τό  
δεκαδικό του μέρος ἀπό τούς πίνακες· γιά νά βροῦμε τό δεκαδικό μέρος, πρέπει νά ἔχουμε  
ὑπόψη ὅτι:

Τό δεκαδικό μέρος τοῦ λογαρίθμου ἑνός ἀριθμοῦ ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τήν ἀκολουθία  
τῶν σημαντικῶν του ψηφίων πού προκύπτει ἀν παραλείψουμε τήν ὑποδιαστολή καί τὰ  
μηδενικά πού τυχόν μπορεῖ νά ὑπάρχουν στήν ἀρχή ἢ στό τέλος τοῦ ἀριθμοῦ. Αὐτό, ὅπως  
εἶδαμε (§ 161, ε) δέ μεταβάλλει τό ζητούμενο δεκαδικό μέρος. Π.χ. οἱ ἀριθμοί:

|       |         |        |         |        |
|-------|---------|--------|---------|--------|
| 50,87 | 0,05087 | 508,70 | 5087000 | 5,0870 |
|-------|---------|--------|---------|--------|

ἔχουν τό ἴδιο δεκαδικό μέρος μέ τόν ἀριθμό 5087.

Γιά νά λύσουμε τό πρόβλημα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

**Περίπτωση α'.**— Ὁ ἀριθμός ἔχει ὡς 4 σημαντικά ψηφία (δηλαδή περιέχεται  
στούς πίνακες).

Σ' αὐτή τήν περίπτωση βρίσκουμε πρῶτα τό χαρακτηριστικό τοῦ λο-  
γαρίθμου (ἀπό μνήμης) καί μετά τό δεκαδικό του μέρος ἀπό τούς πίνακες,  
ὅπως εἴπαμε σέ προηγούμενη παράγραφο (§ 163).

**Παράδειγμα:** Νά βρεθεῖ ὁ λογάριθμος τοῦ 56,82.

**Λύση.** Τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου εἶναι 1, καί τό δεκαδικό του μέρος τό ἴδιο  
(§ 161, ε) μέ τό δεκαδικό μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ 5682 πού εἶναι (ἀπό τούς πίνακες) 75450.

\*Αρα:

$$\text{λογ } 56,82 = 1,75450.$$

\*Ὁμοίως βρίσκουμε ὅτι:  $\text{λογ } 568,2 = 2,75450$ ,  $\text{λογ } 0,8703 = \bar{1},93967$ .

**Περίπτωση β'.**— Ὁ ἀριθμός ἔχει περισσότερα ἀπό 4 σημαντικά ψηφία  
(δηλαδή δέν περιέχεται στούς πίνακες).

Τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου τό βρίσκουμε ὅπως καί στήν πρώτη  
περίπτωση. Γιά νά βροῦμε τό δεκαδικό του μέρος, χωρίζουμε τὰ 4 πρῶτα  
ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ μέ ὑποδιαστολή, καί ἔτσι ὅπως εἶναι γραμμένος ὁ ἀριθμός

βρίσκεται μεταξύ δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων μέ 4 ψηφία. Γιά νά βροῦμε τώρα  
τό δεκαδικό του μέρος, πρέπει νά ἔχουμε ὑπόψη μας τήν ιδιότητα:

$$a < b < c \iff \text{λογ } a < \text{λογ } b < \text{λογ } c, \text{ γιά κάθε } a, b, c \in \mathbb{R}^+$$

καί νά δεχτοῦμε ὅτι:

Γιά μικρές μεταβολές τῶν ἀριθμῶν, οἱ μεταβολές τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τῶν  
λογαρίθμων τους εἶναι, κατά προσέγγιση, ἀνάλογες μέ τίς μεταβολές τῶν ἀριθμῶν  
αὐτῶν, ὅταν οἱ μεταβολές τῶν ἀριθμῶν εἶναι μικρότερες ἀπό τή μονάδα καί ἀντι-  
στρόφως.

Ἡ παραπάνω παραδοχή δέν εἶναι «τελείως» ἀληθής, δηλαδή οἱ μεταβο-  
λές τῶν λογαρίθμων δέν εἶναι ἀνάλογες μέ τίς μεταβολές τῶν ἀριθμῶν.

Πράγματι, ἄς θεωρήσουμε δύο διαδοχικούς ἀκεραίους  $\alpha$  καί  $\alpha + 1$ ,  $\alpha > 0$   
καί ἄς ὀνομάσουμε  $\delta$  τή διαφορά:  $\text{λογ}(\alpha + 1) - \text{λογ } \alpha$ , δηλαδή:

$$\delta = \text{λογ}(\alpha + 1) - \text{λογ } \alpha \Rightarrow \delta = \text{λογ } \frac{\alpha + 1}{\alpha} \Rightarrow \delta = \text{λογ} \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right).$$

Παρατηροῦμε ὅτι: γιά  $\alpha \rightarrow +\infty$ , ὅποτε  $\frac{1}{\alpha} \rightarrow 0$ , ἔχουμε:

$$\text{λογ} \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right) \rightarrow 0, \text{ δηλαδή } \delta \rightarrow 0.$$

Ὡστε ἡ διαφορά τῶν λογαρίθμων δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων δέ μένει  
πάντοτε ἡ ἴδια, ἀλλά ἐλαττώνεται καθόσον οἱ ἀριθμοί αὐξάνουν καί συνεπῶς  
δέν ἀληθεύει ὅτι ἡ αὐξηση τῶν λογαρίθμων εἶναι ἀνάλογη μέ τήν αὐξηση τῶν  
ἀριθμῶν.

Ἐπειδή ὅμως ἡ διαφορά αὐτή μένει γιά πολλούς ἀριθμούς ἀμετάβλητη,  
μποροῦμε, κατά προσέγγιση, νά θεωρήσουμε τήν αὐξηση τῶν λογαρίθμων  
ἀνάλογη μέ τήν αὐξηση τῶν ἀριθμῶν.

Ὑστερα ἀπό αὐτά, γιά νά βροῦμε τό δεκαδικό μέρος τοῦ λογαρίθμου,  
ἐργαζόμαστε ὅπως (φαίνεται) στά παρακάτω παραδείγματα:

**Παράδειγμα 1ο:** Νά βρεθεῖ ὁ λογάριθμος τοῦ 17424.

**Λύση.** Τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου εἶναι 4. Χωρίζουμε τὰ 4 πρῶτα ψηφία  
τοῦ ἀριθμοῦ μέ ὑποδιαστολή καί ἔτσι ἔχουμε τόν ἀριθμό 1742,4, τοῦ ὁποῦ ἀρκεῖ νά βροῦμε  
τό δεκαδικό μέρος τοῦ λογαρίθμου του.

$$1742 < 1742,4 < 1743,$$

\*Εργαζόμαστε ὡς ἐξῆς: Ἐπειδή

$$\text{λογ } 1742 < \text{λογ } 1742,4 < \text{λογ } 1743.$$

ἐπεται ὅτι:

$$\text{*Από τούς πίνακες εἶναι: } \text{λογ } 1742 = 3,24105 \text{ καί } \text{λογ } 1743 = 3,24130.$$

$$3,24105 < \text{λογ } 1742,4 < 3,24130,$$

\*Αρα:

πού σημαίνει ὅτι ὁ λογάριθμος πού ζητᾶμε βρίσκεται μεταξύ τῶν ἀριθμῶν 3,24105 καί  
3,24130, πού διαφέρουν κατά 25 μονάδες πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως (μ.ε' δ.τ.).

\*Από τούς πίνακες βλέπουμε ἐπίσης ὅτι, ὅταν ὁ ἀριθμός αὐξάνεται κατά 2, 3, 4, 5, ...  
ἀκέραιες μονάδες, τότε ὁ λογάριθμός του αὐξάνεται ἀντιστοίχως κατά 50, 75, 99, 125, ...  
μ.ε' δ.τ. Ὑπολογίζουμε τώρα πόσο πρέπει νά αὐξηθεῖ ὁ  $\text{λογ } 1742 = 3,24105$  γιά νά προκύ-  
ψει ὁ  $\text{λογ } 1742,4$  καί ἀπό αὐτόν ὁ  $\text{λογ } 17424$ . Ὁ ὑπολογισμός γίνεται ὡς ἐξῆς:



Σε αύξηση του αριθμού κατά 1 αντιστοιχεί αύξ. του λογ. κατά 25 μ.ε'.δ.τ.

» » » » 0,4 » » » » x; »

Άρα:  $x = 25 \cdot 0,4 = 10 \text{ μ.ε'.δ.τ.}$

Τότε έχουμε:  $\log 1742,4 = 3,24105 + 0,00010 = 3,24115$

και συνεπώς:  $\log 17424 = 4,24115$ .

Οι παραπάνω πράξεις διατάσσονται ως εξής:

|                       |  |                                           |                                |
|-----------------------|--|-------------------------------------------|--------------------------------|
| $\log 1742 = 3,24105$ |  | Αύξηση αριθμών 1                          | αύξηση λογαρίθμων 25 μ.ε'.δ.τ. |
| $\log 1743 = 3,24130$ |  | » » 0,4                                   | » » x; »                       |
| $\Delta = 25$         |  | $x = 25 \cdot 0,4 = 10 \text{ μ.ε'.δ.τ.}$ |                                |
|                       |  |                                           |                                |

Άρα:  $\log 17424 = 4,24105 + 0,00010 = 4,24115$ .

Άφού  $\log 17424 = 4,24115$  έχουμε:

$\log 17,424 = 1,24115, \quad \log 0,0017424 = \bar{3},24115,$   
 $\log 1,7424 = 0,24115, \quad \log 174,24 = 2,24115.$

**Παράδειγμα 2ο:** Νά βρεθεί ο λογάριθμος του αριθμού 24,3527.

**Λύση.** Το χαρακτηριστικό του λογαρίθμου που ζητάμε είναι 1. Αν πολλαπλασιάσουμε τον αριθμό επί 100, το δεκαδικό μέρος του λογαρίθμου δεν αλλάζει. Άρκει λοιπόν να βρούμε το δεκαδικό μέρος του λογαρίθμου του αριθμού 2435,27.

Εργαζόμαστε όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα:

|                       |  |                                                        |                                |
|-----------------------|--|--------------------------------------------------------|--------------------------------|
| $\log 2435 = 3,38650$ |  | Αύξηση αριθμών 1                                       | αύξηση λογαρίθμων 18 μ.ε'.δ.τ. |
| $\log 2436 = 3,38668$ |  | » » 0,27                                               | » » x; »                       |
| $\Delta = 18$         |  | $x = 18 \cdot 0,27 = 4,86 \approx 5 \text{ μ.ε'.δ.τ.}$ |                                |
|                       |  |                                                        |                                |

Άρα:  $\log 24,3527 = 1,38650 + 0,00005 = 1,38655$ .

**Σημείωση.** Στους λογαριθμικούς πίνακες και έξω από τα πλαίσια υπάρχουν πινακίδια με επικεφαλίδα τη διαφορά των λογαρίθμων δύο διαδοχικών αριθμών. Τα πινακίδια αυτά έχουν δύο στήλες: η πρώτη στήλη έχει τους φυσικούς αριθμούς 1, 2, ..., 9, που δείχνουν δέκατα της άκერαιης μονάδας και η άλλη στήλη έχει τις αυξήσεις των λογαρίθμων σε μονάδες της τελευταίας δεκαδικής τάξεως.

Αν ονομάσουμε Δ τις διαφορές των αριθμών, τότε τα πινακίδια δίνουν τις τιμές:

$$\frac{\Delta \times 1}{10}, \frac{\Delta \times 2}{10}, \dots, \frac{\Delta \times 9}{10}.$$

Έτσι ο ύπολογισμός του λογαρίθμου του παραδείγματος 2 γίνεται με τη βοήθεια του πινακιδίου, που έχει επικεφαλίδα τη διαφορά  $\Delta = 18$ .

Στο πινακίδιο αυτό απέναντι από το 2 (στήλη α') είναι 3,6 και απέναντι από το 7 είναι 12,6· αλλά επειδή το ψηφίο 7 παριστάνει εκατοστά στον αριθμό 2435,27, δηλ. μονάδες 10 φορές μικρότερες, πρέπει να πάρουμε 1,26. Ωστε σε αύξηση του αριθμού κατά 0,27 μονάδες αντιστοιχεί αύξηση του λογαρίθμου κατά  $3,6 + 1,26 = 4,86 \approx 5 \text{ μ.ε'.δ.τ.}$

Διάταξη των πράξεων.

|                    |                |               |
|--------------------|----------------|---------------|
| $\log 2435$        | $= 3,38650$    | $\Delta = 18$ |
| Σε αύξηση 0,2      | αύξηση λογ 3,6 |               |
| » » 0,07           | » » 1,26       |               |
| Άρα $\log 2435,27$ | $= 3,3865486$  |               |

και επειδή το 6ο ψηφίο του δεκ. μέρους είναι μεγαλύτερο από το 5, αυξάνουμε κατά μία μονάδα το 5ο ψηφίο. Άρα θα είναι  $\log 2435,27 = 3,38655$  και συνεπώς  $\log 24,3527 = 1,38655$ .

**§ 166. Πρόβλημα II. (αντίστροφο).**—Νά βρεθεί ο αριθμός που αντιστοιχεί σε όρισμένο λογάριθμο.

Γιά να λύσουμε αυτό το πρόβλημα αναζητούμε το δεκαδικό μέρος του λογαρίθμου που μās δόθηκε στους λογαριθμικούς πίνακες. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις καθόσον το δεκαδικό αυτό μέρος γράφεται ή όχι στους λογαριθμικούς πίνακες. Το χαρακτηριστικό του λογαρίθμου μās επιτρέπει να καθορίσουμε, σύμφωνα με την ιδιότητα δ της § 161, το πλήθος των ψηφίων του άκέραιου μέρους του ζητούμενου αριθμού.

Ακριβέστερα εργαζόμαστε ως εξής:

**Περίπτωση α'.**—Το δεκαδικό μέρος του λογαρίθμου βρίσκεται στους πίνακες.

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το θετικό αριθμό x, για τον οποίο είναι:

$$\log x = 2,62716.$$

**Λύση.** Χωρίς να λάβουμε υπόψη μας το χαρακτηριστικό 2, αναζητάμε στη στήλη 0 των λογαριθμικών πινάκων τον αριθμό 62, που αποτελούν τα δύο πρώτα ψηφία του δεκαδικού μέρους του λογαρίθμου και κατόπιν αναζητάμε στον πίνακα τα άλλα τρία ψηφία 716 του δεκαδικού μέρους. Βλέπουμε ότι αυτά ανήκουν στην 423η οριζόντια γραμμή και στην 8η στήλη· ο ζητούμενος αριθμός έχει, στη σειρά, τα σημαντικά ψηφία 4, 2, 3, 8, δηλαδή έχει 423 δεκάδες και 8 μονάδες. Επειδή ο λογάριθμός του έχει χαρακτηριστικό 2, ο αριθμός θα έχει τρία άκεραια ψηφία, και θα είναι:

$$x = 423,8.$$

**Σημείωση.** Αν θέλουμε να βρούμε τον αριθμό x για τον οποίο είναι  $\log x = 2,63022$  εργαζόμαστε ως εξής:

Παρατηρούμε ότι στις σειρές του 63 δεν υπάρχει το 022, αλλά το αναζητούμε και το βρίσκουμε στις σειρές του 62 με έναν άστερίσκο (\*) μπροστά του. Αυτό συμβαίνει, γιατί το 022 με άστερίσκο (\*) βρίσκεται στην τελευταία σειρά του 62. Συνεπώς ο ζητούμενος αριθμός x είναι ο 426,8.

**Περίπτωση β'.**—Το δεκαδικό μέρος του λογαρίθμου δε βρίσκεται στους πίνακες.

**1ο:** Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το θετικό αριθμό x, για τον οποίο είναι:

$$\log x = 1,25357.$$

**Λύση.** Παρατηρούμε ότι το δεκαδικό μέρος του λογαρίθμου βρίσκεται στους πίνακες μεταξύ των 0,25334 και 0,25358, στους οποίους αντιστοιχούν οι αριθμοί 1792 και 1793 αντίστοιχως. Δηλαδή έχουμε:

$$1,25334 < 1,25357 < 1,25358$$

και συνεπώς:

$$17,92 < x < 17,93.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι:

$$\Delta = 1,25358 - 1,25334 = 24 \text{ μ.ε'.δ.τ.}$$

$$\delta = 1,25357 - 1,25334 = 23 \text{ μ.ε'.δ.τ.}$$

Έχοντας υπόψη την παραδοχή που κάναμε στην § 165, σύμφωνα με την οποία η αύξηση (μεταβολή) των λογαρίθμων είναι, κατά προσέγγιση, ανάλογη προς την αύξηση των αριθμών, καταρτίζουμε την ακόλουθη διάταξη:

|                                     |                                  |
|-------------------------------------|----------------------------------|
| Αύξηση λογαρίθμου κατά 24 μ.ε'.δ.τ. | φέρνει αύξηση του αριθμού κατά 1 |
| » » » 23 » » » » » » » » y;         |                                  |

$$y = 1 \cdot \frac{23}{24} = \frac{23}{24} = 0,958.$$



Προσθέτοντας τώρα τό 0,958 στον αριθμό 1792 βρίσκουμε 1792,958. Ο αριθμός όμως αυτός έχει προφανώς τα ίδια ψηφία με τον  $x$  και με την ίδια σειρά, πλην όμως η θέση της υποδιαστολής στο  $x$  κανονίζεται από το χαρακτηριστικό του  $\log x$ , πού έδω είναι 1.

Θά είναι λοιπόν:  $x = 17,92958$ .

**Σημείωση.** Η διαφορά  $\Delta$  των άκρικών λογαρίθμων, ανάμεσα στους οποίους περιέχεται ο  $\log x$ , ονομάζεται «μεγάλη» διαφορά, ενώ η διαφορά  $\delta$  του μικρότερου λογαρίθμου από τό  $\log x$  ονομάζεται «μικρή» διαφορά.

**2ο:** Νά βρείτε τό  $x$ , αν  $\log x = 3,47647$ .

**Λύση.** Από τούς λογαριθμικούς πίνακες έχουμε:

$$3,47640 < 3,47647 < 3,47654$$

καί άρα

$$0,002995 < x < 0,002996.$$

\*Αν εργαστούμε, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, έχουμε τήν ακόλουθη σύντομη διάταξη:

$$\begin{array}{r} 3,47647 \\ 3,47640 \\ \hline \text{Διαφορές: } \delta = 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3,47654 \text{ αντιστοιχεί } \delta: 2996 \\ 3,47640 \quad \text{»} \quad : 2995 \\ \hline \Delta = 14 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \quad 1 \\ 7 \quad y; \\ \hline y = 1 \times \frac{7}{14} = 0,5. \end{array}$$

\*Ετσι τά σημαντικά ψηφία του  $x$  κατά σειρά είναι: 2, 9, 9, 5, 5. \*Αρα ο ζητούμενος αριθμός  $x$  είναι ο 0,0029955, γιατί τό χαρακτηριστικό του λογαρίθμου του είναι 3.

### Εφαρμογές των δεκαδικών λογαρίθμων

**§ 167.** Εφαρμόζοντας τίς ιδιότητες των λογαρίθμων και χρησιμοποιώντας τούς λογαριθμικούς πίνακες μπορούμε νά απλουστεύσουμε πολλούς αριθμητικούς υπολογισμούς και νά κάνουμε άλλους υπολογισμούς πού θά ήταν πάρα πολύ δύσκολοι χωρίς τούς λογαρίθμους. Τά παρακάτω παραδείγματα και ιδιαίτερα τό δεύτερο, θά μās πείσουν γιά τή σημασία των λογαρίθμων στίς πρακτικές εφαρμογές.

**Παράδειγμα 1ο:** Νά βρείτε τό  $x$ , αν είναι:  $x = \frac{7,56 \times 4667 \times 567}{899,1 \times 0,00337 \times 23435}$  (1)

**Λύση.** Λογαριθμίζοντας τήν (1) έχουμε:

$$\log x = \log 7,56 + \log 4667 + \log 567 - (\log 899,1 + \log 0,00337 + \log 23435).$$

\*Από τούς πίνακες βρίσκουμε:

$$\begin{array}{r} \log 7,56 = 0,87852 \\ \log 4667 = 3,66904 \\ \log 567 = 2,75358 \\ \hline 7,30114 \end{array} \quad \begin{array}{r} \log 899,1 = 2,95381 \\ \log 0,00337 = 3,52763 \\ \log 23435 = 4,36986 \\ \hline 4,85130. \end{array}$$

Μετά τήν αφαίρεση προκύπτει:

$$\begin{array}{r} \log x = 2,44984 \\ x = 281,73. \end{array}$$

\*Αρα:

**Παράδειγμα 2ο:** Νά υπολογίσετε, κατά προσέγγιση, τήν αριθμητική τιμή της παραστάσεως:

$$x = \frac{27,32 \times (1,04)^{20} \times \sqrt{0,003}}{\sqrt{0,0042} \times (345,6)^2} \quad (2)$$

**Λύση.** αμβάνοντας τούς λογαρίθμους των μελών της (2) έχουμε:

$$\log x = (\log 27,32 + 20 \cdot \log 1,04 + \frac{1}{5} \log 0,003) - \left( \frac{1}{4} \log 0,0042 + 2 \log 345,6 \right).$$

\*Από τούς πίνακες βρίσκουμε τούς λογαρίθμους και έκτελούμε τίς πράξεις σύμφωνα με τήν επόμενη διάταξη:

$$\begin{array}{r} \text{Βοηθητικές πράξεις} \\ \log (1,04) = 0,01703 \\ 20 \\ \hline 0,34060 \\ \dots\dots\dots \\ \log 0,003 = 3,47712 \\ \frac{1}{5} \log 0,003 = \frac{3,47712}{5} = \frac{5 + 2,47712}{5} = \\ = 1 + 0,49542 = 1,49542 \\ \dots\dots\dots \\ \log 0,0042 = 3,62325 \\ \frac{1}{4} \log 0,0042 = \frac{3,62325}{4} = \frac{4 + 1,62325}{4} = \\ = 1 + 0,40581 = 1,40581 \\ \dots\dots\dots \\ \log 345,6 = 2,53857 \\ 2 \\ \hline 5,07714 \end{array}$$

\*Από τούς πίνακες βρίσκουμε:

$$x = 0,000615957.$$

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**\*Ομάδα Α'. 371.** Νά βρεθεί ο λογάριθμος των αριθμών:

- |             |            |               |
|-------------|------------|---------------|
| 1. 0,2507   | 5. 6,8372  | 9. 85,007     |
| 2. 45,72    | 6. 5278,37 | 10. 0,0004124 |
| 3. 0,003817 | 7. 63,347  | 11. 326,537   |
| 4. 107,3    | 8. 25234   | 12. 14,1606   |

**372.** Νά βρεθεί ο θετικός αριθμός  $x$ , αν:

- |                       |                       |                        |
|-----------------------|-----------------------|------------------------|
| 1. $\log x = 2,48001$ | 5. $\log x = 4,87622$ | 9. $\log x = 0,70020$  |
| 2. $\log x = 1,96895$ | 6. $\log x = 2,99348$ | 10. $\log x = 1,66325$ |
| 3. $\log x = 4,97534$ | 7. $\log x = 1,79100$ | 11. $\log x = 4,15050$ |
| 4. $\log x = 3,69636$ | 8. $\log x = 2,78000$ | 12. $\log x = 5,25865$ |

**373.** Νά βρείτε τό  $y$ , αν:  $y = \frac{1}{2} \log(4 + \sqrt{7}) + \frac{1}{2} \log(4 - \sqrt{7})$ .

**374.** Χρησιμοποιώντας τόν τύπο:

$$E = \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$$

νά υπολογίσετε τό έμβαδόν  $E$  ενός τριγώνου πού έχει πλευρές:

$$\alpha = 202,5 \text{ m}, \quad \beta = 180,2 \text{ m} \quad \text{καί} \quad \gamma = 75,3 \text{ m} \quad \left( \tau = \frac{1}{2} \text{ περιμέτρου} \right).$$

**375.** Νά υπολογίσετε τήν αριθμητική τιμή του  $x$  πού όρίζεται από τή σχέση:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} = \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}$$



δπου  $\alpha = 0,27355$ ,  $\beta = 29,534$ ,  $\gamma = 44,340$ .

376. Νά προσδιορίσετε τό  $y$ , αν ξέρουμε ότι:

$$\log y = \log(7 + 5\sqrt{2}) + 8\log(\sqrt{2} + 1) + 7\log(\sqrt{2} - 1) + 2\log(3 - 2\sqrt{2}).$$

377. Τρεις αριθμοί  $\alpha, x, y$  συνδέονται με τή σχέση:

$$\alpha xy^2 = \sqrt[3]{x}.$$

1ο) Νά υπολογίσετε τό  $y$ , αν είναι  $\alpha = 0,3$  και  $x = 1,8215$ .

2ο) Νά υπολογίσετε τό  $x$ , αν είναι  $\alpha = 10$  και  $y = 0,5242$ .

378. Σέ μία γεωμετρική πρόοδο είναι:  $\alpha_1 = 3$ ,  $\omega = 8$  και  $v = 13$ . Νά βρεθεί ο 13ος όρος και τό άθροισμα των 13 πρώτων όρων της.

379. Νά επαληθεύσετε τίς ισότητες (χρησιμοποιώντας λογαριθμικούς πίνακες):

$$\begin{aligned} 1. \sqrt[3]{\frac{577,8 \times 69}{0,75 \times 3,107}} &= 6,431, & 2. \sqrt[3]{8,5273 \times \sqrt[3]{51,3388}} &= 5,62962 \\ 3. \sqrt[3]{\frac{4,632 \times (2,96)^2}{81,3 \times 32,41}} &= 0,225855, & 4. \frac{312,415 \times \sqrt[3]{3,5781^2}}{17,1826^2 \times \sqrt[10]{0,002987^3}} &= 14,1606. \end{aligned}$$

### III. ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

**§ 168. Όρισμοί.**—Έκθετική εξίσωση ονομάζουμε κάθε εξίσωση τής μορφής:

$$E(x) = F(x) \quad (1)$$

όπου  $E(x)$ ,  $F(x)$  είναι συναρτήσεις του  $x$ , όταν σ' ένα τουλάχιστο από τά μέλη της εμφανίζεται ο άγνωστος  $x$  είτε κάποια συνάρτηση του άγνώστου σέ έκθετή δυνάμεως μέ βάση θετικό αριθμό.

Έτσι, π.χ. οί εξισώσεις:

$$3^x = 81, \quad 5^{x^2-3x} = 625, \quad 7^{2-3|x|} = 1, \quad x^{x^2-7x+12} = 1 \quad (x > 0)$$

$$x^x - x^{-x} = 3 + 3x^{-x} \quad (x > 0), \quad (3x + 1)^{2x-3} = 1 \quad \text{μέ: } x > -\frac{1}{3}$$

είναι έκθετικές.

Έπίλυση τής έκθετικής εξίσωσης (1) λέγεται ή εύρεση του συνόλου των λύσεων αυτής, δηλαδή του συνόλου των τιμών του άγνώστου της που τήν ικανοποιούν.

Οί πιό συνηθισμένες έκθετικές εξισώσεις έχουν ή μπορούν νά πάρουν μία από τίς επόμενες μορφές:

**α')** Έκθετικές εξισώσεις τής μορφής:

$$\alpha^x = \beta \quad (\alpha)$$

όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$  και  $\alpha \neq 1$ .

Γιά νά επιλύσουμε αυτή τήν έκθετική εξίσωση διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

**Περίπτωση I**—Ό  $\beta$  είναι δύναμη του  $\alpha$  ή μπορεί νά μετατραπεί σέ δύναμη του  $\alpha$ .

Τότε, αν  $\beta = \alpha^k$  θά έχουμε:  $\alpha^x = \alpha^k$  και συνεπώς  $x = k$ .

**Παράδειγμα:** Νά επιλυθεί ή εξίσωση:  $3^x = 729$ .

**Λύση.** Έπειδή  $729 = 3^6$ , ή εξίσωση γράφεται:  $3^x = 3^6$  και δίνει  $x = 6$ .

**Περίπτωση II.**—Ό  $\beta$  δέν μπορεί νά μετατραπεί σέ δύναμη του  $\alpha$ .

Σ' αυτή τήν περίπτωση λαμβάνοντας τούς λογαρίθμους και των δύο μελών τής (α) έχουμε:

$$x \cdot \log \alpha = \log \beta \quad \text{και συνεπώς} \quad x = \frac{\log \beta}{\log \alpha}.$$

**Παράδειγμα:** Νά επιλυθεί ή εξίσωση:  $2^x = \frac{5}{6}$ .

**Λύση.** Λαμβάνουμε τούς λογαρίθμους και των δύο μελών τής εξίσωσης και έχουμε:

$$x \cdot \log 2 = \log 5 - \log 6 \quad \text{ή} \quad x = \frac{\log 5 - \log 6}{\log 2} = \frac{-0,07918}{0,30103} = -0,26303.$$

**β')** Έκθετικές εξισώσεις τής μορφής:

$$\alpha^{f(x)} = \beta \quad (\beta)$$

όπου  $f(x)$  είναι πραγμ. συνάρτηση του άγνώστου και  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$  με  $\alpha \neq 1$ .

Προφανώς για  $f(x) = x$  έχουμε έκθετική εξίσωση τής προηγούμενης μορφής.

Γιά νά επιλύσουμε εξισώσεις τής μορφής (β) διακρίνουμε και πάλι δύο περιπτώσεις, άφοϋ οί αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta$  μπορεί νά είναι ή νά μήν είναι δυνάμεις του ίδιου αριθμού.

**Παράδειγμα 1ο:** Νά επιλυθεί ή εξίσωση:  $3^{x^2-5x+11} = 243$ . (1)

**Λύση.** Έπειδή  $243 = 3^5$ , ή εξίσωση (1) γράφεται:

$$3^{x^2-5x+11} = 3^5 \iff x^2 - 5x + 11 = 5 \iff x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Οί ρίζες τής τελευταίας εξίσωσης είναι  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 3$ , οί όποιες είναι και ρίζες τής εξίσωσης (1)

**Παράδειγμα 2ο:** Νά επιλυθεί ή εξίσωση:  $7^{2-|3x|} = 1$ .

**Λύση.** Έχουμε:

$$7^{2-|3x|} = 1 = 7^0 \iff 2 - |3x| = 0 \iff |x| = \frac{2}{3} \iff x = \pm \frac{2}{3}.$$

**Παράδειγμα 3ο:** Νά επιλυθεί ή εξίσωση:  $5^{3x-2} = 437$ . (1)

**Λύση.** Παίρνοντας τούς λογαρίθμους και των δύο μελών τής εξίσωσης (1) έχουμε:

$$(3x-2) \cdot \log 5 = \log 437 \quad \text{ή} \quad 3x-2 = \frac{\log 437}{\log 5} \quad \text{ή} \quad 3x-2 = \frac{2,64048}{0,69897}$$

ή  $3x-2 = 3,77767$  και από αυτή:  $x = 1,92589$ .

**Παράδειγμα 4ο:** Νά επιλυθεί ή εξίσωση:  $a^{bx} = \gamma$ , (1)

όπου  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$  και  $\alpha \neq 1$ ,  $\beta \neq 1$ .

**Λύση.** Λαμβάνοντας τούς λογαρίθμους και των δύο μελών τής (1) έχουμε:

$$\beta^x \cdot \log \alpha = \log \gamma \quad \text{ή} \quad \beta^x = \left( \frac{\log \gamma}{\log \alpha} \right) \quad (2)$$

Άπό τή (2) λογαριθμίζοντας βρίσκουμε:



$$x \cdot \log \beta = \log \left( \frac{\log \gamma}{\log \alpha} \right)$$

ή

$$x = \frac{1}{\log \beta} \cdot \log \left( \frac{\log \gamma}{\log \alpha} \right) \quad (3)$$

Για να έχει νόημα το δεύτερο μέλος της (3) πρέπει να είναι  $\frac{\log \gamma}{\log \alpha} > 0$ . Αυτό όμως ισχύει όταν οι  $\log \gamma$  και  $\log \alpha$  είναι **ομόσημοι**, δηλ. όταν οι αριθμοί  $\alpha$  και  $\gamma$  είναι  $> 1$  ή όταν και οι δύο τους είναι  $< 1$ .

**γ) Έκθετικές εξισώσεις της μορφής:**

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \quad (γ)$$

όπου  $f(x), g(x)$  είναι (πραγματικές) συναρτήσεις του  $x$  και  $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ .

Η έκθετική εξίσωση (γ) είναι ισοδύναμη με την:  $f(x) = g(x)$ . Πράγματι, αν  $x_0$  είναι μία ρίζα της (γ), τότε, για  $0 < a \neq 1$ , έχουμε:

$$a^{f(x_0)} = a^{g(x_0)} \iff f(x_0) \cdot \log a = g(x_0) \cdot \log a \iff f(x_0) = g(x_0).$$

**Παράδειγμα:** Να επιλυθεί η εξίσωση:  $100 \cdot 10^x = 100^{\frac{5}{x}}$  (1)

**Λύση.** Έπειδή  $100 = 10^2$  η εξίσωση (1) γράφεται:  $10^{2+x} = 10^{\frac{10}{x}}$ . Η τελευταία εξίσωση είναι ισοδύναμη με την:  $2 + x = \frac{10}{x} \iff x^2 + 2x - 10 = 0$ . Οι ρίζες της τελευταίας εξισώσεως είναι:  $x_1 = 3, x_2 = -5$ , οι οποίες είναι και ρίζες της (1).

**δ) Έκθετικές εξισώσεις της μορφής:**

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \quad (δ)$$

όπου  $f(x), g(x)$  είναι (πραγματικές) συναρτήσεις του  $x$  και  $a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ .

Παρατηρούμε ότι για  $g(x) = 1$  έχουμε έκθετική εξίσωση της μορφής (β), ενώ αν ο  $\beta$  είναι ακέραιη δύναμη του  $\alpha$ , τότε έχουμε έκθετική εξίσωση της προηγούμενης μορφής. Έστω, λοιπόν, τώρα ότι ο  $\beta$  δεν είναι ακέραιη δύναμη του  $\alpha$ , τότε η έκθετική εξίσωση (δ) είναι ισοδύναμη με την:  $f(x) = g(x) \cdot \log_a \beta$ .

Πράγματι, αν  $x_0$  είναι μία ρίζα της (δ), τότε για  $a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$  έχουμε:

$$a^{f(x_0)} = b^{g(x_0)} \iff f(x_0) \cdot \log_a a = g(x_0) \cdot \log_a \beta \iff f(x_0) = g(x_0) \cdot \log_a \beta.$$

**Παράδειγμα:** Να επιλυθεί η εξίσωση:  $2^{x^2-5} = 3^{2x}$  (1)

**Λύση.** Παίρνοντας τους λογαρίθμους ως προς βάση 2 και των δύο μελών της (1) έχουμε:  $\log_2(2^{x^2-5}) = \log_2(3^{2x}) \implies x^2 - 5 = 2x \log_2 3 \implies x^2 - (2 \log_2 3)x - 5 = 0$  και συνεπώς:  $x_{1,2} = \log_2 3 \pm \sqrt{(\log_2 3)^2 + 5}$ .

**ε) Έκθετικές εξισώσεις της μορφής:**

$$f(a^x) = g(a^x) \quad (ε)$$

όπου  $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ .

Ειδικά θα μελετήσουμε παρακάτω εξισώσεις των μορφών:

$$ε_1: Aa^{2x} + Ba^x + \Gamma = 0,$$

$$ε_2: A_1 a^{\mu_1 x + \nu_1} + A_2 a^{\mu_2 x + \nu_2} + \dots + A_k a^{\mu_k x + \nu_k} = 0,$$

όπου  $\mu_i, \nu_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, \dots, k$ .

Οι εξισώσεις αυτές ανάγονται στη μορφή (α) με την αντικατάσταση:

$$a^x = y$$

**Παράδειγμα 1ο:** Να επιλυθεί η εξίσωση:  $4^x - 7 \cdot 2^x - 8 = 0$ . (1)

**Λύση.** Η εξίσωση (1) γράφεται:  $2^{2x} - 7 \cdot 2^x - 8 = 0$  και αν τεθεί:  $2^x = y$ , έχουμε:  $y^2 - 7y - 8 = 0$

Οι ρίζες αυτής της εξισώσεως είναι:  $y_1 = 8$  και  $y_2 = -1$ .

Άρα θα είναι:

$$2^x = 8 \quad (2) \quad \text{και} \quad 2^x = -1 \quad (3).$$

Η εξίσωση (2) γράφεται  $2^x = 2^3$  και δίνει:  $x = 3$ .

Η εξίσωση (3) είναι αδύνατη, επειδή  $2^x > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Η (1) λοιπόν έχει μία μοναδική λύση, τη:  $x = 3$ .

**Παράδειγμα 2ο:** Να επιλυθεί η εξίσωση:  $3^{x+2} + 5 \cdot 3^x + 3^{x-1} - 3^{x-2} = 128$ . (1)

**Λύση.** Η (1) γράφεται:  $3^x \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^x + \frac{3^x}{3} - \frac{3^x}{9} = 128$ .

Θέτουμε  $3^x = y$  και έχουμε την εξίσωση:

$$9y + 5y + \frac{y}{3} - \frac{y}{9} = 128 \implies 128y = 1152 \implies y = 9.$$

Τότε έχουμε:  $3^x = 9 = 3^2 \implies x = 2$ .

**Παράδειγμα 3ο:** Να επιλυθεί η εξίσωση:  $5^{2x-1} + 3 \cdot 5^{x+1} = 80$ . (1)

**Λύση.** Η (1) γράφεται:

$$\frac{(5^x)^2}{5} + 3 \cdot 5^x \cdot 5 - 80 = 0$$

$$(5^x)^2 + 75 \cdot 5^x - 400 = 0. \quad (2)$$

ή

Θέτουμε  $5^x = y$  και έχουμε την εξίσωση:

$$y^2 + 75 \cdot y - 400 = 0 \implies y_1 = 5, y_2 = -80.$$

Άρα η (2) διασπάται στις εξισώσεις:

$$5^x = 5, \quad 5^x = -80.$$

Η πρώτη δίνει:  $x = 1$ .

Η δεύτερη είναι αδύνατη, επειδή  $5^x > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**ζ) Έκθετικές εξισώσεις της μορφής:**

$$f(a^x) = g(\beta^x) \quad (ζ)$$

όπου  $a, \beta \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$  και  $a \neq \beta$ .

Συνήθεις περιπτώσεις της παραπάνω μορφής είναι οι εξής:

$$\zeta_1: A \cdot a^x = B \cdot \beta^x \quad (A \neq 0)$$

$$\zeta_2: A \cdot a^{2x} + B \cdot a^x \cdot \beta^x + \Gamma \cdot \beta^{2x} = 0. \quad (A \neq 0)$$



Οι εξισώσεις αυτές ανάγονται στη μορφή (α) με την αντικατάσταση:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = y \quad (1)$$

Πράγματι, η  $\zeta_1$  με την παραπάνω αντικατάσταση ανάγεται στην εξίσωση:  
 $y = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = \frac{B}{A}$ , ενώ η  $\zeta_2$ , αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της με το  $\beta^{2x}$ , γίνεται

$$\zeta_2: A \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2x} + B \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x + \Gamma = 0$$

και με την αντικατάσταση  $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = y$  ανάγεται στην εξίσωση:  $Ay^2 + By + \Gamma = 0$ .

\*Αν τώρα  $B^2 - 4A\Gamma \geq 0$ , η τελευταία εξίσωση δίνει δύο πραγματικές ρίζες  $y_1, y_2$ . Για τις τιμές  $y = y_1, y = y_2$  η (1) δίνει τις εκθετικές εξισώσεις:  
 $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = y_1, \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = y_2$ , οι οποίες λύνονται κατά τα γνωστά.

**Παράδειγμα 1ο:** Νά επιλυθεί η εξίσωση:

$$3 \cdot 2^{x-4} - 2^{x-1} = 5^{x-2} - 6 \cdot 5^{x-3} \quad (1)$$

Λύση. Η εξίσωση (1) γράφεται:

$$3 \cdot \frac{2^x}{2^4} - \frac{2^x}{2} = \frac{5^x}{5^2} - 6 \cdot \frac{5^x}{5^3}$$

$$\eta \quad 2^x \cdot \left(\frac{3}{16} - \frac{1}{2}\right) = 5^x \cdot \left(\frac{1}{25} - \frac{6}{125}\right)$$

$$\eta \quad \left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{16}{625}$$

$$\eta \quad \left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^4$$

\*Αρα είναι:  $x = 4$ .

**Παράδειγμα 2ο:** Νά επιλυθεί η εξίσωση:  $3 \cdot 9^x - 5 \cdot 6^x + 2^{2x+1} = 0$ .

Λύση. Η εξίσωση (1) γράφεται:  $2 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x \cdot 3^x + 3 \cdot 3^{2x} = 0$ .

Διαιρώντας και τα δύο μέλη διά  $3^{2x}$ , λαμβάνουμε την ισοδύναμη εξίσωση:

$$2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 3 = 0 \quad (2)$$

\*Αν τώρα θέσουμε:  $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$ , τότε η (2) γράφεται:  $2y^2 - 5y + 3 = 0$  (3)

Η (3) έχει ρίζες:  $y_1 = \frac{3}{2}, y_2 = 1$ . \*Αρα η (2), συνεπώς και η (1), διασπάζεται στις εξισώσεις της μορφής (α):

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^0$$

\*Ωστε το σύνολο των ριζών της (1) είναι:  $\{-1, 0\}$ .

\* η) Έκθετικές εξισώσεις της μορφής:

$$A \cdot \alpha^x + B \cdot \beta^x = \Gamma \quad (\eta)$$

όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$  με  $\alpha\beta = 1$ .

Οι εξισώσεις αυτές με την αντικατάσταση:  $\alpha^x = y$  ανάγονται στη μορφή (α).

Πράγματι, επειδή  $\alpha\beta = 1$  έχουμε:  $\alpha^x \beta^x = 1$  και συνεπώς  $\beta^x = \frac{1}{\alpha^x} = \frac{1}{y}$ , οπότε

η (η) γράφεται:

$$Ay + \frac{B}{y} = \Gamma \Rightarrow Ay^2 - \Gamma y + B = 0 \quad (\eta')$$

\*Αν τώρα  $\Gamma^2 - 4AB \geq 0$  η τελευταία εξίσωση δίνει δύο πραγματικές ρίζες  $y_1, y_2$ , οπότε η (η') διασπάζεται στις εξισώσεις της μορφής (α):

$$\alpha^x = y_1, \quad \alpha^x = y_2.$$

**Παράδειγμα:** Νά επιλυθεί η εξίσωση:  $3\left(\frac{3}{2}\right)^x + 2\left(\frac{2}{3}\right)^x = 5$ . (1)

Λύση. Θέτουμε  $\left(\frac{3}{2}\right)^x = y$  και η (1) γράφεται:  $3y + \frac{2}{y} = 5$  (2)

\*Η (2) έχει ρίζες:  $y_1 = \frac{2}{3}, y_2 = 1$  και συνεπώς έχουμε:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{2}{3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}, \quad \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^0$$

\*Αρα το σύνολο λύσεων της εξίσωσης (1) είναι:  $\{-1, 0\}$ .

**Σημείωση.** Μία πιο γενική μορφή της (η) είναι η εκθετική εξίσωση της μορφής:

$$A \cdot \alpha^x + B \cdot \beta^x = \Gamma \cdot \gamma^x \text{ με } \alpha\beta = \gamma^2 \text{ και } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+, \text{ αλλά } \alpha, \beta \neq 1.$$

Για  $\gamma = 1$  παίρνουμε την εκθετική εξίσωση (η). Για  $\gamma \neq 1$  η εξίσωση  $A \cdot \alpha^x + B \cdot \beta^x = \Gamma \cdot \gamma^x$  γράφεται:  $A \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^x + B \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^x = \Gamma$  και λύνεται κατά τα γνωστά.

\* θ) Έκθετικές εξισώσεις της μορφής:

$$\{f(x)\}^{g(x)} = 1 \quad (0)$$

όπου  $f(x), g(x)$  είναι συναρτήσεις του  $x$  με τον περιορισμό:  $f(x) > 0$ .

Οι εξισώσεις της μορφής αυτής έχουν προφανώς λύσεις τις λύσεις των εξισώσεων:

$$(i) \quad f(x) = 1$$

$$(ii) \quad g(x) = 0 \wedge f(x) \neq 0 \text{ (ακριβέστερα } f(x) > 0).$$

**Παράδειγμα:** Νά λυθεί η εξίσωση:  $(x^2 - 3x + 2)^{x^2 - 2x} = 1$ .

Λύση. \*Εδώ έχουμε  $f(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1) \cdot (x-2)$  και το σύνολο λύσεων της  $f(x) > 0$  είναι:  $\{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < 1, 2 < x < +\infty\}$ .

\*Υστερα από αυτό έχουμε:

$$(i) \text{ Οι ρίζες της } x^2 - 3x + 2 = 1 \iff x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

είναι προφανώς λύσεις της (1).



(ii) Οι λύσεις του συστήματος:

$$\begin{cases} x^2 - 2x = 0 \\ x^2 - 3x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) = 0 \\ (x-1)(x-2) > 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0$$

είναι επίσης λύση της (1).

Άρα το σύνολο λύσεων της εξίσωσης (1) είναι:  $\left\{0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$ .

**Σχόλιο.** Περιπτώσεις σαν την:  $x^2 - 3x + 2 = -1 \wedge x^2 - 2x = 2k, k \in \mathbb{Z}$  δεν εξετάζουμε εδώ (βλ. σχετικώς ορισμό έκθετικής εξίσωσης § 168).

**Παρατήρηση.** Η εξίσωση  $\{f(x)\}^{f(x)} = \beta$ , όπου  $f(x)$  είναι γνωστή συνάρτηση του  $x$  με  $f(x) > 0$  λύνεται αν τό  $\beta$  έχει ή μπορεί νά πάρει τή μορφή:  $\beta = \alpha^a, (\alpha > 0)$ . Τότε θά έχουμε:  $\{f(x)\}^{f(x)} = \alpha^a$  καί συνεπώς θά είναι  $f(x) = \alpha$ .

**Παραδείγματα:** Νά επιλυθούν οι εξισώσεις:

α)  $x^x = 4$  , β)  $(x^2 - 7x + 15)^{x^2 - 7x + 15} = 27$ .

Λύση. α) Έχουμε:  $x^x = 4 = 2^2$  καί συνεπώς  $x = 2$ .

β) Έχουμε:

$$(x^2 - 7x + 15)^{x^2 - 7x + 15} = 27 = 3^3 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 15 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 4.$$

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Ομάδα Α'. 380.** Νά επιλύσετε τις εξισώσεις:

1.  $5^{\sqrt{x}} = 625$  , 2.  $3^{x^2 - 8x + 11} = 27$  , 3.  $2^{x^2 - 2x} = 8^{x-2}$   
4.  $3^x = 81^{2-x}$  , 5.  $27^{\frac{x+1}{x-2}} = 3^{2x-4}$  , 6.  $\left(\frac{3}{4}\right)^{3x-7} = \left(\frac{4}{3}\right)^{7x-3}$

381. Νά επιλύσετε τις ακόλουθες έκθετικές εξισώσεις:

1.  $2 \cdot 9^x - 7 \cdot 3^x + 3 = 0$  , 2.  $3^x - 4\sqrt{3^x} + 3 = 0$  , 3.  $2^x + \frac{6}{2^x} = 5$  ,  
4.  $2 \cdot 4^x + 3 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$  , 5.  $9^x + 6^x = 4^x$  , 6.  $x^x = x$ .

382. Τό ίδιο νά κάνετε γιά τις εξισώσεις:

1.  $3^{x+1} - 2^x = 3^{x-1} + 2^{x+3}$  , 2.  $7^{3x+2} + 4^{x+2} = 7^{3x+4} + 4^{x+3}$  , 3.  $2^{2x} = 3^{x+1}$  ,  
4.  $5^{x-2} - 3 \cdot 2^{x-3} = 12 \cdot 5^{x-3} - 2^x$  , 5.  $(x^2 - 5x + 6)^{x^2 - 2x} = 1$  , 6.  $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$

**Ομάδα Β' 383.** Νά επιλύσετε τις εξισώσεις:

1.  $2^{3^x} = 512$  , 2.  $18^{8-4x} = (54\sqrt{2})^{3x-2}$  , 3.  $(x^2 - 1)e^{\log(x-2)} = \log e^{x+1}$  ,  
4.  $5^{x^2-3x} = 625$  , 5.  $e^x - e^{-x} = \frac{8}{3}$  , 6.  $3^{x+2} + 9^{x-1} = 1458$ .

384. Νά επιλύσετε τις ακόλουθες έκθετικές εξισώσεις:

1.  $4^x - 3^{x - \frac{1}{2}} = 3^{x + \frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$  , 2.  $7^{\frac{x+4}{3}} - 5^{3x} = 2\left(7^{\frac{x+1}{3}} + 5^{3x-1}\right)$   
3.  $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$  , 4.  $2^{2x-1} + 3^x + 4^{\frac{x+1}{2}} - 9^{\frac{x}{2}+1} = 0$ .

385. Τό ίδιο νά κάνετε γιά τις εξισώσεις:

1.  $x^x - x^{-x} = 3(1 + x^{-x})$  , 2.  $3^{x-1} - \frac{15}{3^{x+1}} + 3^x - \frac{21}{3^{x+1}} = 0$ ,

3.  $\sqrt{2^{6x-13}} - 3^{2(x-2)} = \sqrt{8^{2x-3}} - 3^{2x-3}$  , 4.  $x^2 \cdot 2^{x+1} + 2^{x-3} + 2 = x^2 \cdot 2^{x-3} + 2^{x-1}$ .

**Υπόδειξη.** Στην (4) νά διακρίνετε τις περιπτώσεις: (i)  $x \geq 3$ , (ii)  $x < 3$ .

386. Αν  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ ( $A = 90^\circ$ ), νά αποδείξετε ότι ή έκθετική εξίσωση:

$$\beta^x + \gamma^x = \alpha^x$$

έχει ακριβώς μία λύση στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Εφαρμογή:  $\beta = 3, \gamma = 4, \alpha = 5$ .

**Υπόδειξη.** Αφού βρείτε την (προφανή) λύση  $x_0 (= ;)$  νά συνεχίσετε μέ τή μέθοδο της «εις άτοπον» άπαγωγής παίρνοντας τις περιπτώσεις: (i)  $x > x_0$ , καί (ii)  $x < x_0$ .

387. Αν  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$  τέτοιοι, ώστε  $(\alpha - \beta)(\alpha - 1)(2\alpha - 1) \neq 0$  καί ό  $\beta$  είναι ρίζα της εξίσωσης:  $x^2 - \alpha x - \alpha\beta = 0$ , νά προσδιορίσετε τά  $\alpha, \beta$  καί  $x$  αν ξέρουμε ότι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\alpha^{x^2 - \alpha x - \alpha\beta} = \beta^{x^2 + \beta x + \alpha^2}, \quad x + \beta + 2\alpha = 0.$$

### IV. ΕΚΘΕΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

**\* § 169. Ορισμοί.**—Ονομάζουμε σύστημα έκθετικών εξισώσεων μέ δύο ή περισσότερους άγνωστους, κάθε σύστημα εξισώσεων, από τις όποιες ή μία τουλάχιστο είναι έκθετική.

Οι τιμές των άγνωστων, γιά τις όποιες συναληθεύουν οι εξισώσεις του συστήματος, λέμε ότι αποτελούν τή λύση του συστήματος.

Η επίλυση των έκθετικών συστημάτων στηρίζεται στις ιδιότητες των δυνάμεων καί στις ιδιότητες των λογαρίθμων.

**Παραδείγματα: 1ο.** Νά επιλυθεί τό σύστημα:

$$\begin{aligned} 4^x \cdot 2^{y-2} &= 32 & (1) \\ 3^{x+2} \cdot 3^{y-4} &= 27. & (2) \end{aligned}$$

Λύση. Οι (1) καί (2) γράφονται:

$$\begin{cases} 2^{2x} \cdot 2^{y-2} = 2^5 \\ 3^{x+2} \cdot 3^{y-4} = 3^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2x+y-2} = 2^5 \\ 3^{x+y-2} = 3^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (2, 3).$$

Άρα τό σύνολο λύσεων:  $(x, y)$  του συστήματος είναι τό μονοσύνολο:  $\{(2, 3)\}$ .

**2ο.** Νά επιλυθεί τό σύστημα:

$$\begin{aligned} 3^x \cdot 4^y &= 3981312 & (1) \\ 2^x \cdot 5^x &= 400000. & (2) \end{aligned}$$

Λύση. Λογαριθμίζοντας καί τά δύο μέλη των εξισώσεων (1) καί (2) βρίσκουμε τό ισόδυναμο σύστημα:

$$\begin{aligned} x \cdot \log 3 + y \cdot \log 4 &= \log 3981312 & (1') \\ y \cdot \log 2 + x \cdot \log 5 &= \log 4000000 & (2') \end{aligned}$$

Θέτοντας  $\log 4 = \log 2^2 = 2\log 2$  καί πολλαπλασιάζοντας τά μέλη της (2') επί 2, βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} x \log 3 + 2y \log 2 &= \log 3981312 & (1'') \\ 2x \log 5 + 2y \log 2 &= 2\log 4000000 & (2'') \end{aligned}$$

Λύνοντας τό σύστημα των εξισώσεων (1'') καί (2'') βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} x &= \frac{2\log 4000000 - \log 3981312}{2\log 5 - \log 3} = \frac{2 \cdot \log(2^{14} \cdot 10^5) - \log(2^{14} \cdot 3^5)}{2\log 5 - \log 3} = \\ &= \frac{10 - 10\log 2 - 5\log 3}{2 - 2\log 2 - \log 3} = 5. \end{aligned}$$



Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή του  $x$  στη (2) βρίσκουμε:

$$2^y = \frac{400000}{5^5} = \frac{4 \cdot 10^5}{5^5} = \frac{2^2 \cdot 2^5 \cdot 2^5}{5^5} = 2^7,$$

από την οποία έχουμε:  $y = 7$ .

Άρα το σύνολο λύσεων:  $(x, y)$  του συστήματος που μας δόθηκε είναι τό:  $\{(5, 7)\}$ .

**30. Νά επιλυθεί το σύστημα:**

$$x^y = y^x \quad (1)$$

$$x^3 = y^2 \quad (2)$$

**Λύση.** Μία προφανής λύση του συστήματος είναι το ζεύγος:  $(x, y) = (1, 1)$ . Υποθέτοντας τώρα ότι:  $x > 0, y > 0$  με  $x \neq 1$  και  $y \neq 1$  και λογαριθμίζοντας\* και τα δύο μέλη των εξισώσεων (1) και (2) βρίσκουμε το ισοδύναμο σύστημα:

$$y \cdot \log x = x \cdot \log y \quad (1')$$

$$3 \cdot \log x = 2 \cdot \log y \quad (2')$$

$$\text{Διαιρώντας κατά μέλη τις (1') και (2') έχουμε: } \frac{y}{3} = \frac{x}{2} \Rightarrow y = \frac{3x}{2} \quad (3)$$

Θέτοντας την τιμή αυτή του  $y$  στη (2) έχουμε:

$$x^3 = \left(\frac{3x}{2}\right)^2 \quad \text{ή} \quad x^3 = \frac{9}{4}x^2$$

$$\text{ή} \quad x^2 \left[ x - \frac{9}{4} \right] = 0, \text{ και επειδή υποθέσαμε } x > 0 \text{ έπεται: } x = \frac{9}{4}.$$

Θέτοντας την τιμή αυτή του  $x$  στην (3) λαμβάνουμε:

$$y = \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{4} = \frac{27}{8}.$$

Επομένως οι ρίζες του συστήματος είναι τα ζεύγη:

$$(x = 1, y = 1), \quad \left(x = \frac{9}{4}, y = \frac{27}{8}\right).$$

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Ομάδα Α.** 388. Νά επιλύσετε τα ακόλουθα συστήματα:

$$1. \begin{cases} 2^{3x+y} = 32 \\ 3^{2x-y} = 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2^x = 3y \\ 3^x = 2y \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3^x - 2^{y+3} = 15 \\ 2^y - 3^{x-3} = 3 \end{cases}$$

389. Νά προσδιορίσετε τα  $x, y \in \mathbb{R}^+$  για τα οποία ισχύουν:

$$1. \begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 54 \\ 3^x \cdot 2^y = 24 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 3^{x-y^2} = 1 \\ y^2 - x = 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x^y = y^x \\ y = \alpha x, (0 < \alpha \neq 1) \end{cases}$$

**Ομάδα Β.** 390. Νά επιλύσετε τα ακόλουθα συστήματα:

$$1. \begin{cases} \frac{x-y}{3} - \frac{x-y}{4} = 6 \\ \frac{x+y}{3} - \frac{x+y}{6} = 2 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x^{x+y} = y^3 \\ y^{x+y} = x^3 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x^{x+y} = y^v \\ y^{x+y} = x^{2v} \cdot y^v \end{cases}, v \in \mathbb{N},$$

\* Η λογαρίθμιση επιτρέπεται, επειδή  $x \neq 1$  και  $y \neq 1$ , γιατί αλλιώς το σύστημα που θα προκύψει δεν είναι ισοδύναμο με το αρχικό.

391. Νά επιλύσετε και νά διερευνήσετε τα παρακάτω συστήματα:

$$1. \begin{cases} \alpha^x = \beta^y \\ x^y = y^x \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \alpha^x = \beta^y \\ x^a = y^b \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x^a = y^b \\ x^y = y^x \end{cases}$$

392. Νά βρεθούν οι άκεραίες και θετικές λύσεις του συστήματος:

$$\{x^y = y^x \wedge x^x = y^{x+2y}\}.$$

393. Νά βρεθούν οι πραγματικές λύσεις του συστήματος:

$$\{z^x = y^{2x} \wedge 2^{z-1} = 4^x \wedge x + y + z = 16\}.$$

## V. ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

**§ 170. Όρισμοί.—α)** Λογαριθμική εξίσωση ονομάζουμε κάθε εξίσωση της μορφής:

$$E(x) = F(x) \quad (1)$$

όπου  $E(x), F(x)$  είναι (πραγματικές) συναρτήσεις του  $x$ , όταν σ' ένα τουλάχιστο από τα μέλη της εμφανίζεται ο λογάριθμος του άγνωστου είτε ο λογάριθμος συναρτήσεων του άγνωστου.

Έτσι, π.χ. οι εξισώσεις:

$$3\log x - \frac{1}{2} \log(2x+1) = \log \sqrt{2x-1} + 2, \quad x^{\log \sqrt{x}} = 100, \log_3 x \cdot \log_9 x = 2,$$

είναι λογαριθμικές.

Επίλυση μιās λογαριθμικής εξίσωσης λέγεται ή εύρεση του συνόλου των λύσεων αυτής, δηλαδή του συνόλου των τιμών του άγνωστου της, οι οποίες την ικανοποιούν.

Η επίλυση των λογαριθμικών εξισώσεων στηρίζεται στις ιδιότητες των λογαρίθμων, γι' αυτό συνιστούμε στόν αναγνώστη νά ανατρέξει για μιá ακόμη φορά στόν πίνακα της σελίδας 219.

Στις περισσότερες φορές ή επίλυση μιās λογαριθμικής εξίσωσης ανάγεται σέ επίλυση εξισώσεων που έχουν τίς ακόλουθες μορφές:

$$(i) \log x = y, \quad (ii) \log x = \log \alpha, \quad (iii) \log f(x) = \log \alpha, \\ (iv) \log_\beta f(x) = \log_\beta g(x),$$

όπου  $\alpha$  είναι γνωστός θετικός αριθμός,  $f(x)$  και  $g(x)$  γνωστές συναρτήσεις του άγνωστου με τόν περιορισμό  $f(x), g(x) > 0$  και  $\beta$  είναι ή βάση του λογαριθμικού συστήματος ( $0 < \beta \neq 1$ ).

Από τόν όρισμό του λογαρίθμου και από την πρώτη ιδιότητα των λογαρίθμων προκύπτει τώρα ότι:

- (i) Η εξίσωση  $\log x = y$  είναι ισοδύναμη μέ την:  $x = 10^y$
- (ii) Η  $\log x = \log \alpha$   $\gg$  μέ τό σύστημα:  $x = \alpha, \alpha > 0$
- (iii) Η  $\log f(x) = \log \alpha$   $\gg$   $\gg$   $\gg$  :  $f(x) = \alpha, \alpha > 0$
- (iv) Η  $\log_\beta f(x) = \log_\beta g(x)$   $\gg$   $\gg$   $\gg$  :  $f(x) = g(x), g(x) > 0$ .

**Σημείωση.** Άν σέ μιá λογαριθμική εξίσωση οι λογάριθμοι είναι μέ διαφορετικές βάσεις, πρέπει νά τούς μετατρέπουμε, ώστε όλοι νά είναι μέ τήν ίδια βάση.



**Παραδείγματα: 10.** Νά επιλυθεί η λογαριθμική εξίσωση:

$$\log(4x-1) = 2\log 2 + \log(x^2-1)$$

Λύση. 'Η (1) είναι ισοδύναμη με το σύστημα:

$$\{4x-1 > 0 \wedge x^2-1 > 0 \wedge \log(4x-1) = \log 4(x^2-1)\}$$

'Η εξίσωση του συστήματος (2) είναι ισοδύναμη με την:

$$4x-1 = 4(x^2-1) \iff 4x^2-4x-3=0 \implies x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

'Απ' αυτές μόνο η πρώτη ικανοποιεί και τις δύο ανισώσεις του συστήματος (2).

'Αρα η εξίσωση (1) έχει μία μόνο ρίζα, την:  $x = \frac{3}{2}$ .

**20.** Νά επιλυθεί η λογαριθμική εξίσωση:

$$\frac{1}{2} \log(x+2) + \log \sqrt{x-3} = 1 + \log \sqrt{3}$$

Λύση. 'Επειδή  $\frac{1}{2} \log(x+2) = \log \sqrt{x+2}$  και  $1 = \log 10$  ή (1) είναι ισοδύναμη με το σύστημα:

$$\{x+2 > 0 \wedge x-3 > 0 \wedge \log(\sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x-3}) = \log(10 \cdot \sqrt{3})\}$$

Οι δύο πρώτες σχέσεις του (2) συναληθεύουν για:  $x > 3$

'Η εξίσωση του συστήματος είναι ισοδύναμη με την:

$$\sqrt{(x+2)(x-3)} = 10 \cdot \sqrt{3} \iff (x+2)(x-3) = 300 \iff x^2-x-306=0.$$

'Από την τελευταία εξίσωση βρίσκουμε:  $x_1 = 18, x_2 = -17$ .

'Απ' αυτές μόνο η πρώτη ικανοποιεί την (3).

Συνεπώς ή (1) έχει ως (μοναδική) λύση την:  $x = 18$ .

**30.** Νά επιλυθεί η εξίσωση:  $\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10$ .

Λύση. 'Η (1) είναι ισοδύναμη με το σύστημα:

$$\{x > 0 \wedge x^{\log \sqrt{x}} = 100\}$$

'Η εξίσωση του συστήματος (2) είναι ισοδύναμη με την:

$$\log \sqrt{x} \cdot \log x = \log 100 \iff \frac{1}{2} (\log x)^2 = 2 \iff (\log x)^2 = 4.$$

'Αρα το σύστημα (2) διασπάται στα συστήματα:

$$\{x > 0 \wedge \log x = 2\} \text{ και } \{x > 0 \wedge \log x = -2\}.$$

'Από την εξίσωση  $\log x = 2$  έχουμε:  $\log x = 2 = \log 100$ , άρα  $x = 100$ .

'Από την εξίσωση  $\log x = -2$  έχουμε:  $\log x = -2 = \log 0,01$ , άρα  $x = 0,01$ .

'Ωστε το σύνολο λύσεων της εξίσωσης (1) είναι:  $\{10^{-2}, 10^2\}$ .

**40.** Νά επιλυθεί η εξίσωση:  $\log_3 x \cdot \log_9 x = 2$

Λύση. 'Επειδή  $\log_9 x = \log_{3^2} x = \frac{1}{2} \log_3 x$ , ή (1) είναι ισοδύναμη με το σύστημα:

$$\{x > 0 \wedge \frac{1}{2} (\log_3 x)^2 = 2\}$$

'Η εξίσωση του συστήματος (2) είναι ισοδύναμη με την:  $(\log_3 x)^2 = 4$ .

'Αρα το σύστημα (2) διασπάται στα συστήματα:

$$\{x > 0 \wedge \log_3 x = 2\} \text{ και } \{x > 0 \wedge \log_3 x = -2\}.$$

'Επιλύοντας τα παραπάνω συστήματα, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, βρίσκουμε ότι το σύνολο λύσεων της (1) είναι:  $\{3^{-2}, 3^2\}$ .

\* **β') Λογαριθμικό σύστημα** ονομάζουμε κάθε σύστημα του οποίου μία τουλάχιστο από τις εξισώσεις του είναι λογαριθμική.

'Ετσι, π.χ. τα συστήματα:

$$\left\{ \begin{array}{l} \log x + \log y = \log 14 \\ 3x - y = 1 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \log_y x + \log_x y = 2 \\ x^2 + y = 12 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} x^{\log y + 1} = y^{\log x + 2} \\ y^{\sqrt{x+2}} = x^{y-2} \end{array} \right\}$$

είναι λογαριθμικά.

'Επίλυση ενός λογαριθμικού συστήματος λέγεται ή εύρεση του συνόλου των λύσεων αυτού, δηλαδή του συνόλου των τιμών των αγνώστων του, οι οποίες ικανοποιούν όλες τις εξισώσεις του συστήματος.

'Η επίλυση των λογαριθμικών συστημάτων στηρίζεται στις ιδιότητες των λογαρίθμων και στη θεωρία επίλυσεως λογαριθμικών εξισώσεων που έχουμε παραπάνω.

**Παραδείγματα: 10.** Νά επιλυθεί το σύστημα:

$$\{\log x + \log y = \log 14, \quad 3x - y = 1\} \quad (1)$$

Λύση. Πρώτα-πρώτα οι  $x$  και  $y$  οφείλουν να είναι θετικοί. 'Η πρώτη εξίσωση του συστήματος γράφεται:  $\log(x \cdot y) = \log 14 \iff x \cdot y = 14$ , οπότε το (1) ισοδυναμεί με το σύστημα:

$$\{3x - y = 1 \wedge xy = 14\} \quad (2)$$

Λύνουμε το σύστημα (2) και, επειδή πρέπει  $x > 0, y > 0$ , βρίσκουμε:  $(x, y) = \left(\frac{7}{3}, 6\right)$ .

'Αρα το σύνολο λύσεων  $(x, y)$  του (1) είναι το μονοσύνολο:

$$\left\{\left(\frac{7}{3}, 6\right)\right\}.$$

**20.** Νά επιλυθεί το σύστημα:

$$\{\log_x x + \log_x y = 2 \wedge x^2 + y = 12\}. \quad (1)$$

Λύση. Πρώτα-πρώτα οι  $x$  και  $y$  οφείλουν να είναι θετικοί και διάφοροι από το 1.

'Ωστε:  $0 < x, y \neq 1$ .

'Επειδή  $\log_x x = \frac{1}{\log_y x}$  (βλ. Πρόσβαση 1, § 154), ή πρώτη εξίσωση του συστήματος γράφεται:

$$\log_y x + \frac{1}{\log_y x} = 2 \iff \log^2 y, x - 2 \log y, x + 1 = 0 \iff (\log y, x - 1)^2 = 0$$

'Από την τελευταία εξίσωση έχουμε:  $\log y, x = 1$ , οπότε:  $x = y$

'Ετσι έχουμε τώρα να επιλύσουμε το ισοδύναμο σύστημα:

$$\{x^2 + y = 12 \wedge x = y\} \quad (3)$$

Λύνουμε το σύστημα (3) και επειδή πρέπει  $x > 0, y > 0$ , βρίσκουμε:  $(x, y) = (3, 3)$ .

'Αρα το (1) έχει, ως (μοναδική) λύση, την:  $(x, y) = (3, 3)$ .



30. Νά επιλυθεί το σύστημα:

$$x^{\log y + 1} = y^{\log x + 2} \quad (1)$$

$$y^{\sqrt{x+2}} = x^{y-2} \quad (2)$$

**Λύση.** Πρώτα-πρώτα οι  $x$  και  $y$  οφείλουν να είναι θετικοί (γιατί;). Μία προφανής λύση του συστήματος είναι ή:  $(x, y) = (1, 1)$ . Έστω λοιπόν ότι  $x \neq 1$  και  $y \neq 1$ .

Από την (1) λογαριθμίζοντας λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} (\log y + 1) \cdot \log x &= (\log x + 2) \cdot \log y \\ \log x \log y + \log x &= \log x \log y + 2 \log y \\ \log x &= \log y^2 \\ x &= y^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Εξαιτίας της (3) η δεύτερη εξίσωση του συστήματος γράφεται:  $y^{\sqrt{y^2+2}} = y^{2(y-2)}$ .

Από την τελευταία εξίσωση, επειδή  $y \neq 1$ , παίρνουμε:  $\sqrt{y^2+2} = 2(y-2)$ .

Λύνουμε την τελευταία εξίσωση και, επειδή πρέπει  $y > 2$ , βρίσκουμε:  $y = \frac{8 + \sqrt{22}}{3}$ ,

οπότε ή (3) δίνει:  $x = \frac{86 + 16\sqrt{22}}{9}$ .

Έτσι το σύστημα που μας δόθηκε έχει τις λύσεις:

$$(x = 1, y = 1), \quad \left(x = \frac{86 + 16\sqrt{22}}{9}, y = \frac{8 + \sqrt{22}}{3}\right).$$

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

**Ομάδα Α'. 394.** Νά επιλύσετε τις ακόλουθες εξισώσεις:

- $\log(x-2) + \log(x-1) = \log(2x+8),$
- $\log(x+1) + 2 \cdot \log \sqrt{5x} = 2,$
- $\frac{1}{2} \log(3x-1) + \frac{1}{2} \log(8x-2) = \log(4x-1),$
- $\frac{1}{3} \log(x-1) = \log x - \log 2$
- $\log(2x-5) + \log(3x+7) = 4 \cdot \log 2,$
- $2 \cdot \log x = \log\left(x + \frac{11}{10}\right) + 1.$

**395.** Νά επιλύσετε τις ακόλουθες λογαριθμικές εξισώσεις:

- $\log[\log(2x^2+x-11)] = 0,$
- $\log(x+1) - \log 3 = \log(2x-3) + \log 7,$
- $2^{\log x} + 2^{5-\log x} = 12,$
- $\log \frac{2x}{3} + \log\left(\frac{5x}{4} + 2\right) = 2 \log(x-1),$
- $(4x)^{\log 2} + \log \sqrt{x} = 100,$
- $2 \log(2x-1) - \log(3x-2x^2) = \log(4x-3) - \log x$

**396.** Τό ίδιο νά κάνετε για τις εξισώσεις:

- $\log(3^x + 2) = 2 \log 3,$
- $\log(2^x + 2 \cdot 3^x) + \log 81 = x \cdot \log 3 + \log 178,$
- $x^{\log x} = \frac{1}{10} \cdot x^2 \sqrt{x},$
- $\log \sqrt{2} \cdot x \cdot \log_2 x \cdot \log_{2\sqrt{2}} x \cdot \log_4 x = 54,$
- $\varphi(x) + \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{10}{3},$  όπου  $\varphi(x) = \frac{2 \log x + 1}{2 \log x - 1}.$

**397.** Για ποιές τιμές του  $\theta$  ή εξίσωση:  $x^2 - x \log \theta + 3 \log \theta - 8 = 0$  έχει ρίζες πραγματικές και ίσες; Κατόπιν νά προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου  $\theta$ , ώστε ή παραπάνω εξίσωση νά έχει μία διπλή ρίζα στο διάστημα  $(0, 4)$ .

**398.** Νά επιλύσετε τα ακόλουθα λογαριθμικά συστήματα:

- $x + y = 65 \quad \log x + \log y = \frac{3}{2}$
- $x^2 + y^2 = 425 \quad \log x - \log y = \frac{1}{2}$
- $\log x + \log y = 2.$

**399.** Νά επιλύσετε τα ακόλουθα συστήματα:

- $\log^2 x + \log^2 y = 10 \quad x \log y + y \log x = 20$
- $\log x - \log y = 2 \quad \log \sqrt{xy} = 1$
- $2^x + 2^y = 12 \quad \log(2x+2) - \log(3+y) = 0.$

**400.** Τό ίδιο νά κάνετε για τα συστήματα:

- $4(\log_2 y + \log_2 x) = 17 \quad (3x)^{\log 3} = (5y)^{\log 5}$
- $xy = 243 \quad 5 \log x = 3 \log y$
- $xy = a^2 \quad \log^2 x + \log^2 y = \frac{5}{2} \log^2 a \quad (a \in \mathbb{R}^+)$

**★Ομάδα Β'. 401.** Νά επιλύσετε τις εξισώσεις:

- $\log_2 10 + 6 \cdot \log_{10} 10 - 8 \cdot \log_{100} 10 = 0,$
- $\log \frac{3x}{10} = 9 \cdot (3x)^{\log 9x^2},$
- $\log \sqrt{2} (2 \cdot \log_4 x \cdot \log_2 x + \log \sqrt{2} x) = 6,$
- $\log_2 (\log_2 x) = \log_4 (\log_4 x),$
- $[\log_x (16x - 5 - x^2) + \log_x 2] \cdot \log_{x+5} x \cdot \log_x x = 2.$

**402.** Έστω τό πολυώνυμο:  $f(x) = x^2 - 2(1 + \log_a \lambda)x + 5 - \log_a^2 \lambda$ , όπου  $\lambda$  είναι μία (πραγματική) θετική παράμετρος και  $0 < a < 1$ .

(i) Νά βρείτε για ποιές (πραγματικές) τιμές της παραμέτρου  $\lambda$ :

α) ή εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ρίζες πραγματικές και άνισες,

β) τό  $f(x)$  είναι θετικό για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,

γ) ή εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μία διπλή ρίζα στο διάστημα  $(-2, 2)$ .

(ii) Αν  $x_1, x_2$  είναι οι ρίζες της εξισώσεως  $f(x) = 0$ , νά σχηματίσετε εξίσωση β' βαθμού, της οποίας ρίζες είναι οι:  $\rho_1 = x_1 + 3x_2, \rho_2 = 3x_1 + x_2$ .

(iii) Νά βρείτε τή μέγιστη και τήν ελάχιστη δυνατή τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

$$y_1 = x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2, \quad y_2 = x_1^2 + x_2^2,$$

όταν μεταβάλλεται τό  $\lambda$  και  $x_1, x_2 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ .

**403.** Νά προσδιορίσετε τα  $x, y \in (0, +\infty)$  για τα οποία ισχύουν:

- $y^x(1+y^x) = 10100 \quad x \log y + y \log x = 200 \quad (2x)^{\log y} + y^{\log(2x)} = 8x^2$
- $\log \sqrt{xy} - \log \sqrt{\frac{x}{y}} = 3 \quad \{(\log x)^y \cdot (\log y)^x\}^{\frac{1}{x}} = 1024 \quad y = 4x^2 \cdot y^{\log(2x)}.$

**404.** Νά επιλύσετε τα ακόλουθα συστήματα:

- $\log_a x \cdot \log_b y = \log_a b \quad \log_9 x - \log_3(x+y) = -1 \quad \log_a x \cdot \log_b y = \log_a b \quad (0 < a, b \neq 1).$
- $\log_3 x - \log_9(y-x) = 0, \quad a^{\log_a 2y} = \sqrt{x}$

**405.** Για ποιές τιμές του  $\theta, \theta \in \mathbb{R}^+$ , οι ρίζες της εξισώσεως:

$$\log[\log(x^2 + x \log \theta + 110)] = 0$$

αποτελούν λύση του συστήματος:

$$\{y^{\log z} + z^{\log y} = 20 \wedge \log \sqrt{yz} = 1\}.$$



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ VIII

### ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ-ΙΣΕΣ ΚΑΤΑΘΕΣΕΙΣ-ΧΡΕΩΛΥΣΙΑ

#### I. ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ

**§ 171. Εισαγωγικές έννοιες-Όρισμοί.**— Γνωρίζουμε από την αριθμητική ότι **τόκος** (τίκτω) είναι τό επιπλέον ποσό πού παίρνουμε από κάποιον, όταν του δανειζόμαστε χρήματα για ένα χρονικό διάστημα. Το ποσό πού δανειζόμαστε λέγεται **κεφάλαιο**. Στά οικονομικά μαθηματικά και γενικότερα στην οικονομία, *ονομάζουμε κεφάλαιο κάθε ποσό πού έχει παραγωγική ικανότητα. Το αποτέλεσμα της παραγωγικότητας του κεφαλαίου τό λέμε τόκο και τη διάρκεια της παραγωγικότητας του κεφαλαίου τη λέμε χρόνο.* Ως χρονική μονάδα λαμβάνουμε συνήθως τό έτος, τό εξάμηνο, τό τρίμηνο, τό μήνα, την ημέρα.

Αν τό κεφάλαιο μένει σταθερό σ' όλη τη διάρκεια του δανεισμού, τότε ό τόκος λέγεται **άπλός**. Αν όμως στό τέλος κάθε χρονικής μονάδας ό τόκος ένσωματώνεται στό κεφάλαιο και άποτελεί έτσι τό νέο κεφάλαιο για την επόμενη χρονική μονάδα, τότε ό τόκος λέγεται **σύνθετος**. Αυτή ή ένσωμάτωση του τόκου στό κεφάλαιο, δηλαδή ή *κεφαλαιοποίηση του τόκου*, λέγεται **άνατοκισμός**.

Στήν περίπτωση του άπλου τόκου, ό τόκος των 100 δραχμών σέ μία χρονική μονάδα (συνήθως ένα έτος ή ένα εξάμηνο) λέγεται **επιτόκιο** (ε) και γράφεται: ε%. Στόν άνατοκισμό «επιτόκιο» είναι ό τόκος της 1 δραχμής σέ μία χρονική μονάδα. Συνεπώς τό επιτόκιο στόν άνατοκισμό είναι ίσο μέ τό 1/100 του επιτοκίου πού έχουμε στόν άπλό τόκο. Αυτό τό παριστάνουμε μέ τό τ, όποτε έχουμε:  $\tau = \varepsilon/100 = 0,01\varepsilon$ .

Στόν άνατοκισμό διακρίνουμε τό **άρχικό** από τό **τελικό** (ή **σύνθετο**) **κεφάλαιο**.

**Τελικό** λέμε τό άρχικό κεφάλαιο μαζί μέ τούς τόκους ως τό τέλος του χρόνου, για τόν όποιο τοκίζεται τό άρχικό κεφάλαιο.

Τά προβλήματα του άνατοκισμού τά λύνουμε μέ τύπους, τούς όποιους βρίσκουμε από την επίλυση του επόμενου γενικού προβλήματος.

**§ 172. Πρόβλημα.**— Αρχικό κεφάλαιο  $k_0$  δραχμές άνατοκίζεται για ν έτη μέ επιτόκιο τ. Νά βρεθεί τό τελικό κεφάλαιο  $k_v$ .

**Λύση.** Για τη λύση αυτού του προβλήματος παρατηρούμε ότι: άφοῦ ή

1 δραχμή στό τέλος του έτους φέρνει τόκο τ, οί  $k_0$  δραχμές θά φέρουν, στό τέλος του πρώτου έτους, τόκο  $k_0 \cdot \tau$  δρχ. Έτσι στό τέλος του πρώτου έτους τό κεφάλαιο μέ τούς τόκους θά είναι:  $k_0 + k_0 \tau = k_0(1 + \tau)$ .

Δηλαδή: τό άρχικό κεφάλαιο  $k_0$  πολλαπλασιάζεται μέ τό (σταθερό) συντελεστή  $(1 + \tau)$  για νά δώσει τό (τελικό) κεφάλαιο στό τέλος της πρώτης χρονικής περιόδου.

Στήν άρχή της δεύτερης χρονικής περιόδου τό άρχικό κεφάλαιο είναι τώρα τό:  $k_0(1 + \tau)$ , τό όποιο πάλι μετά από ένα έτος, δηλ. στό τέλος της δεύτερης χρονικής περιόδου, θά γίνει μέ τούς τόκους του:

$$[k_0(1 + \tau)](1 + \tau) = k_0(1 + \tau)^2$$

Όμοια, στό τέλος της τρίτης χρονικής περιόδου θά γίνει:  $k_0(1 + \tau)^3$ .

Τελικά, συνεχίζοντας μέ τόν ίδιο συλλογισμό, βρίσκουμε ότι οί  $k_0$  δρχ. στό τέλος του νιοστού έτους θά γίνουν:  $k_0(1 + \tau)^v$ .

Ωστε τό τελικό κεφάλαιο  $k_v$  μάς τό δίνει ό τύπος:

$$k_v = k_0 \cdot (1 + \tau)^v \quad (1)$$

Ο τύπος (1) λέγεται **τύπος του άνατοκισμού** και συνδέει τούς τέσσερις αριθμούς:  $k_0$ , τ, ν,  $k_v$ . Αν μάς δώσουν τούς τρεις άπ' αυτούς, άπαραίτητα όμως τό ν, μπορούμε νά προσδιορίσουμε, μέ τη βοήθεια των λογαρίθμων (άκριβώς ή κατά προσέγγιση), και τόν τέταρτο. Αν όμως μάς δώσουν τά:  $k_0$ ,  $k_v$  και τ και ζητείται ή χρονική διάρκεια ν κατά την όποία τό κεφάλαιο  $k_0$  άνατοκιζόμενο γίνεται  $k_v$ , τότε αντί για τόν τύπο (1) εφαρμόζουμε τόν τύπο (2) πού θά βρούμε παρακάτω.

Έστω ότι ό άνατοκισμός γίνεται για ν έτη και η ημέρες ( $\eta < 360$ ). Τότε για νά υπολογίσουμε τό τελικό κεφάλαιο  $k$  σκεπτόμαστε ως εξής: Ύστερα από ν έτη οί  $k_0$  δραχμές θά γίνουν:  $k_0(1 + \tau)^v$ . Τό ποσό αυτό έμεινε ακόμη η ημέρες, άρα πρέπει σ' αυτό νά προστεθούν και οί τόκοι για η ημέρες. Έπειδή στόν άπλό τόκο τό επιτόκιο είναι  $\varepsilon = 100\tau$ , έπεται ότι οί  $k_0(1 + \tau)^v$  δραχμές σέ η ημέρες θά φέρουν τόκο:

$$\frac{k_0(1 + \tau)^v \cdot 100\tau \cdot \eta}{36000} = \frac{k_0(1 + \tau)^v \cdot \tau \cdot \eta}{360}$$

Έπομένως τό τελικό κεφάλαιο μετά από ν έτη και η ημέρες θά γίνει:

$$k = k_0(1 + \tau)^v + \frac{k_0(1 + \tau)^v \cdot \tau \cdot \eta}{360}$$

Ωστε :

$$k = k_0(1 + \tau)^v \cdot \left(1 + \frac{\tau \eta}{360}\right) \quad (\eta < 360) \quad (2)$$

**Σημ.** Στήν πράξη αντί για τόν τύπο (2) χρησιμοποιούμε (συνήθως) τόν τύπο:

$$k = k_0(1 + \tau)^{v + \frac{\eta}{360}} \quad (2')$$



Ο τύπος (2') δίνει σχεδόν τό ίδιο εξαγόμενο με τον τύπο (2) και είναι πιο εύκολος στους υπολογισμούς.

**Παρατήρηση.** Είναι φανερό ότι, για να υπολογίσουμε από τους πιο πάνω τύπους (1) και (2) τα ποσά  $k_0$ ,  $\tau$ ,  $k_v$  και  $v$ , είναι απαραίτητη πρώτα η λογαρίθμηση των μελών των (1) και (2) και έπειτα η χρήση των λογαριθμικών πινάκων. Στην πράξη όμως υπάρχουν ειδικοί πίνακες, οι οποίοι δίνουν τις τιμές των διαφόρων παραστάσεων, όπως π.χ. των  $(1 + \tau)^v$ ,  $(1 + \tau)^{\frac{n}{360}}$  κ.τ.λ., για διάφορες τιμές επιτοκίου και χρόνου.

**\* § 173. Ίσοδύναμα έπιτόκια.**— Δύο έπιτόκια λέμε ότι είναι **ισοδύναμα** αν αντιστοιχοϋν σε διαφορετικές χρονικές περιόδους και αν με αυτά ένα αρχικό κεφάλαιο  $k_0$  ανατοκίζόμενο στον ίδιο συνολικά χρόνο λαμβάνει την ίδια τελική αξία. Έτσι, αν ο ανατοκισμός γίνεται κάθε έξάμηνο ή τρίμηνο, τό ισοδύναμο του  $\tau$  εξαμηνιαίο ή τριμηνιαίο έπιτόκιο δέν είναι τό μισό ή τό τέταρτο αντιστοίχως του  $\tau$ , αλλά διαφορετικό, πού υπολογίζεται ως εξής:

Αν  $\tau_1$  είναι τό ισοδύναμο εξαμηνιαίο έπιτόκιο, τότε ή 1 δραχμή στό τέλος του πρώτου εξαμήνου θά γίνει  $(1 + \tau_1)$  και στό τέλος του δεύτερου εξαμήνου θά γίνει  $(1 + \tau_1)^2$ . Επίσης ή μία δραχμή στό τέλος του έτους, ανατοκισζόμενη με έπιτόκιο  $\tau$ , θά γίνει  $(1 + \tau)$ . Έπειδή ή μία δραχμή, όπως και να τοκιστεί, πρέπει να δίνει στό τέλος του έτους τό ίδιο ποσό, έχουμε:

$$(1 + \tau_1)^2 = (1 + \tau) \text{ και συνεπώς είναι:}$$

$$\tau_1 = \sqrt{1 + \tau} - 1 \quad (3)$$

Ο τύπος (3) συνδέει τό εξαμηνιαίο και τό έτήσιο έπιτόκιο.

Επίσης, αν  $\tau_2$  είναι τό ισοδύναμο τριμηνιαίο έπιτόκιο του  $\tau$ , έπειδή τό έτος έχει 4 τριμηνίες, με ανάλογο συλλογισμό καταλήγουμε στη σχέση:

$$(1 + \tau_2)^4 = 1 + \tau \text{ και συνεπώς θά είναι:}$$

$$\tau_2 = \sqrt[4]{1 + \tau} - 1 \quad (4)$$

Ο τύπος (4) συνδέει τό τριμηνιαίο και τό έτήσιο έπιτόκιο.

**Σημ.** Στην πράξη πολλές φορές εφαρμόζεται αναλογία μεταξύ περιόδων και επιτοκίων, δηλαδή αν τό έτήσιο έπιτόκιο είναι 8%, τό εξαμηνιαίο είναι 4% και τό τριμηνιαίο είναι 2%. Τα έπιτόκια αυτά λέγονται τότε **ανάλογα**.

### ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**1η:** Δανείζουμε 5.000 δρχ. με ανατοκισμό πρὸς 6% έτησίως. Πόσες δραχμές θά πάρουμε ύστερα από 8 έτη;

**Λύση.** Έχουμε:  $k_0 = 5000$ ,  $\tau = 0,06$ ,  $v = 8$ ,  $1 + \tau = 1,06$ .

Όπότε ο τύπος (1) της § 172 μās δίνει:  $k_8 = 5000 \cdot (1,06)^8$ .

Αν λογαριθμίσουμε την τελευταία σχέση παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \log k_8 &= \log 5000 + 8 \cdot \log (1,06) \\ &= 3,69897 + 8 \cdot 0,02531 = 3,90145. \end{aligned}$$

Όπότε:  $k_8 = 7969,83$ .

**Σημείωση.** Από τους πίνακες των δυνάμεων του 1,06 βρίσκουμε άμέσως ότι:

$$(1,06)^8 = 1,593848, \text{ όπότε: } k_8 = 5000 \cdot 1,593848 = 7969,24.$$

Η μικρή διαφορά των δύο αποτελεσμάτων όφείλεται στον υπολογισμό των λογαρίθμων κατά προσέγγιση.

**Παρατήρηση.** Αν ο ανατοκισμός γινόταν για 8 έτη και μερικές ήμέρες, π.χ. για 8 έτη και 72 ήμέρες, τότε στον τύπο (2), τό μέν  $k_0(1 + \tau)^v$  είναι 7969,83, τό δέ  $1 + \frac{\tau \eta}{360}$  είναι:

$$1 + \frac{72 \times 0,06}{360} = 1,012 \text{ και συνεπώς: } k = 7969,83 \times 1,012 = 8065,46.$$

**2η:** Πόσες δραχμές πρέπει να καταθέσει ένας πατέρας την ήμέρα της γεννήσεως της κόρης του, με ανατοκισμό πρὸς 6% έτησίως για να μπορέσει να της αγοράσει ένα αυτοκίνητο αξίας 300.000 δρχ., όταν αυτή θά συμπληρώσει τό 20ο έτος της ηλικίας της;

**Λύση.** Έχουμε  $v = 20$ ,  $k_v = 300.000$ ,  $\tau = 0,06$ ,  $1 + \tau = 1,06$ .

Από τον τύπο (1) του ανατοκισμού έχουμε:

$$k_0 = \frac{k_v}{(1 + \tau)^v} \quad (\alpha)$$

Λογαριθμίζοντας την (α) έχουμε:  $\log k_0 = \log k_v - v \cdot \log (1 + \tau)$

$$= \log 300000 - 20 \cdot \log (1,06)$$

$$= 5,47712 - 20 \cdot 0,02531 = 4,97092$$

Από αυτό βρίσκουμε:

$$k_0 = 93524.$$

**3η:** Ανατοκίζει κάποιος 80.000 δραχμές πρὸς 6% έτησίως. Πόσα χρήματα θά πάρει ύστερα από 9 έτη, αν ο ανατοκισμός γίνεται κάθε εξαμηνία;

**Λύση.** Τό ισοδύναμο εξαμηνιαίο έπιτόκιο  $\tau_1$  δίνεται από τον τύπο (3) και είναι:

$$\tau_1 = \sqrt{1 + \tau} - 1 = \sqrt{1,06} - 1 = 0,0295$$

Εξάλλου έχουμε:  $k_0 = 80.000$ ,  $v = 9 \times 2 = 18$ ,

όπότε ο τύπος (1) μās δίνει:  $k_{18} = 80000 (1,0295)^{18}$ .

Από την τελευταία σχέση, αν εργαστούμε όπως και στην πρώτη εφαρμογή, έχουμε:

$$k_{18} = 135140,6.$$

Στα προβλήματα του ανατοκισμού υπάγονται και τα προβλήματα που έχουν σχέση με την αύξηση ή ελάττωση του πληθυσμού μās πόλεως ή χώρας, όπως π.χ. τό πιο κάτω:

**4η:** Πρόβλημα. Ο πληθυσμός μιάς πόλεως είναι Π κάτοικοι και αυξάνει κάθε χρόνο κατά τό  $\frac{1}{\mu}$  του πληθυσμού του προηγούμενου έτους. Πόσος θά είναι ο πληθυσμός της μετά v έτη;

**Λύση.** Στο τέλος του πρώτου έτους ο πληθυσμός θά είναι:

$$Π + Π \cdot \frac{1}{\mu} \text{ ή } Π \cdot \left(1 + \frac{1}{\mu}\right).$$

Μετά από ένα ακόμη έτος, δηλ. στό τέλος του δεύτερου έτους θά είναι:

$$Π \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) + Π \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \cdot \frac{1}{\mu} \text{ δηλ. } Π \cdot \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^2$$

και στό τέλος του νιοστού έτους ο πληθυσμός της πόλεως θά είναι:

$$Π_v = Π \cdot \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^v$$

**Σημείωση:** Αν ο πληθυσμός Π ελαττώνεται κατά τό  $1/\mu$  του πληθυσμού του προηγούμενου έτους, τότε ύστερα από v έτη θά γίνει:



$$\Pi_v = \Pi \cdot \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)^v$$

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Όμάδα Α'. 406.** Δανείζουμε 150.000 δρχ. με ανατοκισμό πρὸς 4% ἐτησίως. Πόσες δραχμές θὰ πάρουμε ὕστερα ἀπὸ 6 ἔτη;

407. Τί ποσό πρέπει νὰ τοκίσουμε με ἀνατοκισμό πρὸς 4% τὴν ἐξαμηνία, ὥστε νὰ γίνει μετὰ 18 ἔτη 200.000 δρχ.

408. Μὲ ποιο ἐτήσιο ἐπιτόκιο οἱ 24850 δρχ. μετὰ 12 ἔτη καὶ με ἀνατοκισμό γίνονται 50.000 δρχ.;

409. Νὰ ἐξετάσετε τί συμφέρει σὲ κάποιον: νὰ τοκίσει με ἀνατοκισμό 60.000 δρχ. πρὸς 5% γιὰ 10 χρόνια ἢ νὰ τὰ δώσει με ἀπλό τόκο πρὸς 7% γιὰ τὸ ἴδιο χρονικὸ διάστημα;

410. Νὰ βρεῖτε τὸ ἰσοδύναμο τριμηνιαῖο ἐπιτόκιο, ἂν τὸ ἀντίστοιχο ἐτήσιο εἶναι 8%.

411. Νὰ βρεῖτε τὸ ἰσοδύναμο ἐτήσιο ἐπιτόκιο, ἂν τὸ ἀντίστοιχο ἐξαμηνιαῖο εἶναι 2%.

412. Μετὰ πόσο χρόνο οἱ 12589 δρχ., ἂν ἀνατοκιστοῦν πρὸς 5% ἐτησίως θὰ γίνουν 45818 δρχ.;

413. Ὁ πληθυσμὸς ἑνὸς κράτους αὐξάνει κάθε χρόνο κατὰ τὸ  $\frac{1}{80}$  τοῦ πληθυσμοῦ τοῦ προηγούμενου ἔτους. Μετὰ πόσα ἔτη θὰ διπλασιαστῇ ἢ θὰ τριπλασιαστῇ;

**Όμάδα Β'. 414.** Κάποιος καταθέτει στὸ Ταχ. Ταμιευτήριο 7200 δρχ. με ἀνατοκισμό κάθε ἐξαμηνία πρὸς 4,5% ἐτησίως. Πόσα χρήματα θὰ πάρει μετὰ 15 ἔτη;

415. Κάποιος κατέθεσε στὸ Ταχ. Ταμιευτήριο κάποιο ποσὸ πού, ἀνατοκιζόμενο κάθε ἐξαμηνία πρὸς 6% τὸ χρόνο, μετὰ 5 ἔτη ἔγινε 26.000 δρχ. Τί ποσὸ κατέθεσε;

416. Ἐνα κεφάλαιο ἀνατοκιζόμενο γίνεται μετὰ 3 ἔτη 5625 δρχ. καὶ μετὰ ἄλλα δύο ἔτη 6084 δρχ. Μὲ ποιο ἐπιτόκιο ἔγινε ὁ ἀνατοκισμός;

417. Ἐνα κεφάλαιο, πού ἀνατοκίζεται κάθε ἐξαμηνία πρὸς 6% ἐτησίως, μετὰ πόσο χρόνο θὰ τριπλασιαστῇ;

418. Ἐνα κεφάλαιο 5.000 δρχ. ἀνατοκίζεται πρὸς 5% ἐτησίως καὶ ἄλλο 8.000 δρχ. πρὸς 3% ἐτησίως. Μετὰ πόσο χρόνο τὰ δύο σύνθετα κεφάλαια θὰ ἐξισωθοῦν;

419. Μία πόλη πού ἔχει πληθυσμὸ 8.000 κατοίκους ἐλαττώθηκε στὸν πρῶτο χρόνο κατὰ 160 ἄτομα. Ἄν ἐξακολουθήσει ἡ ἐλάττωση με τὴν ἴδια ἀναλογία, μετὰ πόσα ἔτη ἡ πόλη θὰ ἔχει 5.000 κατοίκους;

420. Σὲ μίᾶ πόλη ἡ θνησιμότητα τῶν κατοίκων εἶναι τὸ  $\frac{1}{42}$  τοῦ πληθυσμοῦ καὶ ἡ γεννητικότητα εἶναι τὸ  $\frac{1}{35}$  τοῦ πληθυσμοῦ. Ἄν δεχτοῦμε ὅτι ἡ πιὸ πάνω ἀναλογία θὰ παραμείνει ἡ ἴδια καὶ γιὰ τὰ ἐπόμενα ἔτη, μετὰ ἀπὸ πόσο χρόνο ὁ πληθυσμὸς τῆς πόλεως θὰ διπλασιαστῇ;

### II. ΙΣΕΣ ΚΑΤΑΘΕΣΕΙΣ

Συχνὰ οἱ ἄνθρωποι ἀπὸ τίς οἰκονομίες τους καταθέτουν ἕνα ὁρισμένο χρηματικὸ ποσὸ εἴτε στὴν ἀρχὴ κάθε ἔτους (ἢ μιᾶς ὁρισμένης χρονικῆς μονάδας) με σκοπὸ νὰ σχηματίσουν ἕνα κεφάλαιο, εἴτε στὸ τέλος κάθε ἔτους (ἢ μιᾶς χρονικῆς μονάδας πού ἔχουν συμφωνήσει) με σκοπὸ νὰ ἐξοφλήσουν κάποιο χρέος τους. Τὸ χρηματικὸ αὐτὸ ποσὸ τὸ λέμε **κατάθεση**.

Οἱ ἴσες καταθέσεις γίνονται, συνήθως, κάθε ἔτος, ἐξαμηνιο, ἢ καὶ τρίμηνο καὶ γιὰ ἕνα ὁρισμένο χρόνο.

Στὰ ζητήματα ἴσων καταθέσεων διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

α') οἱ καταθέσεις γίνονται **στὴν ἀρχὴ** κάθε ἔτους, καὶ

β') οἱ καταθέσεις γίνονται **στὸ τέλος** κάθε ἔτους.

Οἱ καταθέσεις τῆς β' περίπτωσηος, ἐπειδὴ ὅπως εἶπαμε γίνονται γιὰ νὰ ἐξοφλήσουμε κάποιο χρέος, λέγονται καὶ **χρεωλυτικὲς καταθέσεις**.

Στὶς ἴσες, λοιπόν, καταθέσεις ἔχουμε τὰ ἐπόμενα δύο προβλήματα:

**§ 174. Πρόβλημα I.**—Καταθέτουμε **στὴν ἀρχὴ** κάθε ἔτους  **$\alpha$  δρχ.** με ἀνατοκισμό καὶ με ἐτήσιο τόκο  **$\tau$**  γιὰ κάθε δραχμῇ. Τί ποσὸ θὰ πάρουμε μετὰ  **$n$**  ἔτη;

**Λύση.** Ἡ πρώτη κατάθεση θὰ μείνει  $n$  ἔτη στὸν ἀνατοκισμό καὶ ἐπομένως θὰ γίνει ἴση με:  $\alpha(1 + \tau)^n$ . Ἡ δεύτερη κατάθεση θὰ μείνει  $(n - 1)$  ἔτη στὸν ἀνατοκισμό καὶ συνεπῶς θὰ γίνει:  $\alpha(1 + \tau)^{n-1}$ , ἡ τρίτη θὰ γίνει:  $\alpha(1 + \tau)^{n-2}$  κ.ο.κ. Ἡ τελευταία κατάθεση θὰ μείνει μόνο ἕνα χρόνο στὸν ἀνατοκισμό, ἄρα θὰ γίνει ἴση με:  $\alpha(1 + \tau)$ .

Εἶναι φανερό τώρα ὅτι τὸ κεφάλαιο  $\Sigma$  πού θὰ σχηματιστῇ ἀπ' αὐτὲς τίς καταθέσεις εἶναι ἴσο με:  $\alpha(1 + \tau)^n + \alpha(1 + \tau)^{n-1} + \dots + \alpha(1 + \tau)$ . Ὡστε:

$$\Sigma = \alpha(1 + \tau) + \alpha(1 + \tau)^2 + \dots + \alpha(1 + \tau)^{n-1} + \alpha(1 + \tau)^n.$$

Ἀλλὰ τὸ δεύτερο μέλος τῆς πιὸ πάνω ἰσότητος εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν  $n$  πρῶτων ὄρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου, ἡ ὁποία ἔχει πρῶτο ὄρο τὸ  $\alpha(1 + \tau)$  καὶ λόγος  $(1 + \tau)$ . Ἀρα, σύμφωνα με τὸν τύπο (1) τῆς § 91, θὰ ἔχουμε:

$$\Sigma = \alpha \cdot (1 + \tau) \cdot \frac{(1 + \tau)^n - 1}{\tau} \quad (1)$$

Ἡ σχέση (1) λέγεται καὶ **τύπος τῶν ἴσων καταθέσεων**.

**Σημ.** Οἱ δυνάμεις  $(1 + \tau)^n$  γιὰ  $\tau = 0,03, 0,04, 0,045, \dots, 0,06$  καὶ γιὰ  $n = 1, 2, \dots, 50$  δίνονται ἀπὸ εἰδικούς πίνακες καὶ ἔτσι βρίσκουμε εὐκόλα τὸ  $\Sigma$  ἀπὸ τὸν τύπο (1).

**Παράδειγμα.** Στὴν ἀρχὴ κάθε χρόνου καταθέτει κάποιος στὴν τράπεζα με ἀνατοκισμό 2.500 δρχ. καὶ με ἐτήσιο ἐπιτόκιο 5%. Πόσα χρήματα θὰ λάβει μετὰ 10 ἔτη;

**Λύση.** Ἐχουμε:  $\alpha = 2500, \tau = 0,05, n = 10$ , ὁπότε ἀπὸ τὸν τύπο (1) λαμβάνουμε:

$$\Sigma = 2500 \times 1,05 \times \frac{(1,05)^{10} - 1}{0,05}.$$

Ἀπὸ τοὺς πίνακες ἢ με λογαρίθμους βρίσκουμε:  $(1,05)^{10} = 1,628$ .

Ἀρα  $(1,05)^{10} - 1 = 0,628$  καὶ ἐπομένως:

$$\Sigma = 2500 \times 1,05 \times \frac{0,628}{0,05} = 32.970 \text{ δρχ.}$$

**§ 175. Πρόβλημα II.**—Καταθέτουμε **στὸ τέλος** κάθε χρόνου  **$\alpha$  δρχ.** με ἀνατοκισμό καὶ με ἐτήσιο τόκο  **$\tau$**  γιὰ κάθε δραχμῇ. Τί ποσὸ θὰ ἔχουμε σχηματίζοντες **στὸ τέλος** τοῦ νιοστοῦ ἔτους, δηλαδή με τὴ νιοστὴ κατάθεση;

**Λύση.** Οἱ  $\alpha$  δρχ. πού καταθέτουμε στὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους θὰ μείνουν



στον ανατοκισμό  $n-1$  έτη και συνεπώς θα γίνουν:  $\alpha(1+\tau)^{n-1}$ . Οί  $\alpha$  δρχ. που καταθέτουμε στο τέλος του δεύτερου έτους θα μείνουν στον ανατοκισμό  $n-2$  έτη και συνεπώς θα γίνουν:  $\alpha(1+\tau)^{n-2}$ , κ.ο.κ. Η προτελευταία κατάθεση θα μείνει μόνο ένα έτος και επομένως θα γίνει:  $\alpha(1+\tau)$ . Η τελευταία κατάθεση, αφού γίνεται στο τέλος του νιοστού έτους, δε μένει καθόλου για τόκο (δέν τοκίζεται) και επομένως θα είναι μόνο  $\alpha$ .

Έτσι στο τέλος του νιοστού έτους, δηλαδή με τη νιοστή κατάθεση, θα έχουμε σχηματίσει τό ποσό:

$$\Sigma = \alpha(1+\tau)^{n-1} + \alpha(1+\tau)^{n-2} + \dots + \alpha(1+\tau) + \alpha$$

ή (§ 91, τύπος 1):

$$\Sigma = \alpha \cdot \frac{(1+\tau)^n - 1}{\tau}$$

Ο τύπος (2) ονομάζεται **τύπος των χρεωλυτικών καταθέσεων** και συνδέει τα τέσσερα ποσά  $\Sigma$ ,  $\alpha$ ,  $\tau$ ,  $n$ .

**Παράδειγμα.** Ένας καπνιστής ξοδεύει για τσιγάρα 18 δρχ. την ημέρα κατά μέσο όρο. Αν άρχισε να καπνίζει από τα 20 του χρόνια, να υπολογίσετε πόσα χρήματα θα έπαιρνε όταν γινόταν 60 έτων, αν τα χρήματα που ξοδεύει για τσιγάρα, τα κατέθετε στο τέλος κάθε έτους, σε μια Τράπεζα με ανατοκισμό προς 6% ετησίως.

**Λύση.** Ο καπνιστής ξοδεύει για τσιγάρα τό χρόνο:  $365 \cdot 18 = 6570$  δρχ.

Άρα έχουμε:  $\alpha = 6570$ ,  $\tau = 0,06$ ,  $n = 40$ .

Τότε ο τύπος (2) γράφεται:

$$\Sigma = 6570 \cdot \frac{(1,06)^{40} - 1}{0,06}$$

Από τούς πίνακες ή με λογαρίθμους βρίσκουμε:  $(1,06)^{40} = 10,2895$ .

Άρα:  $(1,06)^{40} - 1 = 9,2895$  και συνεπώς:

$$\Sigma = 6570 \cdot \frac{9,2895}{0,06} = 1.017.200,25.$$

Ωστε ο καπνιστής θα έπαιρνε: **1.017.200,25 δραχμές (!).**

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Ομάδα Α'. 421.** Ένας καταθέτει με ανατοκισμό 8.050 δραχμές προς 4,5 % στην άρχή κάθε έτους. Πόσα χρήματα θα πάρει ύστερα από 18 έτη;

**422.** Ποιό ποσό πρέπει να καταθέτει κάποιος με ανατοκισμό προς 6% στην άρχή κάθε έτους σε μια Τράπεζα, ώστε αυτό ύστερα από 20 έτη να γίνει 250.000 δραχμές;

**423.** Κάποιος καταθέτει στην άρχή κάθε έτους 10.000 δρχ. με ανατοκισμό προς 5%. Μετά πόσα έτη θα πάρει 150.000 δραχμές;

**424.** Ένας πατέρας καταθέτει σε κάθε γενέθλια της κόρης του στο Ταχ. Ταμειστήριο 5.000 δρχ. με ανατοκισμό προς 7,5%. Τί ποσό θα σχηματιστεί, όταν η κόρη του γιορτάσει την 21η επέτειο των γενεθλίων της;

**Ομάδα Β'. 425.** Κάποιος καταθέτει με ανατοκισμό στην άρχή κάθε έτους 2050 δρχ. προς 4,5%. Ύστερα από 15 χρόνια έπαψε να καταθέτει, αλλά τό ποσό που σχηματίστηκε τό άφησε με ανατοκισμό προς 5%. Τί κεφάλαιο θα έχει σχηματίσει 24 χρόνια μετά την πρώτη κατάθεση;

**426.** Να αποδείξετε ότι: αν τής ίσες καταθέσεις που γίνονται στο τέλος κάθε έτους, τής ανατοκίσουμε για ένα άκόμη έτος, τότε βρίσκουμε τής ίσες καταθέσεις που γίνονται στην άρχή κάθε έτους.

**427.** Ασφαρίζει κάποιος τη ζωή του για διάστημα 35 έτων προς 6% και πληρώνει ασφάλιστρα στην άρχή κάθε έτους 8.400 δραχμές. Πόσα χρήματα πρέπει να του δώσει ή ασφαλιστική εταιρεία ύστερα από 35 έτη;

### III. ΧΡΕΩΛΥΣΙΑ

**§ 176. Όρισμοί.— Χρεωλυσία** λέμε την απόσβεση ενός χρέους με ίσες δόσεις, οι οποίες καταβάλλονται σε ίσα χρονικά διαστήματα, π.χ. στο τέλος του έτους ή του εξαμήνου κ.τ.λ. Τό ποσό καθεμιάς από τής ίσες δόσεις που καταβάλλεται στο τέλος του χρονικού διαστήματος λέγεται **χρεωλύσιο** και χρησιμεύει ένα μέρος του για την πληρωμή των τόκων του χρέους και τό υπόλοιπο για τη βαθμιαία απόσβεση του χρέους.

Είναι φανερό ότι ένα χρέος εξοφλείται, όταν τό άθροισμα όλων των χρεωλυσίων μαζί με τούς σύνθετους τόκους τους γίνει ίσο με την τελική άξία του ανατοκιζόμενου άρχικού κεφαλαίου (**χρέους**).

Στή χρεωλυσία έχουμε, συνεπώς, να λύσουμε τό παρακάτω πρόβλημα:

**§ 177. Πρόβλημα.— Ένας δανείστηκε  $\alpha$  δραχμές με ανατοκισμό με την υποχρέωση να τής εξοφλήσει με  $n$  ίσες δόσεις, τής οποίες θα πληρώνει στο τέλος κάθε έτους. Να βρεθεί τό ποσό κάθε δόσεως (χρεωλύσιο), αν ο έτήσιος τόκος για κάθε δραχμή είναι  $\tau$ .**

**Λύση.** Ο όφειλέτης πρέπει μετά από  $n$  έτη να πληρώσει τό ποσό:  $\alpha(1+\tau)^n$ , γιατί οί  $\alpha$  δραχμές που δανείστηκε ανατοκίστηκαν για  $n$  έτη.

Έστω  $x$  δρχ. τό ποσό κάθε δόσεως (χρεωλύσιο) που πληρώνει στο τέλος κάθε έτους, τότε ο όφειλέτης θα καταβάλει στο δανειστή του συνολικά  $n$  δόσεις ίσες με  $x$  δραχμές ή καθεμιά. Η συνολική άξία αυτών των δόσεων (με τούς τόκους των) θα είναι, σύμφωνα με τον τύπο των χρεωλυτικών καταθέσεων, ίση προς:

$$x \cdot \frac{(1+\tau)^n - 1}{\tau}$$

Τότε όμως, σύμφωνα με τά πιο πάνω, θα έχουμε:

$$x \cdot \frac{(1+\tau)^n - 1}{\tau} = \alpha(1+\tau)^n \quad (1)$$

Η (1) λέγεται **εξίσωση της χρεωλυσίας**. Από την (1) βρίσκουμε τό ζητούμενο χρεωλύσιο. Αν λύσουμε την (1) ως προς  $x$  ή  $\alpha$  παίρνουμε αντίστοιχα τούς τύπους:

$$x = \frac{\alpha\tau(1+\tau)^n}{(1+\tau)^n - 1} \quad (1')$$

(1') και

$$\alpha = \frac{x \cdot [(1+\tau)^n - 1]}{\tau(1+\tau)^n} \quad (1'')$$



Στους πρακτικούς υπολογισμούς οι εκφράσεις  $(1 + \tau)^v$  και  $[(1 + \tau)^v - 1] : \tau$  δίνονται από ειδικούς πίνακες και έτσι βρίσκουμε εύκολα τά ποσά  $x$  και  $\alpha$  από τους τύπους (1') και (1'').

**Σημ.** Μερικές φορές η καταβολή της πρώτης δόσεως (χρεωλυσίου) γίνεται μετά  $\mu$  έτη από τότε που συμφωνήθηκε τό δάνειο. Τότε η εξίσωση της χρεωλυσίας είναι:

$$x \cdot \frac{(1 + \tau)^{v-\mu+1} - 1}{\tau} = \alpha(1 + \tau)^v \quad (\text{γιατί ;})$$

### ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**1η:** Μία κοινότητα δανείστηκε 300.000 δρχ. με ανατοκισμό 5% και θέλει να εξοφλήσει τό χρέος με ετήσιες χρεωλυτικές δόσεις σε 50 χρόνια. Νά βρεθεί τό ποσό κάθε δόσεως (χρεωλυσίου).

Λύση. 'Ο τύπος (1') δίνει:

$$x = \frac{300000 \cdot (0,05) \cdot (1,05)^{50}}{(1,05)^{50} - 1}$$

'Από τούς πίνακες ή με λογαρίθμους βρίσκουμε:  $(1,05)^{50} = 11,4674$ .

'Αρα:  $(1,05)^{50} - 1 = 10,4674$  και συνεπώς:

$$x = \frac{300000 \times 0,05 \times 11,4674}{10,4674} = 16.433,02 \text{ δρχ.}$$

**2η:** Ένας υπάλληλος μπορεί να διαθέσει για ετήσιο χρεωλύσιο 5.000 δρχ. Τι ποσό μπορεί να δανειστεί με επιτόκιο 4%, ώστε να τό εξοφλήσει σε 20 ετήσιες δόσεις;

Λύση. Έχουμε:  $x = 5000$ ,  $\tau = 0,04$ ,  $v = 20$  και ή (1'') γίνεται:

$$\alpha = \frac{5000[(1,04)^{20} - 1]}{0,04 \cdot (1,04)^{20}}$$

'Από την πιο πάνω σχέση με πίνακες ή με λογαρίθμους βρίσκουμε:  $\alpha = 67953$  δραχμές.

**3η:** Ένας δανείζεται 120.000 δρχ. με ανατοκισμό πρὸς 8%. Πόσες ετήσιες χρεωλυτικές δόσεις τῶν 15.000 δρχ. πρέπει να πληρώσει για να εξοφλήσει τό χρέος;

Λύση. 'Από την εξίσωση (1) έχουμε:

$$x(1 + \tau)^v - x = \alpha\tau(1 + \tau)^v,$$

οπότε:

$$(1 + \tau)^v = \frac{x}{x - \alpha\tau} \quad (2)$$

Τότε όμως είναι:  $v \cdot \log(1 + \tau) = \log x - \log(x - \alpha\tau)$

$$\text{'Αρα: } v = \frac{\log x - \log(x - \alpha\tau)}{\log(1 + \tau)} \quad (3)$$

'Επειδή είναι  $x = 15000$ ,  $\alpha = 120000$ ,  $\tau = 0,08$  και συνεπώς  $x - \alpha\tau = 5400$ , ο τύπος (3) δίνει:

$$v = \frac{\log 15000 - \log 5400}{\log 1,08}$$

'Από την τελευταία, επειδή  $\log 15000 = 4,17609$ ,  $\log 5400 = 3,73239$  και  $\log 1,08 = 0,03342$ , λαμβάνουμε:  $v = \frac{0,44370}{0,03342} = 13,276481$  έτη, δηλαδή  $13 < v < 14$ .

Τό εξαγόμενο σημαίνει πώς πρέπει να πληρωθούν 13 ετήσιες δόσεις τῶν 15000 δρχ.

και μία μικρότερη δόση:  $0,276481 \times 15000 = 4.147,215$  δρχ. σε (συντομότερο) διάστημα:  $0,276481 \times 360 = 99,53316 \approx 100$  ημερῶν μετά τη 13η δόση.

**Σημ.** Για να βρούμε τη 14η δόση που είναι μικρότερη τῶν 15.000 δρχ. μπορούμε να εργαστούμε και ως εξής: Βρίσκουμε πόσο γίνεται τό χρέος τῶν 120.000 δρχ. σε 14 έτη, δηλαδή τό:  $K = 120.000 \cdot (1,08)^{14}$ . Κατόπιν βρίσκουμε ότι οι δόσεις τῶν 15.000 δρχ. ή καθεμία στο τέλος του 14ου έτους γίνονται:

$$\Sigma = \frac{15000[(1,08)^{13} - 1]}{0,08} \cdot 1,08$$

'Η διαφορά  $K - \Sigma$  δίνει την τελευταία δόση.

**Σχόλιο.** Σύμφωνα με την εξίσωση (2) της τελευταίας εφαρμογής για να έχει τό πρόβλημα λύση πρέπει να είναι  $x > \alpha\tau$ , δηλαδή πρέπει τό χρεωλύσιο να είναι μεγαλύτερο από τόν ετήσιο τόκο του αρχικού κεφαλαίου, γιατί διαφορετικά ποτέ δεν πρόκειται να εξοφληθεί τό χρέος. 'Αν είναι  $x = \alpha\tau$ , τότε ή εξίσωση (2) δεν έχει λύση, γιατί ο παρονομαστής μηδενίζεται, που σημαίνει πώς τό  $v$  τείνει στο άπειρο. Σ' αυτή την περίπτωση λέμε πώς τό δάνειο γίνεται πάγιο, γιατί ποτέ δεν εξοφλείται και τό καταβαλλόμενο ποσό  $x$  χρησιμεύει για να πληρώνονται μόνο οι ετήσιοι τόκοι του αρχικού κεφαλαίου.

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**'Ομάδα Α'. 428.** Μία κοινότητα δανείστηκε 120.000 δρχ. με ανατοκισμό πρὸς 6% και θέλει να εξοφλήσει τό χρέος με ετήσιες χρεωλυτικές δόσεις σε 25 χρόνια. Νά βρείτε τό χρεωλύσιο που θα πληρώνει.

**429.** Ένας έμπορος υπολογίζει πώς μπορεί να πληρώνει ετήσιο χρεωλύσιο 8.650 δρχ. για 20 χρόνια. Τι ποσό μπορεί να δανειστεί με επιτόκιο 6% ετησίως;

**430.** Με πόσες ετήσιες χρεωλυτικές δόσεις τῶν 3.000 δρχ. μπορούμε να εξοφλήσουμε δάνειο 25.000 δρχ., όταν τό επιτόκιο είναι 6% ετησίως;

**431.** Μία εταιρεία μπορεί να διαθέτει από τά κέρδη της 100.000 δρχ. για ετήσιο χρεωλύσιο. Τι ποσό μπορεί να δανειστεί με επιτόκιο 5%, ώστε να τό εξοφλήσει σε 20 ετήσιες δόσεις;

**'Ομάδα Β'. 432.** Κάποιος δανείστηκε 250.000 δρχ. πρὸς 7% με την υποχρέωση να τό εξοφλήσει με 8 ετήσιες χρεωλυτικές δόσεις. Τρεις όμως μήνες μετά την κατάθεση της 5ης δόσεως θέλει να εξοφλήσει ὅλο τό ποσό. Πόσα πρέπει να καταβάλει;

**433.** Κάποιος δανείζεται  $\alpha$  δρχ. με ανατοκισμό και με ετήσιο τόκο  $\tau$  της μιάς δραχμής. Νά βρείτε τό ετήσιο χρεωλύσιο που πρέπει να πληρώνει, ώστε μετά  $v$  έτη. τό χρέος να μείνει τό μισό.

(Έφαρμογή:  $\alpha = 40000$ ,  $\tau = 0,05$ ,  $v = 12$ ).

**434.** Με πόσες εξαμηνιαίες χρεωλυτικές δόσεις μία εταιρεία θα εξοφλήσει δάνειο 2.000.000 δρχ., αν ο ανατοκισμός γίνεται πρὸς 3% κάθε εξαμηνία και τό χρεωλύσιο είναι 130.000 δραχμές;

**435.** 'Η εξόφληση ενός χρέους πρέπει να γίνει σε 20 έτη χρεωλυτικῶς. Κάθε ετήσια δόση είναι 46.130 δρχ. και αρχίζει ή καταβολή μετά τό 5ο έτος του δανείου. 'Αν τό επιτόκιο είναι 4,5%, να βρείτε πόσο είναι τό αρχικό ποσό;

**436.** Κάποιος συμφωνεί να πληρώσει σε έναν ασφαλιστικό 'Οργανισμό  $v$  ετήσιες δόσεις τῶν  $\alpha$  δρχ. την καθεμία, με την υποχρέωση ο 'Οργανισμός να του εξασφαλίσει για τά επόμενα  $2v$  έτη, ετήσιο εισόδημα που να ανέρχεται σε  $\beta$  δραχμές. 'Ο 'Οργανισμός θα καταβάλει για πρώτη φορά τό ποσό τῶν  $\beta$  δρχ., μετά από την τελευταία κατάθεση του ασφαλισμένου. Οι τόκοι είναι σύνθετοι και τό ετήσιο επιτόκιο της μιάς δραχμής είναι  $\tau$ . 1) Νά υπολογίσετε τό λόγο  $\frac{\alpha}{\beta}$  και 2) να βρείτε την τιμή του  $v$ , αν είναι  $\beta = 2\alpha$  και  $\tau = 0,05$ .



# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

## ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ I

#### ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΤΑ ΣΥΝΟΛΑ

Σελίδα

1. Προτασιακοί τύποι — Προτάσεις — Ποσοδείκτες — Λογικοί σύνδεσμοι — Συνθετες προτάσεις — Πράξεις μεταξύ λογικών προτάσεων — Ταυτολογίες — Ταυτολογικές Ισοδυναμίες και αντιλογίες — Η έννοια του συνόλου — Βασική Ισότητα συνόλου — Τρόποι παραστάσεως ενός συνόλου — Τό κενό σύνολο — Συνθήκη και ταυτότητα σε σύνολο — Η έννοια του υποσυνόλου — Ισότητα δύο συνόλων — Δυναμοσύνολο ενός συνόλου — Βασικό σύνολο — Καρτεσιανό γινόμενο συνόλων — Πράξεις μεταξύ συνόλων — Ιδιότητες των πράξεων των συνόλων — Ασκήσεις .....

5 - 19

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ II

#### ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΟΥ ΡΕΑΝΟ — ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ Η ΤΕΛΕΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

2. Αξιώματα των φυσικών αριθμών κατά Peano — Η μέθοδος της τέλει επαγωγής — Πρώτη μορφή της τέλει επαγωγής — Εφαρμογές (άνισότητα του Bernoulli) — Αρχή του ελάχιστου φυσικού αριθμού — Δεύτερη μορφή της τέλει επαγωγής — Εφαρμογές — Ασκήσεις .....

20 - 27

## ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

#### ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΚΑΙ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

3. Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού — Ιδιότητες των απόλυτων τιμών πραγματικών αριθμών — Εφαρμογές — Ασκήσεις — Απόλυτη τιμή ή μέτρο μιγαδικού αριθμού — Ιδιότητες των απόλυτων τιμών μιγαδικών αριθμών — Εφαρμογές — Ασκήσεις — Εξισώσεις με απόλυτες τιμές του άγνωστου — Ανισώσεις με απόλυτες τιμές του άγνωστου — Επίλυση στο  $\mathbb{R}$  συστημάτων με απόλυτες τιμές των άγνωστων — Ασκήσεις .....

28 - 50

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

#### ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

4. Η έννοια της ακολουθίας — Πράξεις μεταξύ ακολουθιών — Η έννοια της φραγμένης και της μονότονης ακολουθίας — Η έννοια της ύπακολουθίας — Ακέραιο μέρος πραγματικού αριθμού — Η έννοια της περιοχής ή γειτονιάς σημείου του  $\mathbb{R}$  — Η έννοια του όριου ακολουθίας — Ιδιότητες συγκλινουσών ακολουθιών — Η άλγεβρα των όριων — Μερικές αξιοσημείωτες και χρήσιμες εφαρμογές — Μονότονες και φραγμένες ακολουθίες — Εφαρμογές — Ασκήσεις ..

51 - 90

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

#### ΠΡΟΟΔΟΙ — ΣΕΙΡΕΣ

5. Αριθμητικές πρόοδοι — Αρμονικές πρόοδοι — Γεωμετρικές πρόοδοι — Στοιχεία από τις σειρές πραγματικών αριθμών — Εφαρμογές — Ασκήσεις .....

91 - 140

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

#### ΑΚΕΡΑΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΑΝΤΗΣ

6. Η έννοια του άκεραιου πολυωνύμου — Τό μηδενικό πολυώνυμο — Βαθμός ενός μη μηδενικού πολυωνύμου — Άλγεβρα (λογισμός) των πολυωνύμων — Πολυωνυμική συνάρτηση — Αριθμητική τιμή και ρίζα πολυωνύμου — Μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών — Διαιρετότητα άκεραιων πολυωνύμων — Η ταυτότητα της αλγοριθμικής διαιρέσεως — Ιδιότητες των άκεραιων πολυωνύμων — Βαθμός πολλαπλότητας ρίζας πολυωνύμου — Πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές — Πολυώνυμα με ρητούς συντελεστές — Πολυώνυμα με άκεραίους συντελεστές — Εφαρμογές — Ασκήσεις .....

141 - 180

Ανάλυση ρητού κλάσματος σε άθροι-  
ρέσεως του άθροίσματος των ν πρώτων  
και εφαρμογές του στην Άλγεβρα και

ΚΕ

## ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ — ΕΚΘΕΤΙΚ

7. Λογάριθμοι. Όρισμοί — Ιδιότητες — Μογές — Δεκαδικοί λογάριθμοι — Λογικών πινάκων — Εκθετικές εξισώσεις και συστήματα — Εφαρμογές —

ΚΕΦ

## ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ — ΊΣΕΣ

8. Ανατοκισμός — Ισοδύναμα έπιτόκια — λυσία — Ασκήσεις .....

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

$$\frac{a - \sqrt{a}}{a + \sqrt{a}} \cdot \frac{(a - \sqrt{a})^2}{a^2 - a}$$

$$\frac{a^2 - a - \sqrt{a}a}{a^2 - a} = a$$

$$a^2 / (1 + \frac{1}{a})$$