

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

- **Πείραμα τύχης** ονομάζεται κάθε πείραμα το οποίο μπορεί να επαναληφθεί κάτω από τις ίδιες συνθήκες και του οποίου δεν μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμα.
- **Δειγματικός χώρος** ενός πειράματος τύχης ονομάζεται το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος. Συμβολίζεται συνήθως με Ω .
- **Ενδεχόμενο** ενός πειράματος τύχης ονομάζεται κάθε σύνολο που έχει ως στοιχεία ένα ή περισσότερα αποτελέσματα του πειράματος τύχης. Δεχόμαστε ως ενδεχόμενο και το κενό σύνολο ($\emptyset$) που δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος τύχης. Γι' αυτό λέμε ότι το καινό είναι το **αδύνατο ενδεχόμενο**.
- **Απλό** ονομάζεται ένα ενδεχόμενο όταν έχει ένα μόνο στοιχείο.
- **Σύνθετο** ονομάζεται ένα ενδεχόμενο όταν έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία.
- Ένα ενδεχόμενο λέμε ότι **πραγματοποιείται** αν το αποτέλεσμα του πειράματος τύχης είναι στοιχείο του ενδεχομένου.
- **Βέβαιο ενδεχόμενο** λέγεται ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος τύχης γιατί το αποτέλεσμα του πειράματος τύχης θα ανήκει στο Ω .
- Δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται **ασυμβίβαστα ή ξένα μεταξύ τους ή αμοιβαίως αποκλειόμενα**, όταν δεν έχουν κοινά στοιχεία, δηλαδή όταν $A \cap B = \emptyset$

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

- $A' = \{x \in \Omega / x \notin A\}$: Δεν πραγματοποιείται το A

- $A \cup B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ ή } x \in B\}$

Πραγματοποιείται το A ή το B

Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B

- $A \cap B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ και } x \in B\}$

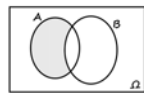
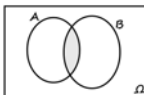
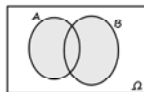
Πραγματοποιείται το A και το B

Πραγματοποιούνται τα A και B ταυτόχρονα

- $A - B = A \cap B' = \{x \in \Omega / x \in A \text{ και } x \notin B\}$

Πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B

Πραγματοποιείται μόνο το A .



$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cap B') \cup (B \cap A') =$$

$$\{x \in \Omega / (x \in A \text{ και } x \notin B) \text{ ή } (x \in B \text{ και } x \notin A)\}$$

Πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα A, B
Πραγματοποιείται ένα μόνο από τα A, B

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

Δεν πραγματοποιείται το A ή δεν πραγματοποιείται το B

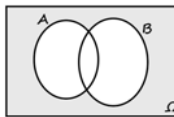
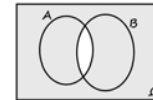
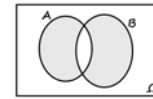
Τουλάχιστον ένα από τα A και B δεν πραγματοποιείται

Το πολύ ένα από τα A, B πραγματοποιείται
Δεν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A, B

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A και B

Δεν πραγματοποιείται το A και δεν πραγματοποιείται το B



ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΓΑΛΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ή ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΟΜΑΔΟΤΗΤΑ

Έστω ένα πείραμα τύχης που εκτελείται n φορές και ότι το ενδεχόμενο A εμφανίζεται k φορές. **Σχετική συχνότητα** του ενδεχομένου A ονομάζεται το πηλίκο $f_A = \frac{k}{n}$.

Οι σχετικές συχνότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων ενός πειράματος σταθεροποιούνται γύρω από κάποιους αριθμούς (όχι πάντοτε τους ίδιους), καθώς ο αριθμός των δοκιμών του πειράματος επαναλαμβάνεται απεριόριστα.

ΚΛΑΣΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Έστω Ω πεπερασμένος δειγματικός χώρος με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και A ένα ενδεχόμενο του Ω . Ορίζουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου A τον αριθμό:

$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος Ευνοϊκών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

$$\text{Είναι: } P(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1, \quad P(\emptyset) = \frac{N(\emptyset)}{N(\Omega)} = 0$$

και για κάθε ενδεχόμενο A ισχύει $0 \leq P(A) \leq 1$.

ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Σε κάθε απλό ενδεχόμενο $\{\omega_i\}$ αντι-

στοιχίζουμε έναν πραγματικό αριθμό, που τον συμβολίζουμε με $P(\omega_i)$, έτσι ώστε να ισχύουν: $0 \leq P(\omega_i) \leq 1$ και $P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_n) = 1$.

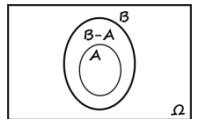
Τον αριθμό $P(\omega_i)$ ονομάζουμε πιθανότητα του ενδεχομένου $\{\omega_i\}$. Ως πιθανότητα $P(A)$ του ενδεχομένου $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \neq \emptyset$ ορίζουμε το άθροισμα $P(\alpha_1) + P(\alpha_2) + \dots + P(\alpha_k)$, ενώ ως πιθανότητα του αδύνατου ενδεχομένου ($\emptyset$) ορίζουμε τον αριθμό $P(\emptyset) = 0$.

ΚΑΝΟΝΕΣ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

- Αν $A \cap B = \emptyset$ τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A') = 1 - P(A)$
- $P(A - B) = P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$
- $P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$
- $P[(A \cup B)'] = P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B)$
- $P[(A \cap B)'] = P(A' \cup B') = 1 - P(A \cap B)$

- Αν $A \subseteq B$ τότε:

- $P(A) \leq P(B)$
- $A \cap B = A$ άρα $P(A \cap B) = P(A)$
- $A \cup B = B$ άρα $P(A \cup B) = P(B)$
- $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)$



- Είναι $\emptyset \subseteq A \cap B \subseteq A, B \subseteq A \cup B \subseteq \Omega$ άρα $0 = P(\emptyset) \leq P(A \cap B) \leq P(A), P(B) \leq P(A \cup B) \leq P(\Omega) = 1$

- $\max\{P(A), P(B)\} \leq P(A \cup B) \leq 1$

- $P(A \cup B) \leq 1 \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$
 $\Leftrightarrow P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$

Άρα: $\max\{P(A) + P(B) - 1, 0\} \leq P(A \cap B) \leq \min\{P(A), P(B)\}$

Παραδείγματα:

1. Μια μηχανή παράγει εξαρτήματα τα οποία μπορεί να είναι αποδεκτά με πιθανότητα 88% ή να είναι ελαττωματικά έχοντας λάθος μέγεθος με πιθανότητα 8% ή να

έχουν λάθος χρώμα με πιθανότητα 7%.

Να υπολογίσετε την πιθανότητα ένα τυχαία επιλεγόμενο εξάρτημα

α) να είναι ελαττωματικό.

β) να έχει λάθος μέγεθος και λάθος χρώμα.

γ) να έχει ακριβώς ένα λάθος.

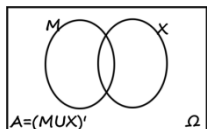
Λύση

Έστω τα ενδεχόμενα

A: Επιλέγεται αποδεκτό εξάρτημα

M: Επιλέγεται εξάρτημα με λάθος μέγεθος

X: Επιλέγεται εξάρτημα με λάθος χρώμα.



α) Ένα εξάρτημα είναι αποδεκτό ή ελαττωματικό. Άρα τα μη αποδεκτά εξαρτήματα είναι τα ελαττωματικά. Δηλαδή:

$$P(\text{Επιλέγεται ελαττωματικό εξάρτημα}) = P(A') = 1 - P(A) = 1 - 88\% = 12\%$$

β) Ελαττωματικά είναι τα εξαρτήματα που έχουν λάθος μέγεθος ή λάθος χρώμα, άρα

$$P(M \cup X) = P(\text{Επιλέγεται ελαττωματικό εξάρτημα}) = P(A') = 12\%$$

Οπότε

$$P(\text{να έχει λάθος μέγεθος και λάθος χρώμα}) = P(M \cap X) = P(M) + P(X) - P(M \cup X) = 8\% + 7\% - 12\% = 3\%$$

$$\gamma) P(\text{να έχει ακριβώς ένα λάθος}) = P[(M - X) \cup (X - M)] = P(M) + P(X) - 2P(M \cap X) = 8\% + 7\% - 2 \cdot 3\% = 9\%$$

2. Έστω $\Omega = \{κ, λ, μ, 4, 5\}$ με $κ, λ, μ \in \mathbb{N}$ και $κ < λ < μ$, ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης ώστε να ι-

$$\text{σχύει: } P(κ) = \frac{P(λ)}{2} = \frac{P(μ)}{3} = \frac{P(4)}{4} = \frac{P(5)}{5}$$

α) Να βρείτε τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω .

β) Να βρείτε τα $κ, λ, μ$ αν η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2011$$

έχει τοπικά ακρότατα για $x = κ$ και $x = μ$.

Λύση

$$\text{Έστω } P(κ) = \frac{P(λ)}{2} = \frac{P(μ)}{3} = \frac{P(4)}{4} = \frac{P(5)}{5} = \frac{P(6)}{6} = ρ \in \mathbb{R} \text{ τότε:}$$

$$P(κ) = ρ, \frac{P(λ)}{2} = ρ \Leftrightarrow P(λ) = 2ρ, \frac{P(μ)}{3} = ρ \Leftrightarrow P(μ) = 3ρ,$$

$$\frac{P(4)}{4} = ρ \Leftrightarrow P(4) = 4ρ, \frac{P(5)}{5} = ρ \Leftrightarrow P(5) = 5ρ$$

$$\text{και } P(κ) + P(λ) + P(μ) + P(4) + P(5) = 1$$

$$\Leftrightarrow ρ + 2ρ + 3ρ + 4ρ + 5ρ = 1$$

$$\Leftrightarrow ρ + 2ρ + 3ρ + 4ρ + 5ρ = 1$$

$$\Leftrightarrow 15ρ = 1 \Leftrightarrow ρ = \frac{1}{15}$$

$$\text{Άρα: } P(κ) = \frac{1}{15}, P(λ) = \frac{2}{15}, P(μ) = \frac{3}{15}, P(4) = \frac{4}{15},$$

$$P(5) = \frac{5}{15}$$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ και $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3$

Άρα είναι:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$		↗	↘	↗

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = 1$ και τοπικό ελάχιστο για $x = 3$, επομένως $κ = 1$ και $μ = 3$, αφού $κ < μ$. Ο μόνος φυσικός αριθ-

μός μεταξύ των 1 και 3 είναι το 2, επομένως $λ = 2$ γιατί $κ < λ < μ$ και $λ \in \mathbb{N}$.

3. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες;

α) Είναι $A \subseteq B$ αν και μόνο αν $P(A) \leq P(B)$ (Λάθος)

β) Αν $A' \subseteq B$ τότε $P(A) + P(B) < 1$ (Λάθος)

γ) Το ενδεχόμενο $A \cup B$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα ενδεχόμενα A και B (Λάθος)

δ) Αν $P(A) = 0,8$ και $P(B) = 0,3$ τότε

ι. Τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα (Λάθος)

ii. Είναι $0,1 \leq P(A \cap B) \leq 0,3$ (Σωστό)

ε) Αν $P(A) + P(B) = 1$ τότε $A' = B$ (Λάθος)

στ) Αν Ω δειγματικός χώρος με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και A, B ενδεχόμενα του Ω με $P(A) = P(B)$ τότε $N(A) = N(B)$ (Σωστό)

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ



Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ