

Α.Κ.ΚΥΡΙΑΚΟΠΟΥΛΟΥ
Αριστοβαθμίου Μαθηματικού

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

ΜΕΤΑ

ΜΕΘΟΔΩΝ ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΣ ΕΙΣ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Δεύτερα Έκδοσις

$$\frac{p, p \Rightarrow q}{q}$$

ΑΘΗΝΑΙ

Α.Κ.ΚΥΡΙΑΚΟΠΟΥΛΟΥ

Άριστοβαθμίου Μαθηματικού

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

ΜΕΤΑ

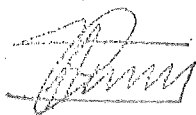
ΜΕΘΟΔΩΝ ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΣ ΕΙΣ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Δευτέρα Έκδοσις

$$\frac{p, p \Rightarrow q}{q}$$

ΑΘΗΝΑΙ

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφήν τοῦ συγγραφέως



Ἀπαγορεύεται πᾶσα ἀνατύπωσις ἐν ὅλῳ ἢ ἐν μέρει ἄνευ τῆς
ἐγγράφου ἀδείας τοῦ συγγραφέως.

Ἀφιερῶται
εἰς τὴν μνήμην τῆς μητέρας μου Αἰκατερίνης

Πρόλογος δευτέρας έκδόσεως

Ἡ πρώτη ἔκδοσις τοῦ παρόντος βιβλίου ἐκάλυπεν ἓνα μεγάλο κενόν τῆς Ἑλληνικῆς Μαθηματικῆς βιβλιογραφίας. Τοῦτο ἀνεγνώρισθη ὅχι μόνον ὑπὸ τῶν συναδέλφων τῆς μέσης ἐκπαιδεύσεως, ἀλλὰ καί ὑπὸ Πανεπιστημιακῶν διδασκάλων.

Τό βιβλίον τοῦτο ὅχι μόνον ἐδιδάχθη καί ἐξακολουθεῖ νά διδάσκεται εἰς πολλάς περιπτώσεις μαθημάτων μετεκπαιδεύσεως, ὅπου τό πρόγραμμα προβλέπει τήν διδασκαλίαν τῆς Μαθηματικῆς Λογικῆς, ἀλλά καί ἐπηρέασε πολλά Μαθηματικά βιβλία τά ὁποῖα ἐξεδόθησαν μετὰ ἀπό αὐτό.

Ἄν καί ἡ Μαθηματική Λογική ἀποτελεῖ τό ἀπαραίτητον μέσον διὰ τήν αὐστηράν ἀντιμετώπισιν τῶν συγχρόνων μαθηματικῶν, στοιχειωδῶν καί ἀνωτέρων, τό παρόν βιβλίον ἐξακολουθεῖ νά εἶναι, ὅπως δέν θά ἔπρεπε, τό μοναδικόν πλήρες Ἑλληνικόν βιβλίον Μαθηματικῆς Λογικῆς.

— Εἰς τήν παροῦσαν δευτέραν ἔκδοσιν ἔχω προσθέσει τρία νέα κεφάλαια ὑπὸ τόν γενικόν τίτλον: «Προσθήκαι» (μέρος τρίτον). Τά νέα αὐτά κεφάλαια, τά ὁποῖα σχετίζονται κυρίως μέ ἐφαρμογάς τῆς Μαθηματικῆς Λογικῆς, εἶναι τά κεφάλαια 9, 10 καί 11.

Εἰς τό κεφάλαιον 9 ἐπιλύω τό πρόβλημα τῆς εὐρέσεως μιᾶς προτασιακῆς παραστάσεως ἐκ τοῦ πίνακος τιμῶν ἀληθείας αὐτῆς. Ἐπίσης, περιέχει καί μίαν πολύ ἐνδιαφέρουσαν ἐφαρμογήν (§ 9.2).

Τό κεφάλαιον 10 φέρει τόν τίτλον: «Ἀλγεβρα διακοπτῶν» καί περιέχει μίαν πολύ χρήσιμον ἐφαρμογήν τῆς Μαθηματικῆς Λογικῆς εἰς τοὺς διακόπτας ἐνός κυκλώματος (ἡλεκτρικοῦ, ὑδραυλικοῦ, ὀδικοῦ κ.λ.π.).

Τό κεφάλαιον 11 φέρει τόν τίτλον: «Μέθοδοι ἀποδείξεως εἰς τά Μαθηματικά». Εἰς τό κεφάλαιον αὐτό ἀναπτύσσω τās κυριωτέρας μεθόδους ἀποδείξεως εἰς τά Μαθηματικά. Ἐκεῖ ὁ ἐνδιαφερόμενος ὅχι μόνον θά διαπιστώσῃ ὅτι κάθε προσπάθεια πρὸς ἀπόδειξιν μιᾶς προτάσεως εἰς τά Μαθηματικά ὀφείλει νά βασίζεται εἰς τοὺς νόμους τῆς Λογικῆς, ἀλλὰ καί θά βεβαιωθῇ ὅτι, γνωρίζων τοὺς νόμους αὐτούς, δύναται νά ἀποφεύγῃ ἐσφαλμένας ἀποδείξεις.

Πρόλογος πρώτης έκδόσεως

Ἡ διαπίστωση, κατὰ τὰς ἀρχάς τοῦ αἰῶνος μας, ὅτι ἡ Κλασσικὴ (Ἀριστοτέλειος) Λογικὴ εἶναι ἀνεπαρκὴς διὰ νὰ ὑπηρετήσῃ τὴν λογικὴν ἐδραίωσιν τῶν Μαθηματικῶν, ὠδήγησεν εἰς τὴν ἐξ ἀρχῆς θεώρησιν τῆς Λογικῆς καὶ τὴν ἀντιμετώπισιν αὐτῆς διὰ μαθηματικῶν μεθόδων. Οὕτως, ἐγεννήθη ἡ **Μαθηματικὴ Λογικὴ**, καλουμένη ἐπίσης καὶ **Συμβολικὴ Λογικὴ**. Αὕτη ἐσυστηματοποίησε τὴν Κλασσικὴν, διήρυνεν αὐτὴν καὶ διήνοιξε νέους ὁρίζοντας ἀγνώστους εἰς τὴν Κλασσικὴν Λογικὴν. Ἡ Μαθηματικὴ Λογικὴ ὄχι μόνον συνετέλεσεν εἰς τὴν θεμελίωσιν τῶν Μαθηματικῶν, ἀλλὰ ἀνεπτύχθη εἰς τοιοῦτον σημεῖον, ὥστε νὰ ἐπωφεληθῇ αὐτῆς καὶ αὐτὴ ἀκόμη ἡ Τεχνολογία, ἥτις δέν θὰ εἶχε νὰ παρουσιάσῃ τὰς σημερινὰς της προόδους ἀνευ τῶν ἡλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν, διὰ τὴν ἐπινόησιν τῶν ὁποίων ἡ Μαθηματικὴ Λογικὴ ἔπαιξε πρωτεύοντα ρόλον.

Καθίσταται φανερόν ὅτι ἡ αὐστηρὰ ἀντιμετώπισις τῶν Μαθηματικῶν ἀνευ τῆς Μαθηματικῆς Λογικῆς εἶναι ἀδύνατος. Ἡ δέ ἔλλειψις ἐνός βιβλίου εἰς τὴν Ἑλληνικὴν περὶ Μαθηματικῆς Λογικῆς ὠδήγησεν ἡμᾶς εἰς τὴν παροῦσαν συγγραφὴν.

Κατὰ τ' ἀνωτέρω τὸ ἀνά χεῖρας βιβλίον ἀπευθύνεται, κυρίως, πρὸς τοὺς καθ' οἷον δὴποτε τρόπον ἀσχολουμένους μὲ τὰ Μαθηματικά, λόγῳ ὅμως τῆς φύσεως τοῦ περιεχομένου του δύναται νὰ ἀποβῇ χρησίμῳ καὶ εἰς πάντα πνευματικόν ἄνθρωπον.

Θεωρῶ ὑποχρέωσίν μου νὰ ἐκφράσω καὶ ἐνταῦθα τὰς εὐχαριστίας μου πρὸς τὴν σύζυγόν μου Μαθηματικόν κ. Κρίς Κυριακοπούλου - Κυβερνήτου διὰ τὴν πολύτιμον βοήθειαν, τὴν ὁποίαν μοῦ προσέφερεν κατὰ τὴν συγγραφὴν τοῦ παρόντος βιβλίου.

Εὐχαρίστως θὰ ἐδεχόμεθα παρατηρήσεις τῶν ἀναγνωστῶν τοῦ ἀνά χεῖρας βιβλίου, τόσον ὡς πρὸς τὴν οὐσίαν τοῦ περιεχομένου, ὅσον καὶ ὡς πρὸς τὴν χρησιμοποιομένην ὀρολογίαν.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

0.1. Αντικείμενα. Γλώσσα. Σύμβολα.

Δέν πρέπει νά ἔχωμεν τήν φιλοδοξίαν νά οἰκοδομήσωμεν τήν Λογικήν καί τά Μαθηματικά ἀρχίζοντες, ὅπως λέγομεν, ἐκ τοῦ μηδενός. Θά δεχθῶμεν ὅτι ὑπάρχουν «πράγματα», «ὄντα», «ἄτομα», «φαινόμενα» κ.λ.π., τά ὁποῖα εἰς τά ἐπόμενα, χάριν φραστικῆς εὐκολίας, θά ὀνομάζωμεν (μέ μίαν λέξιν): «ἀντικείμενα». Δηλαδή, «ἀντικείμενον» θά ὀνομάζωμεν κάθε τι, τό ὁποῖον δύναται νά ὑποπέσῃ εἰς τήν ἀντίληψίν μας εἴτε διὰ τῶν αἰσθήσεών μας εἴτε διὰ τῆς νοήσεώς μας.

Προκειμένου ὅμως νά ἐκφράσωμεν τās σκέψεις μας, νά ἀπεικονίσωμεν πρακτικῶς τούς συλλογισμούς μας καί εἰδικῶς νά οἰκοδομήσωμεν τήν Λογικήν καί τά Μαθηματικά, πρέπει νά χρησιμοποιήσωμεν μίαν «γλῶσσαν», τῇ βοηθείᾳ τῆς ὁποίας θά παριστῶμεν τά διάφορα ἀντικείμενα μέ σύμβολα.

— Ἐν σύμβολον, εἰς μίαν γλῶσσαν, λέγομεν ὅτι ἔχει «ἐννοιαν», ἐάν εἰς αὐτό ἀντιστοιχῇ ἓν ἀντικείμενον, τό ὁποῖον, ὅπως λέγομεν, εἶναι ἡ **ἐννοια** ἢ ἡ **σημασία** τοῦ συμβόλου. Εἰς τās συνήθεις γλῶσσας (Ἑλληνικήν, Ἀγγλικήν κ.λ.π.) τά ἀπλούστερα σύμβολα, τά ὁποῖα ἔχουν ἐννοιαν εἶναι αἱ λέξεις, καλούμεναι καί **ὄροι** τῆς γλώσσης. Συνδυάζοντες τās λέξεις μεταξύ των, καθὼς καί μέ μερικὰ ἄλλα σύμβολα ἐξυπηρετοῦντα τήν λειτουργίαν τῆς γλώσσης, σχηματίζομεν ἄλλα πολυπλοκώτερα σύμβολα, τά ὁποῖα καλοῦμεν: ἐκφράσεις, προτάσεις κ.λ.π.

Κάθε γλῶσσα περιέχει κανόνες, οἱ ὁποῖοι μᾶς ἐπιτρέπουν νά εἴπωμεν, ἐάν ἓν σύμβολον ἔχῃ ἢ δέν ἔχῃ ἐννοιαν. Π.χ. εἰς τήν γλῶσσαν μας τά σύμβολα: «τραπέζι», «συλλογισμός», «ἐκρηγίς», «ἐκλειψις Ἡλίου» κ.λ.π. ἔχουν ἐννοιαν.

— Τά σύμβολα εἶναι καί αὐτά, ἐπίσης, ἀντικείμενα ἐνός ἄλλου ὁμοῦ τύπου ἐκείνου τῶν ἀντικειμένων, τά ὁποῖα παριστοῦν. Π.χ. ἡ λέξις «τραπέζι» αὐτή καθ' ἑαυτή εἶναι διάφορος τοῦ ἀντικειμένου, τό ὁποῖον παριστᾷ.

0.2. Έκφράσεις. Προτάσεις.

Κάθε συνδυασμός συμβόλων προκαθορισμένων έννοιων, λέγουμεν ότι είναι μία **έκφρασις**.

Μία έκφρασις δύναται νά ἔχη ἢ νά μή ἔχη « νόημα ». Π.χ. αἱ ἐκφράσεις:

1. « Ἡ Κρήτη εἶναι νῆσος »
2. « Ὁ ἀριθμός 5 εἶναι ἄρτιος »
3. « Ποῦ πηγαίνετε ; »
4. « Καλό ταξίδι »,

ἔχουν νόημα. Ἀντιθέτως, αἱ ἐκφράσεις:

5. « Τό Λονδῖνον εἶναι »
6. « Αὔριον + 3 »,

δέν ἔχουν νόημα.

— Βάσει γενικῶν συμφωνιῶν, μερικαί ἐκ τῶν ἐκφράσεων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν νόημα, χαρακτηρίζονται ὡς « ἀληθεῖς » ἢ ὡς « ψευδεῖς ». Π.χ. ἡ ἀνωτέρω ἐκφρασις (1) εἶναι ἀληθής. Ἡ (2) εἶναι ψευδής. Αἱ ἐκφράσεις (3) καί (4), παρ' ὅλον ὅτι ἔχουν νόημα, δέν χαρακτηρίζονται οὔτε ὡς ἀληθεῖς οὔτε ὡς ψευδεῖς. Αἱ ἐκφράσεις (5) καί (6) δέν ἔχουν νόημα. Δι' αὐτάς δέν τίθεται θέμα τοιούτων χαρακτηρισμῶν.

Βλέπομεν, λοιπόν, ὅτι:

- α) Ἵνα μία ἐκφρασις δύναται νά χαρακτηρισθῇ ὡς ἀληθής ἢ ὡς ψευδής, πρέπει ἀπαραιτήτως νά ἔχη νόημα.
- β) Κάθε ἐκφρασις, ἥτις ἔχει νόημα δέν δύναται ἀναγκαιῶς νά χαρακτηρισθῇ ὡς ἀληθής ἢ ὡς ψευδής.
- γ) Αἱ ἐκφράσεις, αἱ ὁποῖαι δέν ἔχουν νόημα, δέν χαρακτηρίζονται οὔτε ὡς ἀληθεῖς οὔτε ὡς ψευδεῖς.

— Κάθε ἐκφρασις, ἔχουσα (πλήρες καί αὐτοτελές) νόημα καί δυναμένη νά χαρακτηρισθῇ, κατὰ ἀκριβῶς ἓνα τρόπον, ὡς ἀληθής ἢ ὡς ψευδής, λέγουμεν ὅτι εἶναι μία **πρότασις** (λογική πρότασις).

Π.χ. αἱ ἀνωτέρω ἐκφράσεις (1) καί (2) εἶναι προτάσεις. Μάλιστα δέ ἡ (1) εἶναι μία πρότασις ἀληθής, ἐνῶ ἡ (2) εἶναι μία πρότασις ψευδής. Αἱ ὑπόλοιποι ἐκφράσεις (3), (4), (5) καί (6) δέν εἶναι προτάσεις.

— Πολλάς φορές σχηματίζομεν προτάσεις συνδέοντες (καταλλήλως) ἄλλας προτάσεις μέ διαφόρους ἐκφράσεις (συνδετικά), τὰς ὁποίας καλοῦμεν **λογικοὺς συνδέσμους** ἢ **λογικὰς σταθεράς**. Γενικῶς, εἰς τήν λογικήν τῶν προτάσεων, ὡς λογικοὶ σύνδεσμοι θεωροῦνται αἱ ἑξῆς ἐκφράσεις:

«ὄχι» , «καί» , «εἴτε» ,
«ἐάν,...,τότε» , «ἐάν, καί μόνον ἐάν,».

Δεχόμεθα δέ γενικῶς ὅτι διὰ παραθέσεως «ἀρχικῶν προτάσεων» (δηλαδή, προτάσεων αἱ ὁποῖαι ἀντιμετωπίζονται ὡς «ἀδιαίρετοι», ὡς μία ὁλότης) συνδεομένων (καταλλήλως) διὰ λογικῶν συνδέσμων προκύπτουν νέαι προτάσεις, καλούμεναι καί **σύνθετοι προτάσεις**. Σύνθετοι προτάσεις εἶναι π.χ. αἱ ἐξῆς:

7. «Τό Παρίσι εἶναι εἰς τήν Γαλλίαν καί τό Λονδῖνον εἶναι εἰς τήν Ἀγγλίαν». (ἀληθής)
8. «Ἡ Κρήτη εἶναι νῆσος εἴτε τό Παρίσι εἶναι εἰς τήν Ἀγγλίαν». (ἀληθής)
9. «Ἐάν ὁ 8 εἶναι ἄρτιος, τότε $7 > 3$ ». (ἀληθής)
10. «Ὁ 6 εἶναι ἄρτιος ἐάν, καί μόνον ἐάν, εἶναι διαιρετός διὰ τοῦ 2». (ἀληθής)
11. «Ὁχι ὁ 7 εἶναι περιττός». Αὕτη θεωρεῖται ὡς ταυτόσημος μέ τήν: «ὁ 7 δέν εἶναι περιττός». (ψευδής)

Ὁ χαρακτηρισμός ὅμως ἐκάστης ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνθέτων προτάσεων ὡς ἀληθοῦς ἢ ὡς ψευδοῦς δέν εἶναι αὐτονόητος. Εἰς τὰ ἐπόμενα θά ἴδωμεν κανόνας, βάσει τῶν ὁποίων ἐκάστη σύνθετος πρότασις χαρακτηρίζεται εὐκόλως ὡς ἀληθής ἢ ὡς ψευδής.

Σημείωσις. Λογικούς συνδέσμους χρησιμοποιοῦμεν τόσον εἰς τὰ Μαθηματικά, ὥσον καί εἰς τήν συνήθη γλῶσσαν. Τό αὐτό συμβαίνει καί μέ ἄλλας ἐκφράσεις, ὥπως π.χ. «διὰ κάθε», «ὑπάρχει» κ.λ.π. Αἱ ἐκφράσεις ὅμως αὗται τῆς συνήθους γλώσσης ἀφήνουν συχνά ἀμφιβολίας ἢ ἐπιτρέπουν παρερμηνείας, πράγμα τό ὅποσον δέν ἐπιτρέπεται εἰς τὰ Μαθηματικά. Εἰς τὰ ἐπόμενα θά ἴδωμεν τί ἀκριβῶς σημαίνει ἐκάστη ἐκ τῶν ἐν λόγῳ ἐκφράσεων εἰς τήν Μαθηματικήν γλῶσσαν. Πάντως, ἄς ἔχωμεν ἀπό τοῦδε ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ Μαθηματική γλῶσσα δέν εἶναι πάντοτε ταυτόσημος μέ τήν συνήθη τοιαύτην.

0. 3. Μαθηματικά.

Ὅταν λέγωμεν **Μαθηματικά**, ἐννοοῦμεν τό σύνολον τῶν **Μαθηματικῶν θεωριῶν**. Μία δέ Μαθηματική (ἀξιωματική ἢ παραγωγική) θεωρία συνίσταται εἰς:

- (α) — Τήν ἐκλογήν (ἀνευ ὁρισμοῦ) μερικῶν ὄρων (λέξεων ἢ καί ἄλλων συμβόλων), οἱ ὁποῖοι καλοῦνται **ἀρχικοί** ἢ **πρῶτοι** ὅροι τῆς θεωρίας.
- (β) — Τόν, βάσει τῶν ἀρχικῶν ὄρων, ὁρισμόν νέων ὄρων, οἱ ὁποῖοι καλοῦνται **ὀριζόμενοι ὅροι** τῆς θεωρίας.

(γ) — Τήν παραδοχήν ὡς ἀληθῶν μερικῶν προτάσεων ἀναφερομένων εἰς τοὺς ἀρχικοὺς ἢ καὶ τοὺς ὀριζομένους ὅρους, αἱ ὁποῖαι καλοῦνται **ἀξιώματα** τῆς θεωρίας.

(δ) — Τήν διατύπωσιν νέων προτάσεων, τὰς ὁποίας βάσει τῶν τεθέντων ἀξιωμάτων καὶ τῆς Λογικῆς, συμπεραίνομεν ὡς ἀληθεῖς. Αἱ προτάσεις αὗται καλοῦνται **θεωρήματα** τῆς θεωρίας.

Ὑπάρχουν πολλαὶ Μαθηματικαὶ θεωρίαι. Ἡ θεωρία τῶν Συνόλων εἶναι μία Μαθηματικὴ θεωρία. Αὕτη χρησιμοποιεῖται εἰς κάθε ἄλλην Μαθηματικὴν θεωρίαν. Ἡ Εὐκλείδειος Γεωμετρία εἶναι ἐπίσης μία Μαθηματικὴ θεωρία. Ἄλλαι Μαθηματικαὶ θεωρίαι εἶναι π.χ. ἡ θεωρία τῶν ομάδων, ἡ θεωρία τῶν πιθανοτήτων, ἡ θεωρία τοῦ μέτρου κ.λ.π.

— Εἰς τὰς ἐπομένους δύο παραγράφους θὰ ὁμιλήσωμεν περὶ τῶν ἀρχικῶν καὶ ὀριζομένων ὁρων καί, ἐν γενικαῖς γραμμαῖς, περὶ τῶν ἀξιωμάτων καὶ θεωρημάτων, ὥστε νὰ ἀντιληφθῶμεν πῶς ἐκάστη ἐξ αὐτῶν τῶν ἐννοιῶν χρησιμοποιεῖται εἰς τὴν οἰκοδόμησιν μιᾶς Μαθηματικῆς θεωρίας.

Σημείωσις. Ἡ Εὐκλείδειος Γεωμετρία εἶναι ἡ παλαιότερα Μαθηματικὴ (ἀξιωματικὴ) θεωρία. Τὰ «Στοιχεῖα» τοῦ Εὐκλείδους (IIIος π.Χ. αἰών), παρὰ τὰς τυχόν ἀτελείας των, εἶχον τὸν αὐτὸν ἀντικειμενικὸν σκοπὸν, τὸν ὅποτον ἔχει καὶ σήμερον μία Μαθηματικὴ (ἀξιωματικὴ) θεωρία. Δηλαδή, τὴν, ἐκ μερικῶν ὀρισμῶν καὶ ἀξιωμάτων, παραγωγὴν διὰ λογικῶν μεθόδων, ἄλλων προτάσεων (τῶν θεωρημάτων).

0.4. Ἡ ἐννοια τοῦ ὁρισμοῦ. Ἀρχικοὶ καὶ ὀριζόμενοι ὅροι.

Εἰς μίαν Μαθηματικὴν θεωρίαν, ὅταν λέγωμεν ὅτι θὰ ὀρίσωμεν ἓνα ὅρον, δηλαδή ἓνα σύμβολον, ἐννοοῦμεν ὅτι θὰ τοῦ ἀποδώσωμεν μίαν ἐννοιαν, τῇ βοηθεῖα μιᾶς ἐκφράσεως ἄλλων ὁρων (τῆς θεωρίας) γνωστῶν ἐννοιῶν.

Συμπεραίνομεν, λοιπόν, ὅτι εἰς τὸν ὀρισμὸν ἐνός ὁρου δέν πρέπει νὰ χρησιμοποιοῦμεν αὐτὸν τὸν ἴδιον τὸν ὅρον. Ἄλλως, ὀδηγούμεθα εἰς τὸν καλούμενον «φαῦλον κύκλον» καὶ λόγῳ αὐτοῦ, ἔνας τοιοῦτος ὀρισμὸς λέγομεν ὅτι εἶναι «φαῦλος ὀρισμὸς».

Οὕτω, διὰ νὰ ὀρίσωμεν ἓνα ὅρον, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὰς ἐννοίας ἄλλων ὁρων. Ἐξ αὐτοῦ συμπεραίνομεν ὅτι εἰς μίαν Μαθηματικὴν θεωρίαν δέν δυνάμεθα νὰ ὀρίσωμεν ὅλους τοὺς ὅρους. Ἀναγκαιῶς, λοιπόν, μερικοὶ ὅροι πρέπει νὰ ληφθοῦν ἄνευ ὀρισμοῦ, ὥστε τῇ βοηθεῖα αὐτῶν νὰ ὀρίσωμεν ἄλλους ὅρους, τῇ βοηθεῖα τῶν νέων καὶ τῶν παλαιῶν νὰ ὀρίσωμεν ἄλλους κ.ο.κ.

Οι ὅροι, οἱ ὁποῖοι εἰς μίαν Μαθηματικήν θεωρίαν λαμβάνονται ἄνευ ὁρισμοῦ, καλοῦνται **ἀρχικοί** ἢ **πρῶτοι** ὅροι τῆς θεωρίας. Κάθε ἄλλος ὅρος, ὁ ὁποῖος ὁρίζεται τῇ βοήθειᾳ τῶν ἀρχικῶν ἢ καί ἄλλων προηγουμένων ὁρισθέντων ὄρων, καλεῖται **ὀριζόμενος** ὅρος τῆς θεωρίας. Π.χ. εἰς τὴν Μαθηματικὴν Λογικὴν οἱ ὅροι: «πρότασις», «ἀληθής», «ψευδής» λαμβάνονται ὡς ἀρχικοί. Ἐνῶ π.χ. οἱ ὅροι: «διάζευξις» καὶ «σύζευξις» δύο προτάσεων ἀνήκουν εἰς τοὺς ὀριζομένους τοιούτους. Ἐπίσης, εἰς τὴν θεωρίαν τῶν Συνόλων οἱ ὅροι: «σύνολον» καὶ «στοιχεῖον» συνόλου λαμβάνονται ὡς ἀρχικοί. Ἐνῶ π.χ. οἱ ὅροι: «ὑποσύνολον» καὶ «τομή» συνόλων ἀνήκουν εἰς τοὺς ὀριζομένους τοιούτους.

— Εἰς τὴν πρᾶξιν, οἱ λαμβανόμενοι ὡς ἀρχικοί ὅροι ἐπεξηγοῦνται δίδοντες παραδείγματα ἐφαρμογῆς, δηλαδή χρησιμοποίησεως αὐτῶν. Αἱ ἐπεξηγήσεις δέ αὗται ὀφείλουν νὰ προχωροῦν μέχρι ἐκείνου τοῦ σημείου, ὥστε νὰ μὴ ἔχωμεν οὐδεμίαν ἀμφιβολίαν ἐπὶ τῶν ἐννοιῶν τῶν ἐν λόγῳ ὄρων.

Σημείωσις I. Εἰς τὰ Μαθηματικά χρησιμοποιοῦμεν πολλάκις καὶ ὅρους (λέξεις) τῆς συνήθους γλώσσης χωρὶς νὰ λέγωμεν ἐκ τῶν προτέρων, ἐάν οὗτοι ἀνήκουν εἰς τοὺς ἀρχικοὺς ἢ ὀριζομένους ὅρους. Ὅπως π.χ. «δύεται», «ἔχομεν» κ.λ.π. Διὰ τὰς λέξεις αὐτάς ὑπονοοῦμεν ὅτι διατηροῦμεν τὴν παραδεδομένην ἔννοιάν των εἰς τὴν συνήθη γλῶσσαν ἢ, ἐάν παρίσταται ἀνάγκη διὰ μερικὰς ἐξ αὐτῶν νὰ τὰς καταστήσωμεν περισσότερον σαφεῖς, ἀποσαφηνίζομεν προηγουμένως τὰς ἐννοίας των.

Σημείωσις II. Ἡ παρουσία τῶν ἀρχικῶν ὄρων εἰς μίαν Μαθηματικὴν θεωρίαν, ὅχι μόνον δέν μειώνει τὴν ἀξίαν της, ἀλλὰ ἀντιθέτως τὴν καθιστᾷ εὐρυτέραν, δυναμένην νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς διαφόρους περιπτώσεις, ἀκριβῶς διότι οἱ λαμβανόμενοι ὡς ἀρχικοὶ ὅροι μᾶς παρέχουν τὴν εὐχέρειαν τῆς διαφοροτρόπου ἐκάστοτε ἐρμηνείας των. Π.χ. ἡ θεωρία τῶν συνόλων δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς διαφόρους περιπτώσεις, θεωροῦντες ὡς ἓν σύνολον π.χ. μίαν ὀρισμένην κατηγορίαν φυτῶν ἢ ἀνθρώπων ἢ ἐπιχειρήσεων κ.λ.π. Ἰδοὺ ἡ εὐρύτης τῶν νεωτέρων (μοντέρνων) Μαθηματικῶν καὶ ἡ δυνατότης ἐφαρμογῆς των εἰς ὅλας ἀνεξαρέτως τὰς ἄλλας ἐπιστήμας.

0.5. Ἡ ἐννοία τῆς ἀποδείξεως. Ἀξιῶματα καὶ θεωρήματα.

Εἰς μίαν Μαθηματικὴν θεωρίαν, ὅταν λέγωμεν ὅτι θὰ ἀποδείξωμεν τὴν ἀλήθειαν μιᾶς προτάσεως (τῆς θεωρίας), ἔστω θ , ἐννοοῦμεν γενικῶς ὅτι θὰ κατασκευάσωμεν μίαν (πεπερασμένην) διαδοχὴν προτάσεων τῆς θεωρίας μέ τελευταίαν πρότασιν τὴν θ καὶ τοιαύτην, ὥστε ἐκάστη πρότασις τῆς διαδοχῆς ἢ εἶναι μία ἀληθὴς πρότασις τῆς

θεωρίας ή προέρχεται έκ μιὰς ή περισσοτέρων προηγουμένων (είς τήν διαδοχήν) προτάσεων δι'έφαρμογής τών νόμων καί τών κανόνων τής λογικής.

Οὕτω, διά νά αποδείξωμεν μίαν πρότασιν, είς μίαν Μαθηματικήν θεωρίαν, πρέπει νά χρησιμοποιήσωμεν άλλας άληθεύς προτάσεις τής θεωρίας.

Σκεπτόμενοι τώρα όπως καί διά τούς άρχικούς καί όριζόμενους όρους είς τήν προηγουμένην παράγραφον, συμπεραίνομεν ότι είς μίαν Μαθηματικήν θεωρίαν δέν δυνάμεθα νά αποδείξωμεν άλλας προτάσεις αύτής. Άναγκαιώς λοιπόν, μερικά προτάσεις πρέπει νά γίνουν δεκτάί ως άληθεύς άνευ αποδείξεως.

Αί προτάσεις, αί όποίαι είς μίαν Μαθηματικήν θεωρίαν γίνονται δεκτάί ως άληθεύς άνευ αποδείξεως, καλοῦνται **άξιώματα** τής θεωρίας. Κάθε δέ πρότασις αύτής, τής όποιας ή άλήθεια δύναται νά αποδειχθῇ, καλεῖται **θεώρημα** τής έν λόγω θεωρίας. Τά θεωρήματα εἶναι, ως λέγομεν, λογικάί συνέπειαι τών άξιωμάτων.

Σημείωσις I. Είς τήν πρᾶξιν ή απόδειξις μιὰς προτάσεως είς μίαν Μαθηματικήν θεωρίαν δέν γίνεται πάντοτε διά τής κατασκευής τής ως άνω περιγραφόμενης διαδοχής προτάσεων τής θεωρίας. Ή Λογική μᾶς παρέχει κανόνας, βάσει τών όποίων ή έν λόγω διαδοχή δύναται νά άντικατασταθῇ μέ άλλην διαδοχήν προτάσεων τής θεωρίας, ήτις πιθανόν νά κατασκευάζεται εύκολώτερον.

Σημείωσις II. Είς τά Μαθηματικά διά μερικά θεωρήματα ἔχουν έπικρατήσεί ύδιαύτερα όνόματα. Ταῦτα εἶναι «λήμμα» καί «πόρισμα».

α) **Λήμμα** καλοῦμεν έν προκαταρκτικόν θεώρημα, χρησιμεῦον είς τήν απόδειξιν ενός άλλου σπουδαιότερου θεωρήματος.

β) **Πόρισμα** καλοῦμεν έν θεώρημα, τοῦ όποίου ή απόδειξις συνάγεται άμέσως έξ ενός ή περισσοτέρων αποδειχθέντων θεωρημάτων ή καί άξιωμάτων.

Σημείωσις III. Τό σύστημα τών άξιωμάτων μιὰς Μαθηματικής θεωρίας πρέπει νά εἶναι:

α. **Πλήρες.** Δηλαδή, νά στηρίζη καί νά καλύπτη όλην τήν θεωρίαν. Άκριβέστερον, εάν θ εἶναι μία πρότασις σχετική μέ τήν θεωρίαν, τότε πρέπει ή θ ή ή άρνησίς της νά εἶναι μία λογική συνέπεια τών άξιωμάτων.

β. **Άνεξάρτητον.** Δηλαδή, οὔδέν άξίωμα νά εἶναι λογική συνέπεια ενός ή περισσοτέρων έκ τών άλλων άξιωμάτων.

γ. **Συμβιβαστόν.** Δηλαδή, εάν μία πρότασις εἶναι λογική συνέπεια τών άξιωμάτων, τότε δέν πρέπει καί ή άρνησίς της νά εἶναι έπίσης λογική συνέπεια αὐτῶν.

0.6. Απλοποιήσεις του συμβολισμού εις τὰ Μαθηματικά.

Μία ἐκ τῶν θεμελιωδῶν διαδικασιῶν εἰς τὰ Μαθηματικά εἶναι καί ἡ κατασκευὴ ἐνὸς ἄλλου τύπου ἀντικειμένων ἀπὸ ἐκείνου τῶν συνήθων ἀντικειμένων (§ 0.1). Τοιαῦτα, κατασκευαζόμενα εἰς τὰ Μαθηματικά ἀντικείμενα, εἶναι π.χ. τὰ σύνολα, τὰ σημεία, τὰ διανύσματα, οἱ ἀριθμοί, αἱ συναρτήσεις κ.λ.π. Τὰ ἀντικείμενα αὐτὰ δὲν ὑπάρχουν πράγματι εἰς τὴν φύσιν. Μερικὰ ὅμως ἐξ αὐτῶν δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς ἀφηρημένα «μοντέλα» φυσικῶν ἀντικειμένων.

— Εἰς τὰ Μαθηματικά, διὰ νὰ ἀπλοποιήσωμεν τὸν συμβολισμόν, τὰς διαφόρους εἰσαγομένης ἐννοίας καί τὰ διάφορα κατασκευαζόμενα ἀντικείμενα, συμβολίζομεν (παριστῶμεν) ὄχι μόνον μέ λέξεις ἀλλὰ καί μέ ἄλλα ἀπλούστερα σύμβολα. Π.χ. μέ ἀπλᾶ γράμματα ἢ καί μέ ἄλλα εἰδικὰ σύμβολα, καθὼς καί μέ συνδυασμούς αὐτῶν, ὅπως Π.χ. $=, \exists, 4, \overline{AB}, //, f, ax + b = 0$ κ.λ.π. Διὰ νὰ διευκολυνθῶμεν δέ καί φραστικῶς ἀντὶ νὰ λέγωμεν π.χ. «ἔστω τὸ ἀντικείμενον τὸ παριστῶμενον (συμβολιζόμενον) μέ α », λέγομεν ἀπλούστερον: «ἔστω τὸ ἀντικείμενον α ».

0.7. Ἡ ἐννοία τῆς ἰσότητος εἰς τὰ Μαθηματικά.

Εἰς πολλάς περιπτώσεις, ἔν καί τὸ αὐτὸ ἀντικείμενον παρίσταται (συμβολίζεται) μέ δύο ἢ καί περισσότερα σύμβολα.

Εἰς τὰ Μαθηματικά, γράφομεν: $\alpha = \beta$ καί διαβάζομεν: « α ἴσον β » ἐάν, καί μόνον ἐάν, τὰ α καί β εἶναι δύο σύμβολα ἐνὸς καί τοῦ αὐτοῦ ἀντικειμένου. Εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν, γράφομεν: $\alpha \neq \beta$ καί διαβάζομεν: « α διάφορον τοῦ β ». Λέγομεν ἐπίσης τότε ὅτι: «τὸ α εἶναι διακεκριμένον τοῦ β ».

Ἦσπερ, $\alpha = \beta$ σημαίνει ὅτι τὰ ἀντικείμενα α καί β ἀποτελοῦν ἓν καί τὸ αὐτὸ ἀντικείμενον. Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν τὰ α καί β εἶναι, ὅπως λέγομεν, δύο ὀνομασίαι τοῦ ἰδίου ἀντικειμένου. Π.χ. ἐάν καλέσωμεν (συμβολίσωμεν) α τὸν φυσικὸν δορυφόρον τῆς Γῆς καί β τὴν Σελήνην, τότε εἶναι: $\alpha = \beta$.

Ἡ σχέσις: $\alpha = \beta$ καλεῖται **ἰσότης** (λογικὴ ταυτότης). Τὰ α καί β καλοῦνται: «τά μέλη» τῆς ἰσότητος αὐτῆς. Εἰδικώτερον, τὸ α καλεῖται: «τὸ πρῶτον μέλος» καί τὸ β : «τὸ δεῦτερον μέλος» τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος.

— Εἰς τὰ Μαθηματικά, τὰ θεωρούμενα ἀντικείμενα (Μαθηματικά ἀντικείμενα) ὀφείλουν νὰ πληροῦν τὰς ἐξῆς «ἰδιότητας» (ἀξιώματα

της ισότητας) :

1. $\alpha = \alpha$, διά κάθε αντικείμενον α . (αυτοπαθής)
2. 'Εάν $\alpha = \beta$, τότε: $\beta = \alpha$. (συμμετρική)
3. 'Εάν $\alpha = \beta$ καί $\beta = \gamma$, τότε: $\alpha = \gamma$. (μεταβατική)

'Επίσης, οίονδήποτε δ ντων τῶν αντικειμένων α καί β , ἐκ τῶν δύο σχέσεων:

$$\alpha = \beta, \quad \alpha \neq \beta$$

ἢ μία, καί μόνον ἢ μία, ὀφείλει νά εἶναι ἀληθής καί ἡ ἄλλη ψευδής.

Σημείωσις. Εἰς τὰ Μαθηματικά χρησιμοποιεῖται πολλάκις καί τό σύμβολον $\overline{\sigma\epsilon}$, τό ὁποῖον σημαίνει: «ἔσον ἐξ ὀρισμοῦ».

0. 8. Γενικά περί τῆς ἐννοίας τοῦ συνόλου εἰς τὰ Μαθηματικά.

Ἡ ἐννοια τοῦ συνόλου εἶναι μία ἐκ τῶν βασικωτέρων ἐννοιῶν εἰς τὰ Μαθηματικά. Ἡ ἐννοια αὕτη ὑπηρεῖται εἰς κάθε Μαθηματικήν θεωρίαν. Εἰς τὰ Μαθηματικά ἡ ἐννοια τοῦ συνόλου λαμβάνεται ὡς ἀρχική. Π.χ. ὁμιλοῦμεν διά:

Τό σύνολον τῶν νομῶν τῆς Ἑλλάδος.

Τό σύνολον τῶν λογικῶν προτάσεων.

Τό σύνολον τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν κ.λ.π.

Δεχόμεθα ὅτι ἓν σύνολον ἀποτελεῖται ἐξ ἀντικειμένων «ὠριμένων» καί «διακρισίμων» μεταξύ των, τὰ ὁποῖα εἰς τήν γλῶσσαν τῶν Μαθηματικῶν καλοῦνται **στοιχεῖα τοῦ συνόλου**. Ἐκαστον δέ ἐξ αὐτῶν, λέγομεν ὅτι **ἀνήκει** εἰς τό σύνολον.

Τά σύνολα συμβολίζονται, συνήθως, διά τῶν κεφαλαίων γραμμάτων: $A, B, \Gamma, \dots$ καί τὰ στοιχεῖα αὐτῶν διά τῶν μικρῶν γραμμάτων: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Ἐν σύνολον A εἶναι ὠρισμένον ἐάν, καί μόνον ἐάν, κατέχωμεν ἓν κριτήριον, βάσει τοῦ ὁποῖου δοθέντος ἐνός οἰουδήποτε ἀντικειμένου ξ δυνάμεθα νά εἰπωμεν, κατά ἀκριβῶς ἓνα τρόπον, ὅτι τό ἀντικείμενον αὐτό ἀνήκει εἰς τό σύνολον A , ὁπότε γράφομεν: $\xi \in A$ ἢ ὅτι δέν ἀνήκει εἰς τό σύνολον A , ὁπότε γράφομεν: $\xi \notin A$.

Ἐν σύνολον μέ συγκεκριμένα στοιχεῖα π.χ. $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ συμβολίζεται μέ: $\{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$.

Δύο σύνολα A καί B λέγομεν ὅτι εἶναι ἴσα καί γράφομεν: $A = B$ ἐάν, καί μόνον ἐάν, τὰ A καί B ἀποτελοῦνται ἀπό τὰ αὐτά στοιχεῖα.

0. 9. Ἡ ἐννοια τῆς μεταβλητῆς.

Ἐν σύμβολον π.χ. ἓν γράμμα x , χρησιμοποιούμενον διά νά συμ-

βολίξη ἔν οἷονδῆποτε στοιχεῖον ἑνός ὠρισμένου συνόλου A , λέγομεν ὅτι **διατρέχει** τό σύνολον A . Εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν, λέγομεν ἐπίσης ὅτι τό x εἶναι μία **μεταβλητή** καί ὅτι τό σύνολον A εἶναι τό **πεδῖον ὀρισμοῦ** ἢ τό **πεδῖον μεταβολῆς** τῆς μεταβλητῆς x . Εἰς ἀντιδιαστολήν, ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ A λέγομεν ὅτι εἶναι μία **σταθερά** ἢ μία **τιμή** λαμβανομένη ὑπό τῆς μεταβλητῆς x .

Εἶναι προφανές ὅτι ἡ σχέσις $x \in A$ εἶναι ἀληθῆς διὰ κάθε τιμήν τῆς μεταβλητῆς x ἐκ τοῦ A .

Π.χ. ἐάν ἡ μεταβλητή x διατρέχη τό σύνολον N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, τότε ἕκαστος φυσικός ἀριθμός: $1, 2, 3, \dots$ εἶναι μία τιμή λαμβανομένη ὑπό τῆς μεταβλητῆς x . Ἡ δέ σχέσις $x \in N$ εἶναι ἀληθῆς διὰ κάθε $x = 1, 2, 3, \dots$



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Κεφάλαιον 1

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ - ΛΟΓΙΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ

1. 1. Ἡ ἐννοία τῆς προτάσεως εἰς τὴν Μαθηματικὴν Λογικὴν. Τιμὴ ἀληθείας προτάσεως.

Εἰς τὴν εἰσαγωγὴν τοῦ παρόντος βιβλίου (§ 0.2) ὠμιλήσαμεν περὶ τῆς ἐννοίας τῆς προτάσεως καὶ ἐδώσαμεν παραδείγματα προτάσεων. Τὰ λεχθέντα ἐκεῖ ἀποσκοποῦν εἰς τὴν κατανόησιν τῆς ἐννοίας τῆς προτάσεως.

Εἰς τὴν Μαθηματικὴν Λογικὴν οἱ ὅροι: «πρότασις», «ἀληθής» καὶ «ψευδής» λαμβάνονται ὡς ἀρχικοί (§ 0.4). Δεχόμεθα δέ ὅτι εἰς ἐκάστην πρότασιν ἀντιστοιχεῖ ἓνας, καὶ μόνον ἓνας, ἐκ τῶν δύο χαρακτηρισμῶν: «ἀληθής», «ψευδής». Εἰς τό παρόν κεφάλαιον θὰ συμβολίζωμεν τὰς προτάσεις μέ τὰ τελευταῖα μικρά γράμματα τοῦ Λατινικοῦ ἀλφαβήτου: $p, q, r, \dots$

— Ἐκάστη πρότασις, χαρακτηριζομένη ὡς ἀληθής, λέγομεν ὅτι ἔχει **τιμὴν ἀληθείας α** καὶ ἐκάστη χαρακτηριζομένη ὡς ψευδής ὅτι ἔχει **τιμὴν ἀληθείας γ**. Ἡ τιμὴ ἀληθείας μιᾶς προτάσεως p συμβολίζεται μέ $|p|$ ἢ μέ $\tau(p)$ καὶ διαβάζεται «τιμὴ ἀληθείας τῆς p ». Ἔχομεν, λοιπόν:

$$|p| \equiv \begin{cases} \alpha, & \text{ἐάν } p \text{ ἀληθής} \\ \gamma, & \text{ἐάν } p \text{ ψευδής} \end{cases}$$

Δύο προτάσεις p καὶ q λέγομεν ὅτι ἔχουν ἀντιθέτους τιμὰς ἀληθείας ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, ἡ μία ἐξ αὐτῶν ἔχῃ τιμὴν ἀληθείας α καὶ ἡ ἄλλη γ . Τότε, καὶ μόνον τότε, ἰσχύει: $|p| \neq |q|$.

— Εἰς τὴν Μαθηματικὴν Λογικὴν δέν ἐνδιαφερόμεθα διὰ τό σημασιολογικόν περιεχόμενον τῶν προτάσεων, ἀλλὰ ἀποκλειστικῶς καὶ μόνον διὰ τὰς τιμὰς ἀληθείας των.

Αἱ προτάσεις, ἀντιμετωπιζόμεναι ὡς ἀνωτέρω καί θεωρούμεναι εἴτε μεμονωμένως εἴτε ἐντός (λογικοῦ) συνδυασμοῦ μετ' ἄλλων προτάσεων, πάντοτε ὅμως ὡς «ἀδιαίρετοι» (ὡς μία ὁλότης), ἀποτελοῦν ἀντικείμενον μελέτης ἐνός μέρους τῆς Μαθηματικῆς Λογικῆς, τό ὁποῖον καλεῖται «προτασιακός λογισμός».

1. 2. Λογικαί πράξεις. Λογικοί σύνδεσμοι.

Θεωροῦμεν ἓν σύνολον προτάσεων, τὰς ὁποίας συμφωνοῦμεν νά ἀντιμετωπίζωμεν ὡς «ἀδιαιρέτους» — ἀγνοοῦντες τό περιεχόμενον καί τήν ἐσωτερικήν των δομήν, ἐνδιαφερόμενοι ἀποκλειστικῶς καί μόνον διὰ τὰς τιμὰς ἀληθείας των — καί τὰς ὁποίας θά καλοῦμεν **ἀρχικάς** προτάσεις. Οὕτω, αἱ ἀρχικαί προτάσεις δύνανται νά ἀντιμετωπίζωνται ὡς μεγέθη λαμβάνοντα μίαν, καί μόνον μίαν, ἐκ τῶν δύο τιμῶν: α καί γ. Δυνάμεθα, τότε, νά ὀρίσωμεν ἐπ' αὐτῶν «πράξεις», αἱ ὁποῖαι θά μᾶς ἐπιτρέπουν, ἀναχωροῦντες ἀπό ἀρχικάς προτάσεις, νά σχηματίζωμεν νέας προτάσεις.

Μία τοιαύτη πράξις οὐσιαστικῶς συνίσταται εἰς τήν, εἰς δοθεῖσαν ἀρχικήν πρότασιν ἥ ζευγος ἀρχικῶν προτάσεων, ἀντιστοιχίσιν μιᾶς νέας προτάσεως. Μάλιστα δέ εἰς τήν πρώτην περίπτωσιν ἡ πράξις καλεῖται **μονομελής** καί εἰς τήν δευτέραν **διμελής**.

— Εἰς τὰ ἐπόμενα θά ὀρίσωμεν πέντε τοιαύτας πράξεις, τῇ βοηθείᾳ τῶν κάτωθι πέντε συμβόλων, τὰ ὁποῖα καλοῦνται **λογικοί σύνδεσμοι** ἢ **λογικαί σταθεραί**:

—	, διαβάζεται :	« ὅχι »
ν	>>	: « εἴτε »
Λ	>>	: « καί »
⇒	>>	: « ἐάν, ..., τότε »
⇔	>>	: « ἐάν, καί μόνον ἐάν, »

Αἱ πέντε αὐταί πράξεις λέγονται **λογικαί πράξεις**. Ἐκ τῶν πράξεων αὐτῶν, ἡ πρώτη, ἣτις ὀρίζεται τῇ βοηθείᾳ τοῦ λογικοῦ συνδέσμου: —, καλεῖται **ἀρνησις** καί εἶναι μία μονομελὲς λογικὴ πράξις. Αἱ ὑπόλοιποι τέσσαρες, αἱ ὁποῖαι ὀρίζονται τῇ βοηθείᾳ τῶν λογικῶν συνδέσμων: ν, Λ, ⇒, ⇔, καλοῦνται κατὰ σειράν: **διάζευξις** (ἐγκλειστική), **σύζευξις**, **συνεπαγωγή**, **ἰσοδυναμία** καί εἶναι διμελεῖς λογικαί πράξεις. Κατ' ἀντιστοιχίαν, ὁ πρῶτος λογικός σύνδεσμος: —, καλεῖται καί **μονομελὲς** λογικός σύνδεσμος, οἱ δέ ὑπόλοιποι: ν, Λ, ⇒, ⇔, **διμελεῖς**.

1.3. Άρνησις. Διάζευξις. Σύζευξις.

Συνεπαγωγή. Ίσοδυναμία.

1ον Άρνησις. Καλοῦμεν **ἄρνησιν** μιᾶς ἀρχικῆς προτάσεως p μίαν νέαν πρότασιν, ἥτις συμβολίζεται μέ: $\bar{p}$, διαβάζεται: «ὄχι p » καί εἶναι:

||| ἀληθής ἐάν ἡ p εἶναι ψευδής καί
||| ψευδής ἐάν ἡ p εἶναι ἀληθής (πα-
||| ραπλεύρως πίναξ).

p	$\bar{p}$
α	γ
γ	α

Ὡστε, αἱ προτάσεις p καί $\bar{p}$ ἔχουν πάντοτε ἀντιθέτους τιμὰς ἀληθείας.

— Ἡ ἄρνησις: $\bar{p}$ μιᾶς προτάσεως p συμβολίζεται πολλάκις καί μέ: $\sim p$, διαβάζεται δέ πάλιν: «ὄχι p ».

2ον Διάζευξις (ἐγκλειστική). Καλοῦμεν **ἐγκλειστικὴν διάζευξιν** ἢ καί ἀπλῶς **διάζευξιν** δύο ἀρχικῶν προτάσεων p καί q (κατ'αὐτὴν τὴν τὴν τάξιν) μίαν νέαν πρότασιν, ἥτις συμβολίζεται μέ: $p \vee q$, διαβάζεται: « p εἴτε q » καί εἶναι:

||| ψευδής μόνον ἐάν ἀμφότεραι αἱ
||| προτάσεις p καί q εἶναι ψευ-
||| δεῖς. Εἰς ὅλας τὰς ἄλλας περι-
||| πτώσεις εἶναι ἀληθής (παραπλεύ-
||| ρως πίναξ).

p	q	$p \vee q$
α	α	α
α	γ	α
γ	α	α
γ	γ	γ

3ον Σύζευξις. Καλοῦμεν **σύζευξιν** δύο ἀρχικῶν προτάσεων p καί q (κατ'αὐτὴν τὴν τάξιν) μίαν νέαν πρότασιν, ἥτις συμβολίζεται μέ: $p \wedge q$, διαβάζεται: « p καί q » καί εἶναι:

||| ἀληθής μόνον ἐάν ἀμφότεραι αἱ
||| προτάσεις p καί q εἶναι ἀλη-
||| θεῖς. Εἰς ὅλας τὰς ἄλλας περι-
||| πτώσεις εἶναι ψευδής (παραπλεύ-
||| ρως πίναξ).

p	q	$p \wedge q$
α	α	α
α	γ	γ
γ	α	γ
γ	γ	γ

4ον Συνεπαγωγή. Καλοῦμεν **συνεπαγωγὴν** δύο ἀρχικῶν προτάσεων p καί q (κατ'αὐτὴν τὴν τάξιν) μίαν νέαν πρότασιν, ἥτις συμβολίζεται μέ: $p \Rightarrow q$, διαβάζεται: «ἐάν p , τότε q » ἢ « p συνεπάγε-ται q » ⁽¹⁾ καί εἶναι:

(1) Ἐνταῦθα ἡ λέξις «συνεπάγεται» δέν διατηρεῖ τὴν σημασίαν, τὴν ὁποίαν ἔχει εἰς τὴν συνήθη γλῶσσαν, διότι δέν ὑπάρχει πάντοτε σχέσις μεταξύ τοῦ πε-
ριεχομένου τῶν δύο προτάσεων p καί q .

ψευδής μόνον εάν ή p είναι
 αληθής και ή q ψευδής. Είς
 όλας τάς άλλας περιπτώσεις
 είναι αληθής (παραπλεύρως
 πίναξ).

p	q	$p \Rightarrow q$
α	α	α
α	γ	γ
γ	α	α
γ	γ	α

‘Η πρότασις p καλεΐται «τό πρώτον μέλος» ή «ή υπόθεσις»
 και ή q «τό δεύτερον μέλος» ή «τό συμπέρασμα» της συνεπαγω-
 γής: $p \Rightarrow q$, ήτις καλεΐται και **υποθετική πρότασις**.

— Σημειούμεν ιδιαιτέρως ότι:

α). ‘Εάν ή πρότασις p είναι ψευδής, τότε ή πρότασις: $p \Rightarrow q$
 είναι **πάντοτε αληθής** είτε ή q είναι αληθής είτε είναι ψευδής.

β). ‘Εάν ή πρότασις: $p \Rightarrow q$ είναι αληθής, τότε δέν έπεται ά-
 ναγκαίως ότι ή p είναι αληθής ούτε ότι ή q είναι αληθής.

— Μερικοί άλλοι τρόποι έκφράσεως της συνεπαγωγής: $p \Rightarrow q$ εί-
 ναι οι έξής:

«p είναι ικανή συνθήκη της q».

«q είναι αναγκαία συνθήκη (συνέπεια) της p».

«p πρέπει q».

«q άρκει p».

— ‘Η συνεπαγωγή: $q \Rightarrow p$ καλεΐται **αντίστροφος** της: $p \Rightarrow q$. ‘Η συ-
 νεπαγωγή: $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ καλεΐται **αντίθετος** της: $p \Rightarrow q$. ‘Η συνεπαγωγή:
 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ καλεΐται **αντιστροφoαντίθετος** της: $p \Rightarrow q$.

5ον Ισοδυναμία. Καλούμεν **ισοδυναμίαν** δύο άρχικων προτάσεων
 p και q (κατ’αυτήν την τάξιν) μίαν νέαν πρότασιν, ήτις συμβολί-
 ζεται μέ: $p \Leftrightarrow q$, διαβάζεται: «p εάν, και μόνον εάν, q» ή «p
 ισοδυναμεΐ q»¹⁾ και είναι:

αληθής μόνον εάν αι p και
 q έχουν την ιδίαν τιμήν ά-
 ληθείας. Είς τάς άλλας πε-
 रिπτώσεις είναι ψευδής (πα-
 ραπλεύρως πίναξ).

p	q	$p \Leftrightarrow q$
α	α	α
α	γ	γ
γ	α	γ
γ	γ	α

— ‘Η ισοδυναμία: $p \Leftrightarrow q$ καλεΐται και **διυποθετική** πρότασις.

— Μερικοί άλλοι τρόποι έκφράσεως της ισοδυναμίας: $p \Leftrightarrow q$ εί-
 ναι οι έξής:

1) ‘Ενταυθα ή λέξις «ισοδυναμεΐ» δέν σημαίνει ότι άναγκαίως υπάρχει ταυ-
 τότης περιεχομένου των προτάσεων p και q.

« p είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη της q ».

« p πρέπει και αρκεί q ».

« p τότε, και μόνον τότε, q ».

« p και q είναι ισοδύναμοι».

1.4. Αποκλειστική διάζευξις.

Ανακεφαλαίωσις τῶν λογικῶν πράξεων.

Ἐκτός τῶν πέντε λογικῶν πράξεων, τὰς ὁποίας εἶδομεν εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον, ὁρίζεται ἐνίοτε καὶ μία ἄλλη (διμελῆς) λογικὴ πράξις μεταξύ ἀρχικῶν προτάσεων, καλουμένη **ἀποκλειστικὴ διάζευξις** τῇ βοήθειά τοῦ συμβόλου: $\vee$, τὸ ὁποῖον διαβάζεται: «ἢ» ἢ «ἢ μόνον...ἢ μόνον...» καὶ τὸ ὁποῖον τότε συμπεριλαμβάνεται εἰς τοὺς (διμελεῖς) λογικοὺς συνδέσμους. Ἡ ἐν λόγω πράξις ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

● Καλοῦμεν **ἀποκλειστικὴν διάζευξιν** δύο ἀρχικῶν προτάσεων p καὶ q (κατ'αὐτὴν τὴν τάξιν) μίαν νέαν πρότασιν, ἥτις συμβολίζεται μέ: $p \vee q$, διαβάζεται: « p ἢ q » ἢ «ἢ μόνον p ἢ μόνον q » καὶ εἶναι:

Ψευδὴς μόνον ἐάν αἱ p καὶ q ἔχουν τὴν ἰδίαν τιμὴν ἀληθείας. Εἰς τὰς ἄλλας περιπτώσεις εἶναι ἀληθὴς (παρὰ πλεῦρος πίναξ).

p	q	$p \vee q$
α	α	γ
α	γ	α
γ	α	α
γ	γ	γ

— Εἰς τὰ ἐπόμενα, ὅταν λέγωμεν ἀπλῶς «διάζευξιν», θὰ ἐννοοῦμεν «ἐγκλειστικὴν διάζευξιν» (§ 1.3).

— Κατωτέρω συνοψίζομεν τοὺς πίνακας τῶν ἑξ λογικῶν πράξεων:

	"Αρνησις	p	q	Διάζευξ.	Σύζευξ.	Συνεπ.	Ἰσοδυναμ.	Ἀπ.διάζ.
				$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$p \vee q$
p	$\bar{p}$	α	α	α	α	α	α	γ
α	γ	α	γ	α	γ	γ	γ	α
γ	α	γ	α	α	γ	α	γ	α
γ	γ	γ	γ	γ	γ	α	α	γ

Σημείωσις. Δέν εἶναι ἀπαραίτητον νὰ ὁρίσωμεν ἀπ'εὐθείας καὶ τὰς ἑξ λογικὰς πράξεις, ὅπως ἐπράξαμεν ἀνωτέρω, διότι ὅπως θὰ ἴδωμεν εἰς τὰ ἐπόμενα, μερικαὶ ἐξ αὐτῶν θὰ ἠδύναντο νὰ ὁρισθοῦν τῇ βοήθειά τῶν ἄλλων. Π.χ. θὰ ἦδυναν

νάμεθα νά ὀρίσωμεν ἀπ'εύθείας μόνον τὰς τρεῖς πρώτας: ἄρνησιν, διάζευξιν καί σύζευξιν καί ἀκολουθως, βάσει αὐτῶν, νά ὀρίσωμεν τὰς ὑπολοίπους.

1.5. Σύνθετοι καί ἀπλαῖ προτάσεις.

Ἀναχωροῦντες ἐξ ἑνός συνόλου, ἔστω Π , ἀρχικῶν προτάσεων: $p, q, r, \dots$ δυνάμεθα τῇ βοηθείᾳ τῶν λογικῶν συνδέσμων νά κατασκευάσωμεν (σχηματίσωμεν) ἄλλας προτάσεις, ὅπως π.χ.:

$$\bar{p}, p \vee q, q \wedge r, p \Rightarrow r, p \Leftrightarrow q, p \Rightarrow p \text{ κ.λ.π.}$$

Ἐξ αὐτῶν (τὰς ὁποίας θά θέτωμεν ἐντός παρενθέσεων καί θά τὰς ἀντιμετωπίζωμεν ὡς καί τὰς ἀρχικὰς προτάσεις) ἡ καί τῶν ἀρχικῶν προτάσεων, δυνάμεθα κατὰ τόν ἴδιον τρόπον νά κατασκευάσωμεν ἄλλας προτάσεις, ὅπως π.χ.:

$$(\bar{p}) \vee q, (p \vee q) \Leftrightarrow (q \wedge r), p \Rightarrow (p \Rightarrow r), (\overline{p \Leftrightarrow q}), (\bar{p}) \text{ κ.λ.π.}$$

Ἐξ αὐτῶν (τὰς ὁποίας θά θέτωμεν ἐντός νέων παρενθέσεων ἡ καί ἀγκυλῶν⁽¹⁾) ἡ καί τῶν προηγουμένων, δυνάμεθα κατὰ τόν ἴδιον τρόπον νά κατασκευάσωμεν ἄλλας κ.ο.κ. Π.χ.:

$$[(\bar{p}) \vee q] \Rightarrow (p \Leftrightarrow q), [(\overline{p \vee q})] \wedge r, [(\bar{p}) \wedge q], \\ [(p \vee q) \Leftrightarrow (q \wedge r)] \vee [p \Rightarrow (p \Rightarrow r)] \text{ κ.λ.π.}$$

Αἱ οὕτως κατασκευαζόμεναι προτάσεις καλοῦνται **μινταί** ἢ **σύνθετοι** προτάσεις. Αὗται συνίστανται ἐξ ἀρχικῶν προτάσεων, συνδεομένων (καταλλήλως) διά λογικῶν συνδέσμων.

Τό σύνολον, ἔστω Σ , μέ στοιχεῖα ὅλας τὰς ἀρχικὰς προτάσεις: $p, q, r, \dots$ (δηλαδή, ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ Π) καί ὅλας τὰς συνθέτους προτάσεις, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ἐκ τῶν ἀρχικῶν χρησιμοποιῶντες ἐπανειλημμένως καί καθ'ὄλους τούς δυνατούς τρόπους τούς λογικούς συνδέσμους: $-, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$, ἔχει τήν ἐξῆς ἰδιότητα:

« Ἐάν A καί B εἶναι στοιχεῖα τοῦ Σ , τότε:

$$\bar{A}, A \vee B, A \wedge B, A \Rightarrow B, A \Leftrightarrow B$$

εἶναι ἐπίσης, στοιχεῖα αὐτοῦ».

— Ἐκ τῶν τιμῶν ἀληθείας τῶν ἀρχικῶν προτάσεων δυνάμεθα εὐκόλως, βάσει τῶν ὁρισμῶν τῶν λογικῶν πράξεων, νά εὗρωμεν τήν τιμὴν ἀληθείας μιᾶς συνθέτου προτάσεως.

Παράδειγμα 1. « Δίδεται ὅτι ἡ πρότασις p εἶναι ἀληθής, ἡ q ψευδής καί ἡ r ψευδής. Νά εὗρεθῇ ἡ τιμὴ ἀληθείας τῆς προτάσεως:

(1) Αἱ παρενθέσεις καί αἱ ἀγκύλαι, αἱ ὁποῖαι χρησιμοποιοῦνται κατὰ τήν κατασκευὴν τῶν νέων προτάσεων, οὐδέν ἄλλο λογικόν νόημα ἔχουν πλὴν τοῦ ὅτι ἐκεῖνο τό ὅποτον περικλείουν δεόν νά θεωρῇται ὡς ἓν ὅλον.

$$\| \quad [(p \vee q) \Leftrightarrow (\bar{r})] \Rightarrow [p \Rightarrow ((q \wedge r))]. \quad (1) \gg$$

Απάντησις. Δύδεται ὅτι: $|p| = \alpha$, $|q| = y$ καὶ $|r| = y$. Οὕτω, ἔχομεν: $|p \vee q| = \alpha$, $|\bar{r}| = \alpha$ καὶ συνεπῶς:

$$|(p \vee q) \Leftrightarrow (\bar{r})| = \alpha. \quad (2)$$

Ὁμοίως, ἐπειδὴ $|q \wedge r| = y$, εἶναι: $|(\overline{q \wedge r})| = \alpha$ καὶ συνεπῶς:

$$|p \Rightarrow ((\overline{q \wedge r}))| = \alpha. \quad (3)$$

Λόγω τῶν (2) καὶ (3) ἡ τιμὴ ἀληθείας τῆς προτάσεως (1) εἶναι α . Ὥστε, ἡ δοθεῖσα πρότασις (1) εἶναι ἀληθής.

Παράδειγμα 2. «Νά εὐρεθῇ ἡ τιμὴ ἀληθείας τῆς ἐξῆς προτάσεως:

||| "Ἐάν ὁ 7 δέν εἶναι ἄρτιος, καὶ τό Παρίσι εἶναι πρωτεύουσα τῆς Γαλλίας εἴτε ἡ Σελήνη δέν εἶναι δορυφόρος τῆς Γῆς, τότε ὁ 7 εἶναι ἄρτιος εἴτε ἡ Σελήνη εἶναι δορυφόρος τῆς Γῆς"».

Απάντησις. θέτομεν:

p : «Ὁ 7 δέν εἶναι ἄρτιος». (ἀληθής)

q : «Τό Παρίσι εἶναι πρωτεύουσα τῆς Γαλλίας». (ἀληθής)

r : «Ἡ Σελήνη δέν εἶναι δορυφόρος τῆς Γῆς». (ψευδής)

Οὕτω, ἡ δοθεῖσα πρότασις δύναται νά γραφῇ συμβολικῶς ὡς ἐξῆς:

$$[p \wedge (q \vee r)] \Rightarrow [(\bar{p}) \vee (\bar{r})].$$

Τήν τιμὴν ἀληθείας αὐτῆς δυνάμεθα νά εὕρωμεν ἐργαζόμενοι ὡς εἰς τό προηγούμενον παράδειγμα. Δυνάμεθα ὅμως νά τήν εὕρωμεν ταχύτερον ὡς κάτωθι:

$$\begin{array}{ccc} [p \wedge (q \vee r)] & \Rightarrow & [(\bar{p}) \vee (\bar{r})] \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \alpha \quad \quad \alpha & & y \quad \quad \alpha \\ & & \textcircled{\alpha} \end{array}$$

Ὥστε, ἡ δοθεῖσα πρότασις εἶναι ἀληθής.

— Μία ἀρχικὴ πρότασις δυνατόν νά μὴ περιέχῃ λογικούς συνδέσμους, ὁπότε λέγεται καὶ **ἀπλὴ** πρότασις, δυνατόν ὅμως νά περιέχῃ καὶ λογικούς συνδέσμους (ἓνα ἢ περισσοτέρους), ὁπότε θά εἶναι παράθεσις ἀπλῶν προτάσεων, συνδεομένων διὰ λογικῶν συνδέσμων. Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἡ ἀρχικὴ πρότασις ἔχει τὴν μορφήν συνθέτου προτάσεως μέ ἀρχικὰς προτάσεις τὰς ἀπλὰς προτάσεις αὐτῆς. Ἀπλᾶι προτάσεις εἶναι π.χ. αἱ ἐξῆς:

«Τό Λονδῖνον εἶναι εἰς τὴν Γαλλίαν». (ψευδής)

«Ὁ 7 εἶναι περιττός». (ἀληθής)

«Ὁ 3 διαιρεῖ τόν 10». (ψευδής)

1.6. Ἀπλουστέρα γραφὴ τῶν συνθέτων προτάσεων.

Συμφωνοῦντες, εἰς μίαν σύνθετον πρότασιν, νά ἐκτελοῦμεν τὰς λογικὰς πράξεις κατὰ τὴν ἐξῆς σειράν:

$$\neg, \overset{\wedge}{\underset{\vee}{\vee}}, \Rightarrow, \Leftrightarrow \quad (1)$$

έπιτυγχάνομεν μίαν απλουστέραν γραφήν τῶν συνθέτων προτάσεων, παραλείποντες ἐξ αὐτῶν μερικὰς (ὅσον τό δυνατόν περισσοτέρας) παρενθέσεις ἢ καί ἀγκύλας.

Ἐκαστος ἐκ τῶν λογικῶν συνδέσμων, γραμμένων κατὰ τήν ἀνωτέρω σειράν (1), λέγομεν ὅτι εἶναι **ἰσχυρότερος** ἐκάστου ἐκ τῶν προηγουμένων του.

Βάσει τῆς ἀνωτέρω συμφωνίας:

α) Ἡ πράξις: $\neg$, προηγείται ὅλων τῶν ὑπολοίπων. Οὕτω π.χ.

$$\bar{p} \wedge q \text{ σημαίνει: } (\bar{p}) \wedge q,$$

$$\bar{p} \Rightarrow q \text{ σημαίνει: } (\bar{p}) \Rightarrow q \text{ κ.λ.π.}$$

β) Αἱ πράξεις: $\wedge, \vee$ (ὅπως καί ἡ $\vee$) προηγούνται τῶν: $\Rightarrow, \Leftrightarrow$.

Οὕτω, π.χ.:

$$p \vee q \Rightarrow r \text{ σημαίνει: } (p \vee q) \Rightarrow r,$$

$$p \Leftrightarrow \bar{p} \wedge q \text{ σημαίνει: } p \Leftrightarrow (\bar{p} \wedge q) \text{ κ.λ.π.}$$

Σημειοῦμεν ὅτι ἐκ τῶν πράξεων: $\wedge, \vee$ (ὅπως καί τῆς $\vee$) οὐδεμία προηγείται τῆς ἄλλης. Οὕτω, π.χ. ἐκ τῆς συνθέτου προτάσεως: $(p \vee q) \wedge r$ δέν δυνάμεθα νά παραλείψωμεν τήν παρένθεσιν.

γ) Ἡ πράξις: $\Rightarrow$ προηγείται τῆς: $\Leftrightarrow$. Οὕτω, π.χ.

$$p \Leftrightarrow q \Rightarrow r \text{ σημαίνει: } p \Leftrightarrow (q \Rightarrow r),$$

$$p \Rightarrow q \vee r \Leftrightarrow \bar{p} \wedge q \text{ σημαίνει: } (p \Rightarrow q \vee r) \Leftrightarrow (\bar{p} \wedge q) \text{ κ.λ.π.}$$

— Διὰ νά ἀπλοποιήσωμεν ἔτι περαιτέρω τήν γραφήν τῶν συνθέτων προτάσεων, συμφωνοῦμεν ἀκόμη νά παραλείπωμεν τὰς ἀκραίας παρενθέσεις (ἢ ἀγκύλας) ἐκ μιᾶς συνθέτου προτάσεως, ὅταν ἀνωθεν αὐτῆς ὑπάρχῃ ὁ λογικός σύνδεσμος: $\neg$ καί νά ὑπονοοῦμεν ταύτας. Οὕτω, π.χ.:

$$\overline{p \vee q} \text{ σημαίνει: } \overline{(p \vee q)},$$

$$\overline{p \Rightarrow q} \text{ σημαίνει: } \overline{(p \Rightarrow q)},$$

$$\overline{\bar{p}} \text{ σημαίνει: } \overline{(\bar{p})} \text{ κ.λ.π.}$$

1.7. Παρατηρήσεις.

Ὅταν γράφωμεν ἢ ὅταν ἐκφωνοῦμεν μίαν πρότασιν, γενικῶς δέν ἐννοοῦμεν ὅτι αὕτη εἶναι ἀναγκαιῶς ἀληθής. Κάθε πρότασις εἶναι ἀληθής ἢ ψευδής (οὐδέποτε καί ἀληθής καί ψευδής).

— Εἰς τὰ Μαθηματικά χρησιμοποιοῦμεν διαφόρους ἐκφράσεις διὰ νά δηλώσωμεν ὅτι μία πρότασις εἶναι ἀληθής. Π.χ. λέγομεν:

● «ἰσχύει: $p \Leftrightarrow q$ » καί ἐννοοῦμεν: « $p \Leftrightarrow q$ εἶναι ἀληθής».

- «έχομεν: $p \wedge q$ » καί έννοοϋμεν: « $p \wedge q$ είναι άληθής».
- «δίδεται p » καί έννοοϋμεν: «δίδεται ότι ή p είναι άληθής».
- «νά άποδειχθ ή ότι: $p \Rightarrow q$ » καί έννοοϋμεν: «νά άποδειχθ ή ότι ή $p \Rightarrow q$ είναι άληθής» κ.λ.π.

Κατά κανόνα είς τά Μαθηματικά, χάριν συντομίας, όταν γράφωμεν ή όταν έκφωνοϋμεν άπλώς μίαν πρότασιν, έννοοϋμεν συγχρόνως ότι αϋτη είναι άληθής, έκτός φυσικά εάν ρητώς δηλοϋται τό αντίθετον ή άλλο τι, όπως π.χ. νά έξετασθ ή εάν αϋτη είναι άληθής κ.λ.π.

Π.χ. είς τήν Γεωμετρίαν λέγομεν:

«Εάν $e // e'$ καί $e' // e''$, τότε: $e // e''$ »

καί έννοοϋμεν:

«Εάν $e // e'$ καί $e' // e''$, τότε: $e // e''$ » είναι άληθής.

— Σημειοϋμεν ίδιαιτέρως ότι είς τά Μαθηματικά, όταν λέγωμεν «νά άποδειχθ ή ότι: $p \Rightarrow q$ », έννοοϋμεν νά άποδειχθ ή άλήθεια της ($p \Rightarrow q$) καί όχι της q , ήτις δυνατόν νά είναι ψευδής ένϋ ή ($p \Rightarrow q$) νά είναι άληθής (§ 1,3, 4ον).

— Είς τά Μαθηματικά χρησιμοποιοϋμεν πολλάκις καί τό σύμβολον: $\Leftrightarrow$, τό όποϊον σημαίνει: «ίσοδυναμεϊ έξ όρισμοϋ».

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ποίαι έκ τών κατωθι έκφράσεων είναι προτάσεις;

- 1) Τό Παρίσι είναι πρωτεύουσα της Γερμανίας.
- 2) 'Ο φυσικός αριθμός x είναι άρτιος.
- 3) $1 > 2$.
- 4) Πώς είσθε;
- 5) Τό Λονδίνον είναι πρωτεύουσα της 'Αγγλίας;

2. Νά εύρεθ ή τιμή άληθείας έκάστης έκ τών κάτωθι προτάσεων:

- | | |
|--------------------------------------|--|
| 1) $(3 > 2)$. | 5) $(2 = 4) \Rightarrow (1 > 2)$. |
| 2) $(2 < 1) \vee (7 > 3)$. | 6) $(2 > 1) \Leftrightarrow (2 > 4)$. |
| 3) $(2 > 1) \wedge (7 < 3)$. | 7) $(3 \geq 3) \Leftrightarrow [(4 > 17) \vee (5 \geq 5)]$. |
| 4) $(2^2 = 4) \Rightarrow (2 > 4)$. | 8) $(4 \geq 2) \Rightarrow [(5 > 2) \wedge (3 \geq 5)]$. |

3. Νά εύρεθ ή τιμή άληθείας της προτάσεως:

$$[(p \Rightarrow q) \vee (\bar{p} \wedge q)] \wedge (r \Leftrightarrow q),$$

εάν δίδεται ότι:

- 1) ή p είναι άληθής, ή q είναι άληθής καί ή r είναι ψευδής.
- 2) ή p είναι ψευδής, ή q είναι άληθής καί ή r είναι ψευδής.
- 3) ή p είναι ψευδής, ή q είναι ψευδής καί ή r είναι ψευδής.

- 4) ή p είναι ψευδής, ή q είναι ψευδής και ή r είναι αληθής.
 5) ή p είναι αληθής, ή q είναι αληθής και ή r είναι αληθής.

4. Δίδεται ότι ή πρότασις p είναι αληθής, ή q ψευδής, ή r ψευδής και ή s αληθής. Νά εύρεθῇ ή τιμή ἀληθείας ἐκάστης ἐκ τῶν κάτωθι προτάσεων:

- | | | |
|---|--|--|
| 1) $p \wedge [q \vee (r \wedge p)]$. | | 5) $q \wedge \bar{s} \Rightarrow (p \Leftrightarrow s)$. |
| 2) $\bar{p} \Rightarrow (r \Rightarrow s)$. | | 6) $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow r] \Rightarrow s$. |
| 3) $p \vee r \Leftrightarrow r \wedge \bar{s}$. | | 7) $p \wedge (q \vee \overline{r \wedge s}) \Rightarrow q$. |
| 4) $s \Leftrightarrow (p \Rightarrow \bar{q} \vee r)$. | | $(\bar{p} \vee \bar{q} \vee r) \wedge [p \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \overline{r \wedge r})]$. |

5. Δίδεται ότι ή πρότασις p είναι ψευδής, ή q αληθής, ή r ψευδής και ή s ψευδής. Νά εύρεθῇ ή τιμή ἀληθείας ἐκάστης ἐκ τῶν κάτωθι προτάσεων:

- 1) $p \Rightarrow [q \Rightarrow (r \Rightarrow s)]$.
- 2) $[(p \wedge \overline{r \vee s}) \Rightarrow (\bar{r} \Leftrightarrow q)] \Leftrightarrow [(r \wedge s) \vee \bar{p} \wedge \bar{q}]$.
- 3) $[(p \vee q) \wedge r] \vee [(\bar{q} \vee \bar{r} \Rightarrow s) \Leftrightarrow (s \Rightarrow p)]$.
- 4) $[((\bar{p} \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow \bar{q}] \Rightarrow [(\bar{s} \vee \bar{r} \Leftrightarrow p) \Leftrightarrow s]$.

6. Νά εύρεθῇ ή τιμή ἀληθείας τῆς ἐξῆς προτάσεως: «ὁ 4 δέν είναι περιττός ἀριθμός, καί τό Λονδῖνον είναι εἰς τήν Ἀμερικὴν εἴτε ὁ 9 είναι μεγαλύτερος τοῦ 7 ἐάν, καί μόνον ἐάν, ὁ 4 είναι περιττός ἀριθμός εἴτε τό Λονδῖνον δέν είναι εἰς τήν Ἀμερικὴν».

7. Ἐάν γνωρίζωμεν ὅτι ή πρότασις: $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow p \wedge q$ είναι ψευδής, νά εύρεθῇ ή τιμή ἀληθείας ἐκάστης τῶν προτάσεων p καί q .

8. Ἐάν γνωρίζωμεν ὅτι ή πρότασις: $(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee q)$ είναι ἀληθής, νά εύρεθῇ ή τιμή ἀληθείας ἐκάστης τῶν προτάσεων p καί q .

9. Ἐάν γνωρίζωμεν ὅτι ή πρότασις: $(p \vee q) \vee (\bar{p} \vee \bar{q})$ είναι ψευδής, νά εύρεθῇ ή τιμή ἀληθείας ἐκάστης τῶν προτάσεων p καί q .

10. Ἐάν ή πρότασις: $p \Leftrightarrow q$ είναι αληθής, νά εύρεθῇ ή τιμή ἀληθείας τῆς προτάσεως: $(p \Leftrightarrow \bar{q}) \Leftrightarrow (\bar{p} \Leftrightarrow q)$.

11. Ἐάν ή πρότασις: $p \Leftrightarrow q$ είναι ψευδής, νά εύρεθῇ ή τιμή ἀληθείας τῆς προτάσεως: $(p \Leftrightarrow \bar{q}) \wedge (\bar{p} \Leftrightarrow q)$.

12. Ἐάν ή πρότασις: $p \Rightarrow q$ είναι ψευδής, νά εύρεθῇ ή τιμή ἀληθείας τῆς προτάσεως: $[(\bar{p} \Rightarrow q) \vee p] \Rightarrow [(p \Leftrightarrow \bar{q}) \Rightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}]$.

13. Ἐάν ή πρότασις: $p \Rightarrow q$ είναι αληθής, τί δυνάμεθα νά εἰπωμεν διὰ τήν τιμήν ἀληθείας τῆς προτάσεως: $\bar{p} \wedge q \Leftrightarrow p \vee q$;

14. Νά εύρεθῇ ή τιμή ἀληθείας ἐκάστης ἐκ τῶν κάτωθι προτάσεων, βάσει τῶν δεικνυομένων πληροφοριῶν:

- 1) $[(p \wedge r) \vee q] \Rightarrow [\bar{r} \Leftrightarrow (p \underset{Y}{\vee} q)]$.

$$2) [(p \Rightarrow q) \vee \overline{p \vee r}] \Leftrightarrow [p \underset{\alpha}{\wedge} q \Rightarrow (\overline{p} \Rightarrow r)].$$

$$3) (p \neq q) \Rightarrow [(p \underset{\alpha}{\Leftrightarrow} q) \Rightarrow r].$$

$$4) [\overline{p \wedge q} \Rightarrow (p \vee q)] \Leftrightarrow [(p \underset{\alpha}{\neq} q) \wedge \overline{p \Leftrightarrow q}].$$

15. 'Εξετάσατε, εάν δυνάμεθα νά εϋρωμεν τήν τιμήν ἀληθείας ἐκάστης ἐκ τῶν κάτωθι προτάσεων, βάσει τῶν δεικνυομένων πληροφοριῶν:

1) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p.$	4) $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \overline{p} \underset{\alpha}{\wedge} \overline{q}.$
2) $p \wedge (q \underset{\alpha}{\Rightarrow} r).$	5) $(p \underset{\alpha}{\Rightarrow} q) \Rightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p}).$
3) $p \vee (q \underset{\alpha}{\Rightarrow} r).$	6) $(p \underset{\alpha}{\wedge} q) \Rightarrow (p \underset{\gamma}{\vee} s).$

☆☆☆☆☆☆

Κεφάλαιον 2

ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΑΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ - ΤΑΥΤΟΛΟΓΙΑΙ

2.1. Ἡ ἔννοια τῆς προτασιακῆς μεταβλητῆς.

Μία μεταβλητή (§ 0.9) διατρέχουσα ἓν σύνολον προτάσεων, ἔστω Π , λέγεται καί **προτασιακή** μεταβλητή. Εἰς ἀντιδιαστολήν τὰ στοιχεῖα (προτάσεις) τοῦ Π λέγονται καί **σταθεραί** προτάσεις. Εἶναι αἱ τιμαί, τὰς ὁποίας δύναται νά λάβῃ ἡ προτασιακή μεταβλητή (§ 0.9). — Εἰς τὰ ἐπόμενα συμβολίζομεν, συνήθως, τὰς (σταθεράς) προτάσεις μέ: $p', q', r', \dots$ καί τὰς προτασιακὰς μεταβλητάς μέ: $p, q, r, \dots$.

— Ἐνίστε, ἀντί νά λέγωμεν π.χ. « ἡ προτασιακή μεταβλητή p », λέγομεν (κακῶς): « ἡ μεταβλητή πρότασις p ».

— Μία προτασιακή μεταβλητή (ἢ ἄλλως, μία μεταβλητή πρότασις) δέν εἶναι μία πρότασις, ἀλλά ἓν σύμβολον (συνήθως γράμμα) δυνάμενον νά ἀντικατασταθῇ ὑπό μιᾶς προτάσεως, ὁπότε καί λαμβάνει μίαν τιμήν ἀληθείας. Αὕτη δύναται νά εἶναι α ἢ γ ἀναλόγως τοῦ ἐάν ἡ προτασιακή μεταβλητή ἀντικατασταθῇ μέ μίαν ἀληθῆ ἢ μέ μίαν ψευδῆ πρότασιν, ἀντιστοίχως.

Σημείωσις. Εἰς τὰ ἐπόμενα, ἐάν μία μεταβλητή ὑπονοῇται ὅτι εἶναι προτασιακή, τότε ἀντί: « προτασιακή μεταβλητή » θά λέγωμεν ἀπλῶς: « μεταβλητή ».

2.2. Προτασιακαί παραστάσεις.

Κάθε ἔκφρασις, ἀποτελουμένη ἀπό προτασιακὰς μεταβλητάς: $p, q, r, \dots$ καί λογικοὺς συνδέσμους ἢ ἀπό προτασιακὰς μεταβλητάς, σταθεράς προτάσεις καί λογικοὺς συνδέσμους, ἥτις καθίσταται μία (σύνθετος) πρότασις, ὅταν αἱ προτασιακαί μεταβληταί ἀντικατασταθοῦν μέ οἵασδήποτε σταθεράς προτάσεις, καλεῖται **προτασιακή παράστασις** ἢ ἀπλῶς **παράστασις** καί συμβολίζεται μέ $P(p, q, r, \dots)$ ἢ ἀπλούστερον μέ P (δηλαδή μέ ἓν ἐκ τῶν κεφαλαίων γραμμάτων: $P, Q, R, \dots$ θέτοντες εἰς αὐτά ἐνίστε καί τόνους ἢ δείκτας).

Π.χ. αἱ ἐκφράσεις:

$\bar{p}$, $p \vee q$, $p \Rightarrow q$, $p \Rightarrow (q \Leftrightarrow \bar{r})$, $(p \vee \bar{q}) \Leftrightarrow [\bar{p} \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)]$ κ.λ.π. εἶναι (προτασιακαί) παραστάσεις. Ἀντιθέτως, αἱ ἐκφράσεις:

$$\Rightarrow p, p \Leftrightarrow , (\vee q) \Leftrightarrow (\bar{p} \Rightarrow r), p \vee q \wedge r$$

δέν εἶναι (προτασιακαί) παραστάσεις (διατί;).

Εἰδικῶς αἱ παραστάσεις:

$$\bar{p}, p \vee q, p \wedge q, p \Rightarrow q, p \Leftrightarrow q$$

καλοῦνται **βασικαί** (προτασιακαί) παραστάσεις (εἰς αὐτάς προστίθεται ἐνίοτε καί ἡ $p \vee q$).

Συμφωνοῦμεν τώρα ὅτι εἰς τὰς παραστάσεις περιλαμβάνονται καί αἱ προτασιακαί μεταβληταί: $p, q, r, \dots$, τὰς ὁποίας θά καλοῦμεν καί **στοιχειώδεις** παραστάσεις.

— Εἶναι προφανές ὅτι, ἐάν ὁ σύνδεσμος: — τεθῇ ἄνωθεν μιᾶς οἰασομένης παραστάσεως P , τότε προκύπτει πάλιν μία παράστασις: $\bar{P}$. Ἐπίσης, ἐάν εἷς ἐκ τῶν συνδέσμων: $\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ (ὅπως καί ὁ $\vee$) τεθῇ μεταξύ δύο οἰωνομένης παραστάσεων P καί Q , τότε προκύπτει πάλιν μία παράστασις. Ἦτοι, αἱ ἐκφράσεις:

$$\bar{P}, P \vee Q, P \wedge Q, P \Rightarrow Q, P \Leftrightarrow Q$$

εἶναι ἐπίσης παραστάσεις (ὅπως καί ἡ $P \vee Q$).

— Κάθε τμήμα μιᾶς παραστάσεως, τό ὅποῖον θεωρούμενον ἀνεξάρτητον εἶναι ἐπίσης μία παράστασις, καλεῖται **ὑποπαράστασις** τῆς ἀρχικῆς παραστάσεως. Ἐστω π.χ. ἡ παράστασις:

$$(p \vee q \Leftrightarrow \bar{r}) \Rightarrow [(p \wedge r) \vee (p \Rightarrow r)]. \quad (1)$$

Αἱ παραστάσεις π.χ.:

$$p \vee q, p \vee q \Leftrightarrow \bar{r}, \bar{r}, p \Rightarrow r$$

εἶναι ὑποπαραστάσεις τῆς (1).

— Εἰς τὰ ἐπόμενα, ἐκάστη θεωρουμένη παράστασις θά ὑποθέτωμεν ὅτι δέν περιέχει σταθεράς προτάσεις, ἐκτός ἐάν ρητῶς δηλοῦται τό ἀντίθετον.

Σημείωσις. Δέν πρέπει νά συγχέωμεν τὰς προτασιακάς παραστάσεις μέ τὰς συνθέτους προτάσεις. Μία σύνθετος πρότασις εἶναι βεβαίως μία πρότασις, ἔχουσα μὴν τελεῶς καθωρισμένην τιμὴν ἀληθείας. Ἐνῶ μία προτασιακὴ παράστασις δέν εἶναι μία πρότασις. Καθίσταται μία πρότασις, μόνον ὅταν αἱ προτασιακαὶ μεταβληταί της ἀντικατασταθοῦν μέ δοθεύσας προτάσεις, ὅποτε καί λαμβάνει μὴν τιμὴν ἀληθείας, ἥτις καί πάλιν ἐξαρτᾶται, ἐν γένει, ἐκ τῶν τιμῶν ἀληθείας τῶν δοθεισῶν προτάσεων.

2.3. Πίνακες τιμών αληθείας.

Όπως είπομεν καί άνωτέρω, εάν είς μίαν δοθεΐσαν παράστασιν $P(p,q,r,\dots)$ αϊ μεταβληταί της: $p, q, r,\dots$, άντικατασταθοϋν μέ οϊασδήποτε δοθείσας προτάσεις: $p', q', r', \dots$, άντιστοιχως, τότε αϋτη καθίσταται μία (σύνθετος, έν γένει) πρότασις: $P(p', q', r', \dots)$, έχουσα έπομένως μίαν τελείως καθωρισμένην τιμήν αληθείας, τήν όποϊαν καί δυνάμεθα νά εύρωμεν (§ 1.5). Ή έν λόγω τιμή αληθείας, τήν όποϊαν λαμβάνει ή δοθεΐσα παράστασις, έξαρτάται έν γένει έκ τών τιμών αληθείας τών δοθεισών προτάσεων: $p', q', r', \dots$.

Ένας τρόπος διά νά ίδωμεν αϋτήν τήν έξάρτησιν εΐναι νά κατασκευάσωμεν ένα πίνακα, είς τόν όποϊον νά έμφαίνηται ή τιμή αληθείας, τήν όποϊαν λαμβάνει ή δοθεΐσα παράστασις δι' όλους τούς δυνατούς συνδυασμούς τών τιμών αληθείας τών μεταβλητών της. Ένας τοιοϋτος πίναξ καλεΐται **πίναξ τιμών αληθείας** τής έν λόγω παραστάσεως.

Π.χ. ό πίναξ τιμών αληθείας τής παραστάσεως:

	p	q	$\bar{q}$	$p \vee \bar{q}$	$p \Rightarrow q$	$(p \vee \bar{q}) \wedge (p \Rightarrow q)$
	α	α	γ	α	α	α
	α	γ	α	α	γ	γ
	γ	α	γ	γ	α	γ
	γ	γ	α	α	α	α
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)

είναι ό παραπλεύρως. Αϊ μεταβληταί τής παραστάσεως αϋ-

τής εΐναι δύο, αϊ p καί q . Είς τόν πίνακα αϋτόν, κάτωθεν τών p καί q έχουν τεθῆ όλοι οϊ δυνατοί συνδυασμοί τών τιμών αληθείας των, οϊ όποιοι εΐναι τέσσαρες (στήλαι (1) καί (2)). Ή στήλη (3) προκύπτει έκ τής (2) καί περιέχει τās τιμάς αληθείας, τās όποϊας λαμβάνει ή παράστασις $\bar{q}$. Ή στήλη (4) προκύπτει έκ τών στηλών (1) καί (3) καί περιέχει τās τιμάς αληθείας, τās όποϊας λαμβάνει ή παράστασις: $p \vee \bar{q}$. Ή στήλη (5) προκύπτει έκ τών στηλών (1) καί (2) καί περιέχει τās τιμάς αληθείας, τās όποϊας λαμβάνει ή παράστασις: $p \Rightarrow q$. Τέλος, ή στήλη (6), ήτις εΐναι καί ή ζητούμενη, προκύπτει έκ τών στηλών (4) καί (5) καί περιέχει τās τιμάς αληθείας, τās όποϊας λαμβάνει ή θεωρηθεΐσα παράστασις $(p \vee \bar{q}) \wedge (p \Rightarrow q)$ δι' έκαστον έκ τών δυνατών συνδυασμών τών τιμών αληθείας τών μεταβλητών της p καί q .

Αναλόγως εύρίσκομεν ότι ό πίναξ τιμών αληθείας τής παραστάσεως:

$$P(p,q,r) \equiv (p \Rightarrow q \vee r) \wedge \overline{q \Leftrightarrow r}$$

είναι ό επόμενος:

p	q	r	$q \vee r$	$p \Rightarrow q \vee r$	$\bar{r}$	$q \Leftrightarrow \bar{r}$	$\overline{q \Leftrightarrow \bar{r}}$	$P(p, q, r)$
α	α	α	α	α	γ	γ	α	α
α	α	γ	α	α	α	α	γ	γ
α	γ	α	α	α	γ	α	γ	γ
α	γ	γ	γ	γ	α	γ	α	γ
γ	α	α	α	α	γ	γ	α	α
γ	α	γ	α	α	α	α	γ	γ
γ	γ	α	α	α	γ	α	γ	γ
γ	γ	γ	γ	α	α	γ	α	α

$\uparrow \qquad \qquad \qquad \wedge \qquad \qquad \qquad \uparrow$

— Κατα τήν κατασκευήν τοῦ πίνακος τιμῶν ἀληθείας μιᾶς παραστάσεως λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν ὅλοι οἱ δυνατοί συνδυασμοί τῶν τιμῶν ἀληθείας τῶν μεταβλητῶν τῆς. Οὕτω, εἰς τό ἀνωτέρω πρῶτον παράδειγμα, αἱ ἐμφανιζόμεναι εἰς τήν παράστασιν μεταβληταί εἶναι δύο, αἱ p καί q καί συνεπῶς οἱ δυνατοί συνδυασμοί τῶν τιμῶν ἀληθείας αὐτῶν εἶναι τέσσαρες. Εἰς τό δεύτερον παράδειγμα, αἱ ἐμφανιζόμεναι εἰς τήν παράστασιν μεταβληταί εἶναι τρεῖς, αἱ p , q καί r καί συνεπῶς οἱ δυνατοί συνδυασμοί τῶν τιμῶν ἀληθείας αὐτῶν εἶναι ὀκτώ κ.ο.κ. (Ἐάν εἰς μίαν παράστασιν αἱ ἐμφανιζόμεναι μεταβληταί εἶναι n τό πλῆθος, τότε οἱ δυνατοί συνδυασμοί τῶν τιμῶν ἀληθείας εἶναι 2^n).

Εἰδικῶς, ἐάν εἰς μίαν παράστασιν ἐμφανίζεται μία μόνον μεταβλητή, ἔστω p , τότε εἰς τόν πίνακα τιμῶν ἀληθείας αὐτῆς καί κάτωθεν τοῦ p θέτομεν τάς δύο δυνατάς περιπτώσεις: α καί γ . Π.χ.

ὁ πίναξ τιμῶν ἀληθείας τῆς παραστάσεως: $\bar{p} \wedge (p \Rightarrow \bar{p})$ εἶναι ὁ παραπλεύρως.

p	$\bar{p}$	$p \Rightarrow \bar{p}$	$\bar{p} \wedge (p \Rightarrow \bar{p})$
α	γ	γ	γ
γ	α	α	α

Σημείωσις. Οἱ πίνακες, τοὺς ὁποῦς εὔδομεν εἰς τό προηγούμενον κεφάλαιον, δέν εἶναι παρά οἱ πίνακες τιμῶν ἀληθείας, κατὰ σειράν, τῶν βασικῶν παραστάσεων: $\bar{p}$, $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$ (καθώς καί τῆς παραστάσεως: $p \neq q$).

2.4. Ταυτολογίαι καί αὐτοαντιφάσεις.

Σχετικάί προτασιακαί παραστάσεις.

Ὁρισμός I. Κάθε προτασιακή παράστασις, ἣτις λαμβάνει τιμήν ἀληθείας α διὰ κάθε συνδυασμόν τῶν τιμῶν ἀληθείας τῶν προτα-

||| σιακῶν της μεταβλητῶν, καλεῖται **ταυτολογία**.

"Αλλως λέγομεν: μία προτασιακή παράστασις $P(p, q, r, \dots)$ εἶναι μία ταυτολογία ἐάν, καί μόνον ἐάν, οἰωνδήποτε οὐσῶν τῶν προτάσεων: $p', q', r', \dots$ ἡ πρότασις $P(p', q', r', \dots)$ εἶναι ἀληθής.

Αἱ ταυτολογίαι λέγονται καί **ταυτολογικῶς ἀληθεῖς** παραστάσεις (λέγονται ἐπίσης καί **ἀληθεῖς** παραστάσεις).

Διά νά ἐκφράσωμεν ὅτι μία παράστασις P εἶναι ταυτολογία, γράφομεν: $\vdash P$ καί διαβάζομεν: « P εἶναι ταυτολογία».

Π.χ. ἡ παράστασις: $p \vee \bar{p}$, ὅπως φαίνεται ἐκ τοῦ παραπλεύρως πίνακος τιμῶν ἀληθείας αὐτῆς, εἶναι ταυτολογία, ἥτοι: $\vdash p \vee \bar{p}$.

p	$\bar{p}$	$p \vee \bar{p}$
α	γ	α
γ	α	α

Ὁρισμός II. Κάθε προτασιακή παράστασις, ἥτις λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας γ διὰ κάθε συνδυασμὸν τῶν τιμῶν ἀληθείας τῶν προτασιακῶν της μεταβλητῶν, καλεῖται **αὐτοαντίφασις**.

"Αλλως λέγομεν: μία προτασιακή παράστασις $P(p, q, r, \dots)$ εἶναι μία αὐτοαντίφασις ἐάν, καί μόνον ἐάν, οἰωνδήποτε οὐσῶν τῶν προτάσεων: $p', q', r', \dots$ ἡ πρότασις $P(p', q', r', \dots)$ εἶναι ψευδής.

Αἱ αὐτοαντιφάσεις λέγονται καί **ταυτολογικῶς ψευδεῖς** παραστάσεις (λέγονται ἐπίσης καί **ψευδεῖς** παραστάσεις).

Διά νά ἐκφράσωμεν ὅτι μία παράστασις P εἶναι αὐτοαντίφασις, γράφομεν: $\sim \vdash P$ καί διαβάζομεν: « P εἶναι αὐτοαντίφασις».

Π.χ. ἡ παράστασις: $p \wedge \bar{p}$, ὅπως φαίνεται ἐκ τοῦ παραπλεύρως πίνακος τιμῶν ἀληθείας αὐτῆς, εἶναι αὐτοαντίφασις ἥτοι: $\sim \vdash p \wedge \bar{p}$.

p	$\bar{p}$	$p \wedge \bar{p}$
α	γ	γ
γ	α	γ

Ὁρισμός III. Κάθε προτασιακή παράστασις, ἥτις δέν εἶναι οὔτε ταυτολογία, οὔτε αὐτοαντίφασις, καλεῖται **σχετική** προτασιακή παράστασις.

Π.χ. ἡ παράστασις: $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$, ὅπως φαίνεται ἐκ τοῦ παραπλεύρως πίνακος τιμῶν ἀληθείας αὐτῆς, εἶναι μία σχετική παράστασις.

p	q	$\bar{q}$	$p \Rightarrow \bar{q}$	$\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$
α	α	γ	γ	α
α	γ	α	α	γ
γ	α	γ	α	γ
γ	γ	α	α	γ

Παρατήρησις. Εἰς τὴν τελευταίαν στήλην τοῦ πίνακος τιμῶν ἀληθείας:

- 1) μιᾶς ταυτολογίας ἐμφανίζεται μόνον τό α ,
 - 2) μιᾶς αὐτοαντιφάσεως ἐμφανίζεται μόνον τό γ καί
 - 3) μιᾶς σχετικῆς παραστάσεως ἐμφανίζονται ἀμφότερα καί τό α καί τό γ .
- Ὑπάρχουν λοιπόν τρία εἴδη παραστάσεων:

αὶ ταυτολογίαι, αὶ αὐτοαντιφάσεις καὶ αὶ σχετιναί.

Ἐκάστη δὲ παράστασις ἀνήκει εἰς ἓν, καὶ μόνον ἓν, ἐκ τῶν τριῶν αὐτῶν εἰδῶν. Ἐξ ἄλλου, εἶναι προφανές ὅτι:

α) Ἐάν μία παράστασις P εἶναι ταυτολογία, τότε ἡ παράστασις $\bar{P}$ εἶναι αὐτοαντίφασις καὶ ἀντιστρόφως.

β) Ἐάν μία παράστασις P εἶναι σχετική, τότε καὶ ἡ παράστασις $\bar{P}$ εἶναι σχετική καὶ ἀντιστρόφως.

— Αἱ ταυτολογίαι παίζουν πρωτεύοντα ρόλον εἰς τὴν Μαθηματικὴν Λογικὴν. Αὗται καλοῦνται καὶ **ἀρχαί ἢ νόμοι** τῆς λογικῆς τῶν προτάσεων ἢ ἀπλῶς **νόμοι**. Εἰς τὴν ἐπομένην παράγραφον θὰ ἴδωμεν τοὺς σπουδαιότερους ἐκ τῶν νόμων αὐτῶν.

Σημείωσις. Ἡ κατασκευὴ τοῦ πίνακος τιμῶν ἀληθείας μιᾶς παραστάσεως ὅταν τὸ πλῆθος τῶν μεταβλητῶν τῆς εἵναι σχετικῶς μεγάλο, εἶναι ἐξαιρετικὰ ἐπίπονος. Οὕτω, ὁ ἔλεγχος τοῦ εὔδους μιᾶς παραστάσεως (δηλαδή, ἐάν εἶναι ταυτολογία ἢ αὐτοαντίφασις ἢ σχετική) διὰ τῶν πινάκων τιμῶν ἀληθείας δέν εἶναι παντοτε εὐκολος. Εἰς τὰ ἐπόμενα θὰ ἴδωμεν ἄλλας μεθόδους, μέ τὰς ὁποίας δύναται νὰ γύνη ὁ ἔλεγχος τοῦ εὔδους μιᾶς παραστάσεως.

2.5. Οἱ σπουδαιότεροι νόμοι (ταυτολογίαι) τοῦ προτασιακοῦ λογισμοῦ.

Κατωτέρω παραθέτομεν τοὺς σπουδαιότερους νόμους (ταυτολογίας), εἰς τοὺς ὁποίους καὶ θὰ ἀναφερώμεθα εἰς τὰ ἐπόμενα. Τό ὅτι αἱ κατωτέρω παραστάσεις εἶναι ταυτολογίαι διαπιστοῦται εὐκόλως κατασκευάζοντες τὸν πίνακα τιμῶν ἀληθείας ἐκάστης ἐξ αὐτῶν.

- | | |
|---|----------------------------|
| 1. $p \Leftrightarrow p, p \Rightarrow p$ | (νόμοι ταυτότητος) |
| 2. $p \vee \bar{p}, p \wedge \bar{p}$ | (νόμοι ἀποκλείσεως τρίτου) |
| 3. $\overline{p \wedge \bar{p}}$ | (νόμος ἀντιφάσεως) |

-
- | | |
|---|------------------------|
| 4. $p \vee p \Rightarrow p, p \vee p \Leftrightarrow p$ | } (νόμοι ἀδύναμοι) |
| 5. $p \wedge p \Rightarrow p, p \wedge p \Leftrightarrow p$ | |
| 6. $p \Rightarrow p \vee q, q \Rightarrow p \vee q$ | (προσθετικοί νόμοι) |
| 7. $p \wedge q \Rightarrow p, p \wedge q \Rightarrow q$ | (ἀπλουστευτικοί νόμοι) |
-

● Ἀντιμεταθετικοί νόμοι:

8. $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
 9. $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
 10. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$

● Προσεταιριστικοί νόμοι:

11. $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
 12. $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

$$13. [(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r] \Leftrightarrow [p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)]$$

● Έπιμεριστικοί νόμοι:

$$14. p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$15. p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$16. [p \vee (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow (p \vee q \Rightarrow p \vee r)$$

$$17. [p \vee (q \Leftrightarrow r)] \Leftrightarrow (p \vee q \Leftrightarrow p \vee r)$$

$$18. [p \Leftrightarrow (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \Leftrightarrow q) \wedge (p \Leftrightarrow r)]$$

$$19. [p \Rightarrow (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)]$$

$$20. [p \Rightarrow (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)]$$

$$21. [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$$

$$22. [p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)]$$

● Νόμοι άρνήσεως τών βασικών παραστάσεων:

$$23. \bar{p} \Leftrightarrow p \quad (\text{νόμος διπλής άρνήσεως})$$

$$24. \overline{p \vee q} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q} \quad \left. \begin{array}{l} 25. \overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q} \end{array} \right\} \quad (\text{νόμοι του de Morgan})$$

$$26. \overline{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow p \wedge \bar{q} \quad (\text{νόμος άρνήσεως συνεπαγωγής})$$

$$27. \overline{p \Leftrightarrow q} \Leftrightarrow (p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q) \quad (\text{νόμος άρνήσεως ίσοδυναμίας})$$

$$28. \overline{p \vee q} \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q) \quad (\text{νόμος άρνήσεως άποκλ. διαζεύξεως})$$

● Νόμοι άντικαταστάσεως:

$$29. p \wedge q \Leftrightarrow \overline{\bar{p} \vee \bar{q}}$$

$$30. p \vee q \Leftrightarrow \overline{\bar{p} \wedge \bar{q}}$$

$$31. (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \bar{p} \vee q$$

$$32. (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

$$33. p \neq q \Leftrightarrow \overline{p \Leftrightarrow q}$$

● Νόμοι διαλογισμού:

$$34. p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q \quad (\text{άποσπάσεως ή Modus ponens})$$

$$35. (p \Rightarrow q) \wedge \bar{q} \Rightarrow \bar{p} \quad (\text{συλλογισμού άρνητικής μορφής ή Modus tollens})$$

$$36. (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \quad (\text{ύποθετικού συλλογισμού})$$

$$37. \bar{p} \wedge (p \vee q) \Rightarrow q \quad (\text{διαζευκτικού συλλογισμού})$$

$$38. [(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow t) \wedge (p \vee r)] \Rightarrow (q \vee t) \quad (\text{δημιουργικού δι- λήμματος})$$

$$39. (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow p \wedge q) \quad (\text{άπορροφητικός})$$

$$40. (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p}) \quad (\text{άντιστροφoαντίθετος νόμος})$$

41. $[(p \Rightarrow q) \wedge (\bar{p} \Rightarrow q)] \Leftrightarrow q$ (νόμος δυνατῶν περιπτώσεων)
 42. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge \bar{q}) \Rightarrow (r \wedge \bar{r})]$ (νόμος τῆς εἰς άτοπον ἀπαγωγῆς)
 43. $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \Rightarrow r]$ (νόμος ἐξαγωγῆς)

 44. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p \wedge q)$
 45. $(p \Rightarrow q \wedge \bar{q}) \Rightarrow \bar{p}$
 46. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r \Rightarrow q \vee r), (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge r \Rightarrow q \wedge r)$
 47. $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow [(p \vee r) \Leftrightarrow (q \vee r)], (p \Leftrightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r) \Leftrightarrow (q \wedge r)]$
 48. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$
 49. $(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$
 50. $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \Rightarrow (p \wedge r \Rightarrow q \wedge s),$
 $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \Rightarrow (p \vee r \Rightarrow q \vee s)$
 51. $(p \Leftrightarrow q) \wedge (r \Leftrightarrow s) \Rightarrow (p \wedge r \Leftrightarrow q \wedge s),$
 $(p \Leftrightarrow q) \wedge (r \Leftrightarrow s) \Rightarrow (p \vee r \Leftrightarrow q \vee s)$

2.6. Προτάσεις λογικῶς ἀληθεῖς καὶ λογικῶς ψευδεῖς.

Λογικὴ συνεπαγωγὴ καὶ λογικὴ ἰσοδυναμία προτάσεων.

Μία (σύνθετος) πρότασις λέγομεν ὅτι εἶναι **λογικῶς ἀληθής** – ἀντιστοίχως, **λογικῶς ψευδής** – ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, ἀντικαθιστῶντες τὰς διαφόρους ἀπλᾶς προτάσεις αὐτῆς μέ (προτασιακάς) μεταβλητάς, ἡ προκύπτουσα παράστασις εἶναι ταυτολογία – ἀντιστοίχως, αὐτοαντίφασις.

Παράδειγμα 1. Ἐστω ἡ πρότασις: «Ἐάν τό Παρίσι εἶναι εἰς τήν Ἀγγλίαν εἴτε ὁ 7 εἶναι περιττός, καὶ ὁ 7 δέν εἶναι περιττός, τότε τό Παρίσι εἶναι εἰς τήν Ἀγγλίαν».

Θέτοντες:

p ἀντί: «τό Παρίσι εἶναι εἰς τήν Ἀγγλίαν»

καὶ q ἀντί: «ὁ 7 εἶναι περιττός»,

ἡ προκύπτουσα παράστασις, εἶναι:

$$(p \vee q) \wedge \bar{q} \Rightarrow p.$$

Ἐπειδὴ ἡ παράστασις αὕτη εἶναι ταυτολογία (§ 2.5), ἔπεται ὅτι ἡ δοθεῖσα πρότασις εἶναι λογικῶς ἀληθής.

Παράδειγμα 2. Ἐστω ἡ πρότασις: «Ὁ 5 εἶναι ἄρτιος καὶ ὁ 5 δέν εἶναι ἄρτιος».

Θέτοντες:

p ἀντί: «ὁ 5 εἶναι ἄρτιος»,

ἡ προκύπτουσα παράστασις εἶναι:

$$p \wedge \bar{p}$$

Ἐπειδὴ ἡ παράστασις αὕτη εἶναι αὐτοαντίφασις, ἔπεται ὅτι ἡ δοθεῖσα πρότασις εἶναι λογικῶς ψευδής.

- 11) $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow r] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$
- 12) $(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q \Rightarrow r)$
- 13) $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \vee q \Rightarrow r)$
- 14) $p \vee q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q})$.

18. Δείξτε, διὰ τῶν πινάκων τιμῶν ἀληθείας, ὅτι αἱ κάτωθι παραστάσεις εἶναι αὐτοαντιφάσεις:

- 1) $[(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q \Rightarrow p}] \vee [(p \wedge \bar{q}) \wedge (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})]$
- 2) $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \wedge \bar{p} \wedge \bar{q}$
- 3) $(p \Rightarrow q) \wedge [(q \Rightarrow r) \wedge (p \wedge \bar{r})]$
- 4) $(p \Rightarrow q) \wedge [(p \wedge r) \wedge \overline{q \wedge \bar{r}}]$.

19. Δείξτε, διὰ τῶν πινάκων τιμῶν ἀληθείας, ὅτι αἱ κάτωθι παραστάσεις εἶναι σχετικαί:

- 1) $\bar{p} \wedge q$
- 2) $(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow q)$
- 3) $(p \Rightarrow q) \vee (\bar{p} \Rightarrow q) \Leftrightarrow \bar{q} \wedge p$
- 4) $(p \wedge q) \vee (p \Rightarrow q)$
- 5) $p \wedge q \Rightarrow (p \Rightarrow q) \wedge \overline{(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)}$

20. Εὑρετε, διὰ τῶν πινάκων τιμῶν ἀληθείας, τὸ εἶδος ἐκάστης ἐκ τῶν κάτωθι παραστάσεων:

- | | | |
|---|--|--|
| 1) $(p \wedge \bar{q}) \wedge (p \Rightarrow q)$ | | 4) $[p \Rightarrow (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)]$ |
| 2) $\overline{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow (\bar{p} \Rightarrow \bar{q})$ | | 5) $[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \wedge (\bar{q} \vee \bar{s}) \Rightarrow \bar{p} \vee \bar{r}$. |
| 3) $p \wedge \bar{q} \Rightarrow p \wedge q$ | | |

21. Δείξτε ὅτι αἱ κάτωθι παραστάσεις εἶναι ταυτολογίαι:

- 1) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [((q \Rightarrow p) \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \Leftrightarrow q) \Rightarrow r)]$
- 2) $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow r] \Rightarrow [(r \Rightarrow p) \Rightarrow (t \Rightarrow p)]$
- 3) $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\bar{p} \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow \bar{p}) \Rightarrow r]$
- 4) $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$
- 5) $(\bar{p} \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow q]$
- 6) $(p \vee q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \vee r)]$
- 7) $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [q \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$
- 8) $p \Rightarrow [((p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)]$
- 9) $\bar{r} \Rightarrow [((p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r) \Leftrightarrow (\bar{p} \Leftrightarrow \bar{q})]$.

22. Δείξτε ὅτι αἱ κάτωθι παραστάσεις εἶναι ταυτολογίαι:

- 1) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
- 2) $[p \Rightarrow (p \Rightarrow q)] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
- 3) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$
- 4) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r)]$
- 5) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \vee q \Rightarrow r)]$
- 6) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)]$

- 7) $[(p \Rightarrow \bar{p}) \Rightarrow q] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow q]$
 8) $(p \Rightarrow r) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \vee q \Rightarrow r)]$
 9) $p \Rightarrow [q \Rightarrow (r \Rightarrow p)]$
 10) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(r \Rightarrow t) \Rightarrow q] \Rightarrow [(r \Rightarrow p) \Rightarrow q]$.

23. Δείξτε ότι αι κάτωθι προτάσεις είναι λογικώς αληθείς:

1) «Τό Λονδίνον είναι πρωτεύουσα της Γαλλίας συνεπάγεται: εάν δ 5 είναι άρτιος, τότε τό Λονδίνον είναι πρωτεύουσα της Γαλλίας καί δ 5 είναι άρτιος».

2) «Τό Παρίσι είναι εις τήν Γαλλίαν συνεπάγεται: εάν τό Παρίσι δέν είναι εις τήν Γαλλίαν, τότε τό Λονδίνον είναι πρωτεύουσα της Γαλλίας».

3) « $3 = 5$ συνεπάγεται $7 > 2$ εάν, καί μόνον εάν, $3 \neq 5$ είτε $7 > 2$ ».

24. Δείξτε ότι ή πρότασις: «'Ο 5 είναι άρτιος καί δ 3 είναι άρτιος καί εάν δ 5 είναι άρτιος, τότε δ 3 είναι περιττός » είναι λογικώς ψευδής.

25. Δείξτε ότι ή πρότασις: «Τό Λονδίνον είναι εις τήν Γαλλίαν καί εάν τό Λονδίνον είναι εις τήν Γαλλίαν, τότε τό Παρίσι είναι εις τήν 'Αγγλίαν» συνεπάγεται λογικώς τήν πρότασιν: «Τό Παρίσι είναι εις τήν 'Αγγλίαν».

26. Δείξτε ότι ή πρότασις: «εάν δ 7 είναι άρτιος, τότε δ 8 είναι περιττός» συνεπάγεται λογικώς τήν πρότασιν: «εάν δ 7 είναι άρτιος, τότε δ 7 είναι άρτιος καί δ 8 είναι περιττός».

27. Δείξτε ότι ή πρότασις: «εάν δ 4 είναι πρώτος, τότε δ 3 είναι άρτιος» είναι λογικώς ισοδύναμος μέ τήν πρότασιν: «εάν δ 3 είναι περιττός, τότε δ 4 δέν είναι πρώτος».

28. Δείξτε ότι ή πρότασις: «ή Κρήτη είναι νήσος συνεπάγεται: εάν δ 5 είναι άρτιος, τότε τό Παρίσι είναι εις τήν 'Αγγλίαν» είναι λογικώς ισοδύναμος μέ τήν πρότασιν: «εάν ή Κρήτη είναι νήσος καί δ 5 είναι άρτιος, τότε τό Παρίσι είναι εις τήν 'Αγγλίαν».

29. Καλοῦμεν ήνωμένην άρνησιν δύο άρχικῶν προτάσεων A καί B (κατ'αυτήν τήν τάξιν) μίαν νέαν πρότασιν, ήτις συμβολίζεται μέ: $A \downarrow B$, διαβάζεται: «οὔτε A οὔτε B» καί είναι:

ἀληθής μόνον εάν αι A καί B
 είναι ταυτοχρόνως ψευδεῖς.
 Εἰς τὰς ἄλλας περιπτώσεις εἶ-
 ναι ψευδής (παραπλεύρως πί-
 ναξ).

A	B	$A \downarrow B$
α	α	γ
α	γ	γ
γ	α	γ
γ	γ	α

Δείξτε ότι αι κάτωθι παραστάσεις είναι ταυτολογίαι:

α) $\bar{p} \Leftrightarrow (p \downarrow p)$

β) $p \wedge q \Leftrightarrow [(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)]$

γ) $p \vee q \Leftrightarrow [(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)]$.

30. Καλούμεν **άσυμβιβαστότητα** δύο αρχικῶν προτάσεων A καί B (κατ'αυτήν τήν τάξιν) μίαν νέαν πρότασιν, ἣτις συμβολίζεται μέ: A/B, διαβάζεται: «A άσυμβίβαστος B» καί είναι:

ψευδής μόνον εάν αι Α καί Β
είναι ταυτοχρόνως αληθεΐς .
Είς τās άλλας περιπτώσεις εϊ-
ναι αληθής (παραπλεύρως πί-
ναξ) .

A	B	A/B
α	α	γ
α	γ	α
γ	α	α
γ	γ	α

Δείξτε ότι αι κάτωθι παραστάσεις είναι ταυτολογίαι:

α) $\bar{p} \Leftrightarrow (p/p)$

β) $p \wedge q \Leftrightarrow [(p/q)/(p/q)]$

γ) $p \vee q \Leftrightarrow [(p/p)/(q/q)]$

δ) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [p/(q/q)]$

ε) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p/q)/((p/p)/(q/q))]$.



Κεφάλαιον 3

ΜΟΡΦΩΣΙΣ ΤΑΥΤΟΛΟΓΙΩΝ - ΑΛΓΕΒΡΑ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

3.1. Προκαταρκτικά.

Ὡς εἴπομεν καί εἰς τὰ προηγούμενα, αἱ ταυτολογίαι παίζουν πολὺ σπουδαῖον ρόλον εἰς τὴν Μαθηματικὴν Λογικὴν. Εἶναι οἱ καλούμενοι νόμοι τῆς λογικῆς τῶν προτάσεων, οἱ ὅποιοι χρησιμοποιοῦνται εἰς τὰς τυπικὰς μαθηματικὰς ἀποδείξεις. Λόγω αὐτῶν ἐπιβάλλεται ἡ ἰδιαιτέρα μελέτη τῶν ταυτολογιῶν. Ἡ μελέτη ὅμως αὐτῶν δέν δύναται νά γίνη εὐχερῶς διὰ τῶν πινάκων τιμῶν ἀληθείας, διότι ἡ κατασκευὴ τοῦ πίνακος τιμῶν ἀληθείας μιᾶς παραστάσεως δέν εἶναι πάντοτε εὐκόλος (§ 2.4, σημ.). Ἐκτός ὅμως αὐτοῦ, διὰ τῶν πινάκων τιμῶν ἀληθείας δέν δυνάμεθα νά σχηματίζωμεν ταυτολογίας παρὰ μόνον νά ἐλέγχωμεν, ἐάν μία δοθεῖσα παράστασις εἶναι ταυτολογία ἢ ὄχι. Τό θέμα αὐτό ὠδήγησεν εἰς τὴν ἀναζήτησιν κανόνων μορφώσεως (σχηματισμοῦ) ταυτολογιῶν. Οἱ κανόνες αὐτοί, τοὺς ὁποίους θά ἴδωμεν εἰς τὰς ἐπομένους παραγράφους, μᾶς παρέχουν τρόπους μορφώσεως ταυτολογιῶν, ἄλλοι ἐξ ὠρισμένων παραστάσεων καὶ ἄλλοι ἐξ ἄλλων ταυτολογιῶν.

3.2. Κανόνες ἀρνήσεως, διαζεύξεως καὶ συζεύξεως.

● Κανὼν ἀρνήσεως (Κ. Αρ.).

||| « Ἐάν ἡ παράστασις P εἶναι αὐτοαντίφασις, τότε ἡ παράστασις $\bar{P}$ εἶναι ταυτολογία καὶ ἀντιστρόφως » (διατί;)

Ἦτοι:

$$\boxed{\sim \vdash P \text{ τότε, καὶ μόνον τότε: } \vdash \bar{P}} \quad (\text{Κ. Αρ.})$$

Παράδειγμα 1. Ἐπειδὴ ἡ παράστασις $p \wedge \bar{p}$ εἶναι αὐτοαντίφασις (διατί;), βάσει τοῦ ἀνωτέρω κανόνος, ἡ παράστασις $\overline{p \wedge \bar{p}}$ εἶναι ταυτολογία.

● Κανὼν διαζεύξεως (Κ. Διαζ.).

||| « Ἐάν ἐκ δύο παραστάσεων P καὶ Q ἡ μία (τουλάχιστον) εἶναι ταυτολογία, τότε καὶ ἡ παράστασις: $P \vee Q$ εἶναι ταυτο-

||| λογία>>.

"Ητοι:

$\text{'Εάν } \vdash P \text{ εἴτε } \vdash Q, \text{ τότε: } \vdash P \vee Q$

 (Κ.Διαζ.)

Πράγματι. "Εστω ὅτι: $\vdash P$. Τότε, διὰ κάθε συνδυασμόν τῶν τιμῶν ἀληθείας τῶν μεταβλητῶν τῶν P καὶ Q , ἡ P λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α , ἐπομένως καὶ ἡ $P \vee Q$ λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α . Συνεπῶς, ἡ $P \vee Q$ εἶναι ταυτολογία.

Παράδειγμα 2. "Επειδὴ: $\vdash p \vee \bar{p}$ (§ 2.5), βάσει τοῦ ἀνωτέρω κανόνος ἔχομεν:

$$\vdash (p \vee \bar{p}) \vee (p \Rightarrow q).$$

● **Κανὼν συζεύξεως (Κ.Συζ.).**

||| << 'Εάν δύο παραστάσεις P καὶ Q εἶναι ταυτολογίαι, τότε καὶ ἡ παράστασις: $P \wedge Q$ εἶναι ταυτολογία καὶ ἀντιστρόφως>>.

"Ητοι:

$\vdash P \text{ καὶ } \vdash Q \text{ τότε, καὶ μόνον τότε: } \vdash P \wedge Q$

 (Κ.Συζ.)

Πράγματι. 1) "Εστω ὅτι $\vdash P$ καὶ $\vdash Q$. Τότε, διὰ κάθε συνδυασμόν τῶν τιμῶν ἀληθείας τῶν μεταβλητῶν τῶν P καὶ Q , αἱ P καὶ Q λαμβάνουν τιμὰς ἀληθείας α , ἐπομένως καὶ ἡ $P \wedge Q$ λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α . Συνεπῶς, ἡ $P \wedge Q$ εἶναι ταυτολογία.

2) "Εστω ὅτι: $\vdash P \wedge Q$. Τότε, διὰ κάθε συνδυασμόν τῶν τιμῶν ἀληθείας τῶν μεταβλητῶν τῶν P καὶ Q , ἡ $P \wedge Q$ λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α , ἐπομένως, συμφῶνως πρὸς τὸν ὅρισμόν τῆς πράξεως $\wedge$ (§ 1.3), καὶ ἐκάστη τῶν P καὶ Q λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α . Συνεπῶς ἐκάστη τῶν P καὶ Q λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α διὰ κάθε συνδυασμόν τῶν τιμῶν ἀληθείας τῶν μεταβλητῶν τῆς καὶ ἄρα εἶναι ταυτολογία.

Παράδειγμα 3. "Επειδὴ:

$$\vdash \overline{p \vee q} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q} \quad \text{καὶ}$$

$$\vdash (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \bar{p} \vee q \quad (\S 2.5),$$

βάσει τοῦ ἀνωτέρω κανόνος, ἔχομεν:

$$\vdash (\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}) \wedge [(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \bar{p} \vee q].$$

3.3. Κανόνες ἀποσπάσεως ἢ **Modus ponens**.

Πρῶτος κανὼν ἀποσπάσεως ἢ Modus ponens (Κ.Μ.Ρ.) (διὰ προτάσεις).

||| << 'Εάν ἐκάστη τῶν προτάσεων p καὶ $p \Rightarrow q$ εἶναι ἀληθής, τότε καὶ ἡ πρότασις q εἶναι ἀληθής>>.

"Ητοι:

$\text{'Εάν } p \text{ ἀληθής καὶ } p \Rightarrow q \text{ ἀληθής, τότε } q \text{ ἀληθής}$

 (Κ.Μ.Ρ)

Πράγματι, ἐκ τοῦ παραπλεύρως πύνακος τιμῶν ἀληθείας τῆς $p \Rightarrow q$ βλέπομεν ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου αἱ p καὶ $p \Rightarrow q$ εἶναι ἀληθεῖς (γραμμὴ πρώτη), τότε καὶ ἡ q εἶναι ἀληθής.

p	q	$p \Rightarrow q$
α	α	α
α	γ	γ
γ	α	α
γ	γ	α

Δεύτερος κανὼν ἀποσπάσεως ἢ Modus ponens (Κ.Μ.Ρ.) διὰ παραστάσεις.

« Ἐάν ἐκάστη τῶν παραστάσεων P καὶ $P \Rightarrow Q$ εἶναι ταυτολογία, τότε καὶ ἡ παράστασις Q εἶναι ταυτολογία ».

Ἦτοι:

Ἐάν $\vdash P$ καὶ $\vdash P \Rightarrow Q$, τότε: $\vdash Q$

(Κ.Μ.Ρ.)

Πράγματι. Ἐστω ὅτι $\vdash P$ καὶ $\vdash P \Rightarrow Q$. Τότε, διὰ κάθε συνδυασμὸν τῶν τιμῶν ἀληθείας τῶν μεταβλητῶν τῶν P καὶ Q : αἱ P καὶ $P \Rightarrow Q$ λαμβάνουν τιμὰς ἀληθείας α καὶ συνεπῶς, βάσει τοῦ πρώτου κανόνος ἀποσπάσεως, καὶ ἡ Q λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α . Ἐξ αὐτοῦ ἔπεται, εὐκόλως, ὅτι ἡ Q λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α διὰ κάθε συνδυασμὸν τῶν τιμῶν ἀληθείας τῶν μεταβλητῶν τῆς καὶ συνεπῶς αὐτὴ εἶναι ταυτολογία.

3.4. Κανὼν συνεπαγωγῆς.

● Κανὼν συνεπαγωγῆς (Κ.Συν.).

« Ἐάν ἐκ δύο παραστάσεων P καὶ Q , ἡ Q λαμβάνη τιμὴν ἀληθείας α διὰ κάθε συνδυασμὸν τῶν τιμῶν ἀληθείας τῶν μεταβλητῶν των, διὰ τὸν ὅποῖον ἡ P λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α , τότε ἡ παράστασις: $P \Rightarrow Q$ εἶναι ταυτολογία καὶ ἀντιστρόφως ».

Πράγματι. 1) Ἐστω ὅτι ἡ Q λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α διὰ κάθε συνδυασμὸν τῶν τιμῶν ἀληθείας τῶν μεταβλητῶν των, διὰ τὸν ὅποῖον ἡ P λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α . Τότε, ἡ $P \Rightarrow Q$ λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α διὰ κάθε συνδυασμὸν τῶν τιμῶν ἀληθείας τῶν μεταβλητῶν τῆς (διαιτύ;) καὶ συνεπῶς: $\vdash P \Rightarrow Q$.

2) Ἐστω ὅτι: $\vdash P \Rightarrow Q$. Τότε, ἡ $P \Rightarrow Q$ λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α διὰ κάθε συνδυασμὸν τῶν τιμῶν ἀληθείας τῶν μεταβλητῶν τῆς. Συνεπῶς, διὰ κάθε συνδυασμὸν τῶν τιμῶν ἀληθείας τῶν μεταβλητῶν τῶν P καὶ Q , διὰ τὸν ὅποῖον ἡ P λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α , ἡ $P \Rightarrow Q$ λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α καὶ ἐπομένως, βάσει τοῦ Κ.Μ.Ρ. (§ 3.3), καὶ ἡ Q λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α .

Παράδειγμα 1. $\vdash q \Rightarrow (p \Rightarrow q)$.

Πράγματι. Ἐάν ἡ q λαμβάνη τιμὴν ἀληθείας α , τότε καὶ ἡ $p \Rightarrow q$ λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α (διαιτύ;) καὶ συνεπῶς, βάσει τοῦ ἀνωτέρω κανόνος, ἡ $q \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ εἶναι ταυτολογία.

● Είδιική περίπτωσης.

||| « 'Εάν $\vdash Q$, τότε: $\vdash P \Rightarrow Q$, οιασδήποτε ούσης της παραστάσεως P » . (διατί;)

Παράδειγμα 2. $\vdash p \vee \bar{r} \Rightarrow [q \Rightarrow (p \Rightarrow q)]$.

Πράγματι. Είς τό προηγούμενον παράδειγμα εὔδομεν ὅτι: $\vdash q \Rightarrow (p \Rightarrow q)$. Ἄρα, βάσει τῆς ἀνωτέρω εἰδικῆς περιπτώσεως, ἡ παράστασις: $p \vee \bar{r} \Rightarrow [q \Rightarrow (p \Rightarrow q)]$ εἶναι ταυτολογία.

Σημειώσεις. Εὐρίσκομεν εὐκόλως ὅτι:

● « 'Εάν $\vdash \neg P$, τότε: $\vdash P \Rightarrow Q$, οιασδήποτε ούσης τῆς παραστάσεως Q » . (διατί;).

Π.χ. ἐπειδὴ $\vdash p \wedge \bar{p}$, ἔχομεν:

$$\vdash p \wedge \bar{p} \Rightarrow (p \vee q \Rightarrow q \wedge r).$$

3.5. Λογική συνεπαγωγή παραστάσεων.

Ὁρισμός. Μία παράστασις P λέγομεν ὅτι **συνεπάγεται λογικῶς** ἢ ὅτι **συνεπάγεται ταυτολογικῶς** μίαν παράστασιν Q ἐάν, καί μόνον ἐάν, ἡ παράστασις: $P \Rightarrow Q$ εἶναι ταυτολογία, ἥτοι: $\vdash P \Rightarrow Q$.

Παράδειγμα. Ἡ παράστασις: $p \vee \bar{r}$ συνεπάγεται λογικῶς τήν παράστασιν: $q \Rightarrow (p \Rightarrow q)$, διότι εἰς τό δεύτερον παράδειγμα τῆς προηγουμένης παραγράφου εὔδομεν ὅτι:

$$\vdash p \vee \bar{r} \Rightarrow [q \Rightarrow (p \Rightarrow q)].$$

— Βάσει τοῦ κανόνος συνεπαγωγῆς (§ 3.4) εὐρίσκομεν εὐκόλως ὅτι ἰσχύει (εἶναι ἀληθές) ἡ ἐξῆς

Πρότασις: « Μία παράστασις P συνεπάγεται λογικῶς μίαν παράστασιν Q ἐάν, καί μόνον ἐάν, ἡ Q λαμβάνη τιμὴν ἀληθείας α διὰ κάθε συνδυασμόν τῶν τιμῶν ἀληθείας τῶν μεταβλητῶν των, διὰ τὸν ὁποῖον ἡ P λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α » . (διατί;)

Σημειώσεις. Ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι μία παράστασις P συνεπάγεται λογικῶς μίαν παράστασιν Q δέν ἔπεται ἀναγκάως ὅτι αἱ P καί Q περιέχουν τὰς αὐτάς μεταβλητάς (βλέπε ἀνωτέρω παράδειγμα).

3.6. Κανὼν ἰσοδυναμίας.

● Κανὼν ἰσοδυναμίας (Κ.Ἰσοδ.).

||| « 'Εάν μία παράστασις P λαμβάνη τήν αὐτὴν τιμὴν ἀληθείας μέ μίαν παράστασιν Q διὰ κάθε συνδυασμόν τῶν τιμῶν ἀληθείας τῶν μεταβλητῶν των, τότε ἡ παράστασις: $P \Leftrightarrow Q$ εἶναι ταυτολογία καί ἀντιστρόφως » .

Πράγματι. 1) Ἐστω ὅτι ἡ P λαμβάνει τήν αὐτὴν τιμὴν ἀληθείας μέ τήν Q διὰ κάθε συνδυασμόν τῶν τιμῶν ἀληθείας τῶν μεταβλητῶν των. Τότε, ἡ παράστασις: $P \Leftrightarrow Q$ λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α διὰ κάθε συνδυασμόν τῶν τιμῶν ἀληθείας τῶν

μεταβλητών της (διατί;) καὶ συνεπῶς αὕτη εἶναι ταυτολογία, ἥτοι: $\vdash P \Leftrightarrow Q$.

2) Ἐστω ὅτι: $\vdash P \Leftrightarrow Q$. Τότε, διὰ κάθε συνδυασμὸν τῶν τιμῶν ἀληθείας τῶν μεταβλητῶν τῶν P καὶ Q : ἡ $P \Leftrightarrow Q$ λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α καὶ συνεπῶς, βάσει τοῦ ὀρισμοῦ τῆς πράξεως $\Leftrightarrow$ (§ 1.3), ἡ P λαμβάνει τὴν αὐτὴν τιμὴν ἀληθείας μέ τὴν Q .

Παράδειγμα 1. $\vdash p \Leftrightarrow (\bar{p} \Rightarrow p)$.

Πράγματι. Ἐάν ἡ p λαμβάνη τιμὴν ἀληθείας α , τότε καὶ ἡ $\bar{p} \Rightarrow p$ λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α καὶ ἐάν ἡ p λαμβάνη τιμὴν ἀληθείας γ , τότε καὶ ἡ $\bar{p} \Rightarrow p$ λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας γ (διατί;). Ἀρα βάσει τοῦ ἀνωτέρω κανόνος, ἡ παράστασις $p \Leftrightarrow (\bar{p} \Rightarrow p)$ εἶναι ταυτολογία.

● Εἰδικαὶ περιπτώσεις .

α) $\ll$ Ἐάν $\vdash P$ καὶ $\vdash Q$, τότε: $\vdash P \Leftrightarrow Q \gg$. (διατί;)

β) $\ll$ Ἐάν $\vdash \neg P$ καὶ $\vdash \neg Q$, τότε: $\vdash P \Leftrightarrow Q \gg$. (διατί;)

Παράδειγμα 2. Ἐπειδὴ:

$$\vdash \overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q} \text{ καὶ } \vdash r \vee \bar{r} \text{ (§ 2.5),}$$

βάσει τῆς ἀνωτέρω πρώτης εἰδικῆς περιπτώσεως, ἔχομεν:

$$\vdash (\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}) \Leftrightarrow (r \vee \bar{r}).$$

3.7. Λογικῶς ἰσοδύναμοι παραστάσεις.

Ορισμός. Μία παράστασις P λέγομεν ὅτι εἶναι **λογικῶς ἰσοδύναμος**

ἢ ἀπλῶς **ἰσοδύναμος** μέ μίαν παράστασιν Q καὶ γράφομεν: $P \equiv Q$ ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, ἡ παράστασις: $P \Leftrightarrow Q$ εἶναι ταυτολογία, ἥτοι: $\vdash P \Leftrightarrow Q$.

Συμβολικῶς:

$P \equiv Q \Leftrightarrow \vdash P \Leftrightarrow Q$

Εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου μία παράστασις P εἶναι (λογικῶς) ἰσοδύναμος μέ μίαν παράστασιν Q , λέγομεν ἀκόμη ὅτι ἡ P εἶναι **ταυτολογικῶς ἰσοδύναμος** μέ τὴν Q .

Παραδείγματα

1) $p \Rightarrow q \equiv \bar{p} \vee q$, διότι: $\vdash (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \bar{p} \vee q$ (§ 2.5).

2) $(p \wedge \bar{p}) \vee q \equiv q$. (διατί;)

3) $p \vee \bar{p} \equiv q \vee \bar{q}$. (διατί;)

— Βάσει τοῦ κανόνος ἰσοδυναμίας (§ 3.6) εὐρίσκομεν εὐκόλως ὅτι ἰσχύει ἡ ἑξῆς

Πρότασις 1. $\ll$ Μία παράστασις P εἶναι ἰσοδύναμος μέ μίαν παράστασιν Q ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, ἡ P λαμβάνη τὴν αὐτὴν τιμὴν ἀληθείας μέ τὴν Q διὰ κάθε συνδυασμὸν τῶν τιμῶν ἀληθείας τῶν μεταβλητῶν των $\gg$.

Βάσει τῆς προτάσεως αὐτῆς, εὐρίσκομεν εὐκόλως ὅτι ἰσχύει ἡ

ἐξῆς

Πρόταση II. «Οἷωνδὴποτε οὐσῶν τῶν παραστάσεων P , Q καὶ R , ἰσχύουν:

α) $P \equiv P$.

(αὐτοπαθὴς ἰδιότης)

β) Ἐάν $P \equiv Q$, τότε: $Q \equiv P$.

(συμμετρικὴ ἰδιότης)

γ) Ἐάν $P \equiv Q$ καὶ $Q \equiv R$, τότε: $P \equiv R$.

(μεταβατικὴ ἰδιότης)

Ἐπειδὴ, λόγῳ τῆς προτάσεως αὐτῆς: « $P \equiv Q$, τότε: $Q \equiv P$ », εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου: $P \equiv Q$ συνάμεθα νὰ λέγωμεν ἀδιαφόρως ὅτι αἱ P καὶ Q εἶναι ἰσοδύναμοι.

Πρόταση III. «Δύο παραστάσεις P καὶ Q εἶναι ἰσοδύναμοι ἔάν, καὶ μόνον ἔάν, ἐκάστη ἐξ αὐτῶν συνεπάγεται λογικῶς τὴν ἄλλην».

Ἦτοι:

$$P \equiv Q \text{ ἔάν, καὶ μόνον ἔάν: } \vdash P \Rightarrow Q \text{ καὶ } \vdash Q \Rightarrow P$$

Πράγματι. 1) Ἐστω ὅτι: $\vdash P \Rightarrow Q$ καὶ $\vdash Q \Rightarrow P$. Ἐξ αὐτῶν καὶ βάσει τῆς προτάσεως τῆς § 3.5, αἱ P καὶ Q λαμβάνουν τὴν αὐτὴν τιμὴν ἀληθείας διὰ κάθε συνδυασμὸν τῶν τιμῶν ἀληθείας τῶν μεταβλητῶν των (διατί;). Συνεπῶς, βάσει τῆς ἀνωτέρω προτάσεως I, ἰσχύει: $P \equiv Q$.

2) Ἐστω ὅτι: $P \equiv Q$. Τότε, βάσει τῆς ἀνωτέρω προτάσεως I, αἱ P καὶ Q λαμβάνουν τὴν αὐτὴν τιμὴν ἀληθείας διὰ κάθε συνδυασμὸν τῶν τιμῶν ἀληθείας τῶν μεταβλητῶν των. Συνεπῶς, διὰ κάθε συνδυασμὸν τῶν τιμῶν ἀληθείας τῶν μεταβλητῶν των, διὰ τὸν ὅπου ἢ P (ἀντιστοίχως ἢ Q) λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α , ἢ Q (ἀντιστοίχως ἢ P) λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α . Ἐπομένως, βάσει τῆς προτάσεως τῆς § 3.5, ἔχομεν: $\vdash P \Rightarrow Q$ καὶ $\vdash Q \Rightarrow P$.

Σημείωσις I. Ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι δύο παραστάσεις P καὶ Q εἶναι ἰσοδύναμοι δὲν ἔπεται ἀναγκαιῶς ὅτι αἱ P καὶ Q περιέχουν τὰς αὐτὰς μεταβλητάς (βλέπε ἀνωτέρω παραδείγματα).

Σημείωσις II. Ἐστῶσαν P καὶ Q δύο παραστάσεις.

1ον. $P \Leftrightarrow Q$ εἶναι μία παράστασις, ἥτις δυνατόν νὰ λαμβάνῃ ὡς τιμὰς ἀληθείας καὶ τὸ α καὶ τὸ γ .

2ον. $P \equiv Q$ εἶναι μία «σχέσις» μεταξύ τῶν παραστάσεων P καὶ Q , ἥτις δηλώνει ὅτι: $\vdash P \Leftrightarrow Q$, δηλαδή ὅτι ἡ παράστασις: $P \Leftrightarrow Q$ λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α διὰ κάθε συνδυασμὸν τῶν τιμῶν ἀληθείας τῶν μεταβλητῶν της.

3.8. Κανὼν ἀντικαταστάσεως μεταβλητῶν ἢ κανὼν ἐφαρμογῆς.

● **Κανὼν ἀντικαταστάσεως μεταβλητῶν ἢ κανὼν ἐφαρμογῆς (Κ.Α.Μ.).**

«Ἐάν εἰς μίαν ταυτολογίαν ἀντικαταστήσωμεν μίαν ἢ περισσότερας μεταβλητάς της μέ οἷασδὴποτε παραστάσεις, τότε ἡ προκύπτουσα παράστασις εἶναι πάλιν ταυτολογία».

Πράγματι. "Εστω P μία ταυτολογία μέ μεταβλητάς: $q_1, q_2, \dots, q_n, r_1, r_2, \dots, r_m$. Είς αὐτήν ἀντικαθιστῶμεν τὰς μεταβλητάς: $q_1, q_2, \dots, q_n$, μέ τυχούσας παραστάσεις: $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$, ἀντιστοίχως καὶ τὴν προκύπτουσαν παράστασιν συμβολίζομεν μέ P^* . "Εστω ὅτι δι' ἓνα τυχόντα συνδυασμὸν τῶν τιμῶν ἀληθείας τῶν μεταβλητῶν τῆς P^* αἱ παραστάσεις: $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ λαμβάνουν τιμὰς ἀληθείας $x_1, x_2, \dots, x_n$, ἀντιστοίχως καὶ εἰς τὰς μεταβλητάς: $r_1, r_2, \dots, r_m$ ἀντιστοιχοῦν αἱ τιμαὶ ἀληθείας: $y_1, y_2, \dots, y_m$, ἀντιστοίχως (ὅπου: $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m$ εἶναι α ἢ y). 'Εάν, τώρα, εἰς τὰς μεταβλητάς τῆς P : $q_1, q_2, \dots, q_n, r_1, r_2, \dots, r_m$ ἀντιστοιχίσωμεν τὰς τιμὰς ἀληθείας: $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m$, ἀντιστοίχως, τότε ἡ λαμβανομένη ὑπὸ τῆς P τιμὴ ἀληθείας ταυτίζεται μέ τὴν ὑπὸ τῆς P^* λαμβανομένης τιμῆς ἀληθείας διὰ τόνθεωρούμενον συνδυασμὸν τῶν τιμῶν ἀληθείας τῶν μεταβλητῶν τῆς. 'Επεὶ δὲ ὅμως ἡ P εἶναι ταυτολογία, ἡ τιμὴ αὐτῆς ἀληθείας εἶναι α. Συνεπῶς, ἡ P^* λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α διὰ κάθε συνδυασμὸν τῶν τιμῶν ἀληθείας τῶν μεταβλητῶν τῆς καὶ ἄρα εἶναι ταυτολογία.

Παράδειγμα 1. 'Εάν εἰς τὴν ταυτολογίαν:

$$p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q \quad (\S 2.5)$$

ἀντικαταστήσωμεν τό p διὰ τῆς παραστάσεως $r \vee t$ καὶ τό q διὰ τῆς $\bar{q}$, τότε προκύπτει ἡ ἑξῆς παράστασις:

$$(r \vee t) \wedge (r \vee t \Rightarrow \bar{q}) \Rightarrow \bar{q},$$

ἥτις, βάσει τοῦ ἀνωτέρω κανόνος, εἶναι ταυτολογία.

Παράδειγμα 2. "Εχομεν: $\vdash p \Leftrightarrow p$ καὶ συνεπῶς: $\vdash P \Leftrightarrow P$, ἥτοι: $P \equiv P$, οἷασδήποτε οὔσης τῆς παραστάσεως P . Οὕτω, ἐπανευρίσκομεν τὴν πρώτην περίπτωσιν τῆς προτάσεως II τῆς προηγουμένης παραγράφου.

Παράδειγμα 3. "Εχομεν: $\vdash \bar{p} \Leftrightarrow p$ καὶ συνεπῶς: $\vdash \bar{P} \Leftrightarrow P$, ἥτοι: $\bar{P} \equiv P$, οἷασδήποτε οὔσης τῆς παραστάσεως P .

● Πρότασις.



$$\langle P \equiv Q \text{ ἐάν, καὶ μόνον ἐάν: } \bar{P} \equiv \bar{Q} \rangle.$$

Πράγματι. α) "Εστω ὅτι: $P \equiv Q$. Τότε, διὰ κάθε συνδυασμὸν τῶν τιμῶν ἀληθείας τῶν μεταβλητῶν τῶν P καὶ Q , αἱ P καὶ Q λαμβάνουν τὴν αὐτὴν τιμὴν ἀληθείας. 'Επομένως, τό αὐτό συμβαίνει καὶ διὰ τὰς $\bar{P}$ καὶ $\bar{Q}$ (διαιτί;) καὶ συνεπῶς: $\bar{P} \equiv \bar{Q}$.

β) "Εστω ὅτι: $\bar{P} \equiv \bar{Q}$. Τότε, βάσει τοῦ προηγουμένου: $\bar{\bar{P}} \equiv \bar{\bar{Q}}$ καὶ ἐπειδὴ: $\bar{\bar{P}} \equiv P$ καὶ $\bar{\bar{Q}} \equiv Q$, ἔχομεν: $P \equiv Q$.

Σημειώσεις. 'Ο κανὼν ἀντικαταστάσεως μεταβλητῶν καὶ ὁ κανὼν ἀποσπάσεως καλοῦνται καὶ «κανόνες παραγωγῆς». 'Εξαιρετικῆς σημασίας διὰ τὴν Μαθηματικὴν λογικὴν εἶναι τό γεγονός ὅτι μεταξύ τῶν ταυτολογιῶν ὑπάρχουν μερικαὶ ὁμάδες (ταυτολογιῶν) ἐξ ἐκάστης τῶν ὁποίων, χρησιμοποιοῦντες τοὺς κανόνες παραγωγῆς, δύνανται νὰ «παραχθοῦν» ὅλοι αἱ ἄλλαι. Αἱ ταυτολογίαι μὲς τοιαύτης ἐκλογέσεως ὁμάδος καλοῦνται, πρὸς διάκρισιν, «σχήματα ἀξιωματῶν». Μία τοιαύτη

ὅμως ἔκθεσις τῶν ταυτολογιῶν ὑπερβαίνει τοῦ σκοποῦ τοῦ παρόντος βιβλίου.

3.9. Εφαρμογαί.

1. "Εχομεν:

$$\vdash p \Rightarrow p \vee q \text{ καὶ } \vdash q \Rightarrow p \vee q. (\S 2.5)$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς αὐτάς τὸ p διὰ τῆς παραστάσεως P καὶ τὸ q διὰ τῆς παραστάσεως Q , ἔχομεν, βάσει τοῦ Κ.Α.Μ.:

$$\vdash P \Rightarrow P \vee Q \text{ καὶ } \vdash Q \Rightarrow P \vee Q.$$

Ἐξ αὐτῶν, βάσει τοῦ Κ.Μ.Ρ., εὐρίσκομεν ὅτι:

$$\text{Ἐάν } \vdash P \text{ εἴτε } \vdash Q, \text{ τότε: } \vdash P \vee Q$$

Οὕτω, ἐπανευρίσκομεν τὸν κανόνα διαζεύξεως (§ 3.2).

2. "Εχομεν:

$$\vdash p \wedge q \Rightarrow p \text{ καὶ } \vdash p \wedge q \Rightarrow q. (\S 2.5)$$

Ἐξ αὐτῶν εὐρίσκομεν ὅτι:

$$\vdash P \wedge Q \Rightarrow P \text{ καὶ } \vdash P \wedge Q \Rightarrow Q.$$

Συνεπῶς: ἐάν $\vdash P \wedge Q$, τότε: $\vdash P$ καὶ $\vdash Q$.

— Ἐπίσης:

$$\vdash p \Rightarrow (q \Rightarrow p \wedge q). (\S 2.5)$$

Ἐξ αὐτῆς εὐρίσκομεν ὅτι:

$$\vdash P \Rightarrow (Q \Rightarrow P \wedge Q).$$

Οὕτω: ἐάν $\vdash P$, τότε: $\vdash Q \Rightarrow P \wedge Q$ καὶ ἐάν ἐπὶ πλέον $\vdash Q$, τότε: $\vdash P \wedge Q$.

"Ἦτοι, ἐάν $\vdash P$ καὶ $\vdash Q$, τότε: $\vdash P \wedge Q$. Ἐξ αὐτῶν ἔχομεν ὅτι:

$$\vdash P \text{ καὶ } \vdash Q \text{ τότε, καὶ μόνον τότε: } \vdash P \wedge Q$$

Οὕτω, ἐπανευρίσκομεν τὸν κανόνα συζεύξεως (§ 3.2).

3. "Εχομεν:

$$\vdash p \vee q \Rightarrow q \vee p \text{ καὶ } \vdash p \wedge q \Rightarrow q \wedge p.$$

Ἐπομένως:

$$\vdash P \vee Q \Rightarrow Q \vee P \text{ καὶ } \vdash P \wedge Q \Rightarrow Q \wedge P.$$

Ἐξ αὐτῶν εὐρίσκομεν ὅτι:

$$\text{Ἐάν } \vdash P \vee Q, \text{ τότε: } \vdash Q \vee P$$

$$\text{Ἐάν } \vdash P \wedge Q, \text{ τότε: } \vdash Q \wedge P$$

4. "Εχομεν:

$$\vdash (p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (q \Leftrightarrow p).$$

Ἐπομένως:

$$\vdash (P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow (Q \Leftrightarrow P).$$

Ἐξ αὐτῆς εὐρίσκομεν ὅτι:

$$\text{Ἐάν } \vdash P \Leftrightarrow Q, \text{ τότε: } \vdash Q \Leftrightarrow P$$

"Ητοι: εάν $P \equiv Q$, τότε: $Q \equiv P$. Ούτω, επανευρίσκομεν τήν δευτέραν περίπτωσιν τῆς προτάσεως II τῆς § 3.7.

5. Ἐχομεν:

$$\vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]. \quad (\text{διατί;})$$

Ἐπομένως:

$$\vdash (P \Rightarrow Q) \Rightarrow [(Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)].$$

Ἐξ αὐτῆς εὐρίσκομεν εὐκόλως ὅτι:

$$\boxed{\text{Ἐάν } \vdash P \Rightarrow Q \text{ καί } \vdash Q \Rightarrow R, \text{ τότε: } \vdash P \Rightarrow R}$$

6. Ἐχομεν:

$$\vdash (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q).$$

Ἐπομένως:

$$\vdash (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P) \Rightarrow (P \Leftrightarrow Q). \quad (1)$$

Ἐάν, τώρα, εἶναι $\vdash P \Rightarrow Q$ καί $\vdash Q \Rightarrow P$, τότε, βάσει τοῦ κανόνος συζεύξεως (άνωτέρω ἐφαρμογή 2), ἔχομεν:

$$\vdash (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$$

καί λόγῳ τῆς (1) ἔχομεν: $\vdash P \Leftrightarrow Q$.

— Ἐχομεν ἐπίσης:

$$\vdash (p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p).$$

Ἐπομένως:

$$\vdash (P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P). \quad (2)$$

Ἐάν, τώρα, εἶναι: $\vdash P \Leftrightarrow Q$, τότε ἐκ τῆς (2) ἔχομεν:

$$\vdash (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$$

καί βάσει τοῦ κανόνος συζεύξεως, ἔχομεν: $\vdash P \Rightarrow Q$ καί $\vdash Q \Rightarrow P$.

Ἐξ αὐτῶν, ἔχομεν ὅτι:

$$\boxed{\vdash P \Leftrightarrow Q \text{ εάν, καί μόνον εάν: } \vdash P \Rightarrow Q \text{ καί } \vdash Q \Rightarrow P}$$

Οὕτω, επανευρίσκομεν τήν πρότασιν III τῆς § 3.7.

7. Ἐχομεν:

$$\vdash (p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q).$$

Ἐπομένως:

$$\vdash (P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow Q). \quad (1)$$

Ἐάν, τώρα, εἶναι: $\vdash P \Leftrightarrow Q$, τότε, ἐκ τῆς (1), ἔπεται ὅτι $\vdash P \Rightarrow Q$ καί εάν ἐπὶ πλέον εἶναι: $\vdash P$, τότε: $\vdash Q$. Ὥστε:

$$\boxed{\text{Ἐάν } \vdash P \text{ καί } \vdash P \Leftrightarrow Q, \text{ τότε: } \vdash Q}$$

"Ητοι: Ἐάν $\vdash P$ καί $P \equiv Q$, τότε: $\vdash Q$.

8. Ἐπειδή:

$$\vdash p \vee p \Rightarrow p \quad \text{καί} \quad \vdash p \wedge p \Rightarrow p,$$

εὐρίσκομεν εὐκόλως ὅτι:

$$\boxed{\text{Ἐάν } \vdash P \vee P, \text{ τότε: } \vdash P}$$

$$\boxed{\text{Ἐάν } \vdash P \wedge P, \text{ τότε: } \vdash P}$$

3.10. Κανών αντικαταστάσεως.

● Κανών αντικαταστάσεως (Κ.Α.)

« Έστω P μία παράστασις καί P' μία υποπαράστασις αὐτῆς
 « Έστω ἀκόμη Q ἡ παράστασις, ἣτις προκύπτει ἐκ τῆς P , ὅ-
 ταν ἀντικαταστήσωμεν τὴν P' μέ μιαν ἄλλην παράστασιν Q' .

α) 'Εάν $P' \equiv Q'$, τότε $P \equiv Q$.

β) 'Εάν $\vdash P$ καί $P' \equiv Q'$, τότε: $\vdash Q$ ».

Πράγματι. α) "Έστω ὅτι: $P' \equiv Q'$. Τότε, διὰ κάθε συνδυασμόν τῶν τιμῶν ἀ-
 ληθείας τῶν μεταβλητῶν τῶν P καί Q , αἱ P' καί Q' λαμβάνουν τὴν αὐτὴν τιμὴν ἀ-
 ληθείας. Τό αὐτό ὅμως συμβαίνει καὶ διὰ τὰς P καί Q , διότι ἡ Q διαφέρει ἀπὸ
 τὴν P μόνον εἰς τό ὅτι περιέχει τὴν Q' εἰς τὰς θέσεις ὅπου ἡ P περιέχει τὴν
 P' . 'Επομένως: $P \equiv Q$ (§ 3.7, πρότασις I).

β) "Έστω ὅτι: $\vdash P$ καί $P' \equiv Q'$. 'Επειδὴ $P' \equiv Q'$, βάσει τοῦ προηγουμένου, ἔχο-
 μεν: $P \equiv Q$. 'Εξ αὐτοῦ καὶ ἐπειδὴ $\vdash P$ εὐρύσκομεν εὐκόλως ὅτι: $\vdash Q$.

Παράδειγμα 1. 'Επειδὴ:

$$\bar{p} \vee q \equiv p \Rightarrow q,$$

ἔχομεν, βάσει τοῦ ἀνωτέρω κανόνος:

$$\bar{p} \vee q \Rightarrow (p \Rightarrow \bar{p} \vee q) \equiv \bar{p} \vee q \Rightarrow [p \Rightarrow (p \Rightarrow q)].$$

Παράδειγμα 2. 'Επειδὴ:

$$p \vee \bar{p} \equiv q \vee \bar{q},$$

ἔχομεν: $r \wedge (p \vee \bar{p}) \Leftrightarrow \bar{r} \vee p \equiv r \wedge (q \vee \bar{q}) \Leftrightarrow \bar{r} \vee p$.

Παράδειγμα 3. 'Επειδὴ:

$$p \Rightarrow q \equiv \bar{p} \vee q$$

ἔχομεν:

$$p \vee (p \Rightarrow q) \equiv p \vee (\bar{p} \vee q)$$

καί ἐπειδὴ:

$$p \vee (\bar{p} \vee q) \equiv (p \vee \bar{p}) \vee q,$$

ἔχομεν (§ 3.7, προτ. II): $p \vee (p \Rightarrow q) \equiv (p \vee \bar{p}) \vee q$. (1)

"Αλλά: $\vdash p \vee \bar{p}$ καί συνεπῶς: $\vdash (p \vee \bar{p}) \vee q$ (Κ.Διαζ.). 'Εξ αὐτοῦ
 καί τῆς (1), βάσει τοῦ ἀνωτέρω κανόνος (περιπτ.Β), ἔχομεν:

$$\vdash p \vee (p \Rightarrow q).$$

3.11. Ὁ ρόλος τῆς σχέσεως $\equiv$ μεταξὺ τῶν παραστάσεων.

"Αλγεβρα τῶν παραστάσεων.

'Ως εἶδομεν εἰς τὰ προηγούμενα (§ 3.7, προτ. II), ἡ σχέσις
 $\equiv$ μεταξὺ τῶν παραστάσεων εἶναι αὐτοπαθής, συμμετρικὴ καί μετα-
 βατικὴ. 'Ως λέγομεν εἰς τὰ Μαθηματικά, εἶναι μία «σχέσις ἰσο-
 δυναμίας». Λόγῳ αὐτοῦ καί τοῦ κανόνος ἀντικαταστάσεως (§ 3.10),
 ἡ σχέσις αὕτη λέγομεν ὅτι παίζει τὸν ρόλον τῆς «λογικῆς ἰσότη-
 τος» μεταξὺ τῶν παραστάσεων. Καλεῖται δέ καί «λογικὴ ἰσότης».
 Πολλάκις μάλιστα, εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου δύο παραστάσεις P καί

Q είναι λογικώς ισοδύναμοι, ήτοι: $P \equiv Q$, λέγουμεν ότι αἱ P καὶ Q εἶναι λογικῶς ἴσαι ἢ ἀπλῶς ἴσαι.

Βάσει τῶν ἰδιοτήτων τῆς σχέσεως $\equiv$ καὶ γνωρίζοντες μερικὰς ἀπλᾶς ἰσοδυναμίας (ἰσότητας), δυνάμεθα πολλάκις, δοθείσης μιᾶς παραστάσεως P νά εὕρωμεν μίαν ἄλλην παράστασιν Q ἥτις:

α) νά εἶναι ἰσοδύναμος (ἴση) τῆς P καὶ

β) νά περιέχῃ ὀλιγωτέρους λογικοὺς συνδέσμους ἀπὸ τὴν P , δηλαδὴ, ὡς λέγομεν, νά εἶναι ἀπλουστέρας μορφῆς.

Ἡ ἐργασία αὕτη λέγεται «ἀπλοποιήσις» τῆς παραστάσεως P . Τό δέ σχετικόν μέρος τῆς Λογικῆς λέγεται **Ἀλγέβρα τῶν παραστάσεων**.

Διὰ νά ἀπλοποιήσωμεν μίαν παράστασιν, ὅπως εἴπομεν καὶ ἀνωτέρω, πρέπει νά γνωρίζωμεν ἕνα ἐπαρκές πλῆθος ἰσοδυναμιῶν (ἰσοτήτων). Διὰ νά τονίσωμεν τὴν σπουδαιότητα τῶν ἰσοδυναμιῶν αὐτῶν, τὰς ὁποίας θά ἴδωμεν εἰς τὴν ἐπομένην παράγραφον, τὰς καλοῦμεν **νόμους τῆς ἀλγέβρας τῶν παραστάσεων**.

3.12. Νόμοι τῆς ἀλγέβρας τῶν παραστάσεων.

— Νόμος διπλῆς ἀρνήσεως:

$$1. \quad \overline{\overline{p}} \equiv p$$

— Νόμοι ἀδύναμοι:

$$2\alpha. \quad p \vee p \equiv p$$

$$2\beta. \quad p \wedge p \equiv p$$

— Ἀντιμεταθετικοὶ νόμοι:

$$3\alpha. \quad p \vee q \equiv q \vee p$$

$$3\beta. \quad p \wedge q \equiv q \wedge p$$

— Προσεταιριστικοὶ νόμοι:

$$4\alpha. \quad p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

$$4\beta. \quad p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$$

— Ἐπιμεριστικοὶ νόμοι:

$$5\alpha. \quad p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$5\beta. \quad p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

— Νόμοι τοῦ de Morgan:

$$6\alpha. \quad \overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$$

$$6\beta. \quad \overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$$

— Νόμοι ἀντικαταστάσεως:

$$7\alpha. \quad p \Rightarrow q \equiv \overline{p} \vee q$$

$$7\beta. \quad p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

— Συμπληρωματικοὶ νόμοι:

$$8\alpha. \quad p \vee A \equiv A \quad 8\beta. \quad p \vee \Psi \equiv p \quad 8\gamma. \quad p \wedge A \equiv p \quad 8\delta. \quad p \wedge \Psi \equiv \Psi$$

$$9\alpha. \quad p \vee \overline{p} \equiv A \quad 9\beta. \quad p \wedge \overline{p} \equiv \Psi$$

$$10\alpha. \quad \overline{\overline{A}} \equiv A \quad 10\beta. \quad \overline{\Psi} \equiv A$$

Εἰς τοὺς τελευταίους νόμους, A παριστᾷ μίαν μεταβλητὴν δυ-

ναμένην νά αντικατασταθῇ μέ μίαν οἰανδήποτε ἀληθῆ πρότασιν καί Ψ παριστᾷ μίαν μεταβλητήν, δυναμένην νά αντικατασταθῇ μέ μίαν οἰανδήποτε ψευδῆ πρότασιν.

Τοὺς ἀνωτέρω νόμους 1 ἕως καί 7 εἴδομεν εἰς τὴν §2.5 ὑπὸ ἄλλην μορφήν, τοὺς δέ 8, 9 καί 10 δυνάμεθα νά ἐπαληθεύσωμεν εὐκόλως.

Κατωτέρω παραθέτομεν μερικὰς ἀκόμη ἰσοδυναμίας, χρησίμους διὰ τὴν ἀπλοποίησιν τῶν παραστάσεων:

$$11\alpha. p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

$$11\beta. p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

$$12\alpha. p \vee (\bar{p} \wedge q) \equiv p \vee q$$

$$12\beta. p \wedge (\bar{p} \vee q) \equiv p \wedge q$$

Αὗται προκύπτουν εὐκόλως ἐκ τῶν ἀνωτέρω νόμων. Πράγματι, ἔχομεν:

$$11\alpha: p \vee (p \wedge q) \equiv (p \wedge A) \vee (p \wedge q) \quad (N.8\gamma)$$

$$\equiv [p \wedge (q \vee \bar{q})] \vee (p \wedge q) \quad (N.9\alpha)$$

$$\equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q) \quad (N.5\beta)$$

$$\equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q}) \quad (N.2\alpha)$$

$$\equiv p \wedge (q \vee \bar{q}) \quad (N.5\beta)$$

$$\equiv p \wedge A \quad (N.9\alpha)$$

$$\equiv p \quad (N.8\gamma)$$

$$11\beta: p \wedge (p \vee q) \equiv (p \wedge p) \vee (p \wedge q) \quad (N.5\beta)$$

$$\equiv p \vee (p \wedge q) \quad (N.2\beta)$$

$$\equiv p \quad (\text{λόγω τοῦ προηγ.})$$

$$12\alpha: p \vee (\bar{p} \wedge q) \equiv (p \vee \bar{p}) \wedge (p \vee q) \quad (N.5\alpha)$$

$$\equiv A \wedge (p \vee q) \quad (N.9\alpha)$$

$$\equiv p \vee q. \quad (N.8\gamma)$$

$$12\beta: p \wedge (\bar{p} \vee q) \equiv (p \wedge \bar{p}) \vee (p \wedge q) \quad (N.5\beta)$$

$$\equiv \Psi \vee (p \wedge q) \quad (N.9\beta)$$

$$\equiv p \wedge q. \quad (N.8\beta)$$

3.13. Παραδείγματα ἐφαρμογῆς τῶν νόμων τῆς Ἀλγέβρας τῶν παραστάσεων.

Παράδειγμα 1. Νά ἀπλοποιηθῇ ἡ παράστασις:

$$\overline{p \vee q} \vee (\bar{p} \wedge q).$$

Ἔχομεν:

$$\overline{p \vee q} \vee (\bar{p} \wedge q) \equiv (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q) \quad (N.6\alpha)$$

$$\equiv \bar{p} \wedge (\bar{q} \vee q) \quad (N.5\beta)$$

$$\equiv \bar{p} \wedge A \quad (N.9\alpha)$$

$$\equiv \bar{p}. \quad (N.8\gamma)$$

Παράδειγμα 2. Νά δειχθῇ ὅτι:

$$(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r) \equiv p \Rightarrow (q \vee r).$$

"Εχομεν:

$$\begin{aligned}
 (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r) &\equiv (\bar{p} \vee q) \vee (\bar{p} \vee r) & (N.7\alpha) \\
 &\equiv [(\bar{p} \vee q) \vee \bar{p}] \vee r & (N.4\alpha) \\
 &\equiv [\bar{p} \vee (\bar{p} \vee q)] \vee r & (N.3\alpha) \\
 &\equiv [(\bar{p} \vee \bar{p}) \vee q] \vee r & (N.4\alpha) \\
 &\equiv (\bar{p} \vee q) \vee r & (N.2\alpha) \\
 &\equiv \bar{p} \vee (q \vee r) & (N.4\alpha) \\
 &\equiv p \Rightarrow (q \vee r). & (N.7\alpha)
 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3. Νά δειχθῇ ὅτι:

$$\vdash [(p \vee q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r).$$

"Εχομεν:

$$\begin{aligned}
 (p \vee q) \Rightarrow r &\equiv \overline{p \vee q} \vee r & (N.7\alpha) \\
 &\equiv (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee r & (N.6\alpha) \\
 &\equiv (\bar{p} \vee r) \wedge (\bar{q} \vee r) & (N.5\alpha) \\
 &\equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r). & (N.7\alpha)
 \end{aligned}$$

Επομένως:

$$(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$$

καὶ συνεπῶς: $\vdash [(p \vee q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r).$

3.14. Τύποι ἀντικαταστάσεως τῶν λογικῶν πράξεων.

Κάθε ἰσοδυναμία μεταξὺ μιᾶς παραστάσεως ἣτις περιέχει μίαν μόνον λογικὴν πράξιν καὶ μιᾶς ἄλλης παραστάσεως, ἣτις περιέχει ἓνα συνδυασμὸν ἄλλων λογικῶν πράξεων, λέγεται **τύπος ἀντικαταστάσεως** τῆς λογικῆς πράξεως τῆς ἐμφανιζομένης εἰς τὴν πρώτην παράστασιν. Π.χ. ἡ ἰσοδυναμία:

$$p \Rightarrow q \equiv \bar{p} \vee q$$

εἶναι ἓνας τύπος ἀντικαταστάσεως τῆς λογικῆς πράξεως $\Rightarrow$ διὰ τῶν πράξεων: $-$ καὶ $\vee$.

Αἱ λογικαὶ πράξεις δὲν εἶναι ἀνεξάρτητοι μεταξὺ των. Μερικαὶ ἐξ αὐτῶν δύνανται νὰ ἀντικαταστήσουν ὅλας τὰς ἄλλας.

1ον. Αἱ τρεῖς πράξεις: $-$, $\vee$, $\wedge$, δύνανται νὰ ἀντικαταστήσουν ὅλας τὰς ἄλλας.

Πράγματι, ἔχομεν:

$$\begin{aligned}
 1\alpha) \quad p \Rightarrow q &\equiv \bar{p} \vee q & (\S 3.12, N.7\alpha) \\
 &\equiv \overline{p \wedge \bar{q}}. & (\text{διατύ;}) \\
 1\beta) \quad p \Leftrightarrow q &\equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) & (\S 3.12, N.7\beta) \\
 &\equiv (\bar{p} \vee q) \wedge (\bar{q} \vee p) & (\text{διατύ;}) \\
 &\equiv (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}). & (\text{διατύ;})
 \end{aligned}$$

2ον. Αἱ δύο πράξεις: $-$, $\vee$, δύνανται νὰ ἀντικαταστήσουν ὅ-

λας τας άλλας.

Πράγματι, ἔχομεν:

$$2\alpha) \overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q} \quad (\S 3.12, N.6\beta)$$

καὶ συνεπῶς:

$$p \wedge q \equiv \overline{\overline{p} \vee \overline{q}}. \quad (\text{διατί;})$$

$$2\beta) p \Rightarrow q \equiv \overline{p} \vee q.$$

$$2\gamma) p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q}) \\ \equiv (\overline{\overline{p} \vee \overline{q}}) \vee (\overline{p \vee q}). \quad (\text{διατί;})$$

**3ον. Αἱ δύο πράξεις: $-$, $\wedge$, δύνανται νά ἀντικαταστήσουν ὅ-
λας τας άλλας.**

Πράγματι, ἔχομεν:

$$3\alpha) \overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q} \quad (\S 3.12, N.6\alpha)$$

καὶ συνεπῶς:

$$p \vee q \equiv \overline{\overline{p} \wedge \overline{q}}.$$

$$3\beta) p \Rightarrow q \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}.$$

$$3\gamma) p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \\ \equiv (\overline{p} \wedge \overline{q}) \wedge (\overline{q} \wedge \overline{p}).$$

3.15. Τύποι ἀρνήσεως τῶν λογικῶν πράξεων.

1). Ἐχομεν:

$$\overline{\overline{p}} \equiv p. \quad (\S 3.12, N.1)$$

2). Ἐχομεν:

$$\overline{\overline{p} \vee \overline{q}} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}. \quad (\S 3.12, N.6\alpha)$$

3). Ἐχομεν:

$$\overline{\overline{p} \wedge \overline{q}} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}. \quad (\S 3.12, N.6\beta)$$

4). Ἐχομεν:

$$p \Rightarrow q \equiv \overline{p} \vee q \quad (\S 3.12, N.7\alpha)$$

καὶ συνεπῶς:

$$\overline{p \Rightarrow q} \equiv \overline{\overline{p} \vee q} \quad (\text{διατί;})$$

$$\equiv \overline{\overline{p}} \wedge \overline{q} \quad (\text{διατί;})$$

$$\equiv p \wedge \overline{q}. \quad (\text{διατί;})$$

5). Ἐχομεν:

$$p \Leftrightarrow q \equiv (\overline{p} \vee q) \wedge (\overline{q} \vee p) \quad (\S 3.14, 1\beta)$$

καὶ συνεπῶς:

$$\overline{p \Leftrightarrow q} \equiv \overline{(\overline{p} \vee q) \wedge (\overline{q} \vee p)} \quad (\text{διατί;})$$

$$\equiv (\overline{\overline{p} \vee q}) \vee (\overline{\overline{q} \vee p}) \quad (\text{διατί;})$$

$$\equiv (p \wedge \overline{q}) \vee (q \wedge \overline{p}). \quad (\text{διατί;})$$

— Ἐχομεν, ἐπίσης:

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q}) \quad (\S 3.14, 1\beta)$$

καί συνεπώς:

$$\begin{aligned}\overline{p \Leftrightarrow q} &\equiv (\overline{p \wedge q}) \vee (\overline{\overline{p} \wedge \overline{q}}) && (\text{διατί;}) \\ &\equiv (\overline{p \wedge q}) \wedge (\overline{\overline{p} \wedge \overline{q}}) && (\text{διατί;}) \\ &\equiv (\overline{p} \vee \overline{q}) \wedge (p \vee q). && (\text{διατί;})\end{aligned}$$

— Έχομεν, ακόμη:

$$\begin{aligned}\overline{p \Leftrightarrow q} &\equiv (\overline{p} \vee \overline{q}) \wedge (p \vee q) \\ &\equiv (p \Rightarrow \overline{q}) \wedge (\overline{q} \Rightarrow p) \\ &\equiv p \Leftrightarrow \overline{q}. \\ \overline{p \Leftrightarrow q} &\equiv (\overline{p} \vee \overline{q}) \wedge (p \vee q) \\ &\equiv (q \Rightarrow \overline{p}) \wedge (\overline{p} \Rightarrow q) \\ &\equiv \overline{p} \Leftrightarrow q.\end{aligned}$$

Σημειώσεις. Τῇ βοηθείᾳ τῶν ἀνωτέρω ἰσοδυναμιῶν, οἱ ὅποιοι λέγονται καί «τύποι ἀρνήσεως τῶν λογικῶν πράξεων», δυνάμεθα, δοθεῖσης μιᾶς παραστάσεως, περιεχοῦσης καί τήν πρᾶξιν: —, νά εὕρωμεν μία ἰσοδύναμον παράστασιν, εἰς τήν ὁποῖαν τό σύμβολον τῆς ἀρνήσεως νά ἐμφανίζεται μόνον εἰς τὰς μεταβλητάς της (ἐάν, βεβαίως, δέν ἐξαλείφεται).

Παραδείγματα:

$$\begin{aligned}1ον. \quad \overline{\overline{p} \vee q} &\equiv \overline{\overline{p}} \wedge \overline{q} \\ &\equiv p \wedge \overline{q}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2ον. \quad \overline{(p \wedge q) \vee \overline{r}} &\equiv (\overline{p \wedge q}) \wedge \overline{\overline{r}} \\ &\equiv (\overline{p} \vee \overline{q}) \wedge r.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3ον. \quad \overline{(p \Rightarrow q \vee r) \wedge (p \wedge \overline{q})} &\equiv [\overline{p \wedge (q \vee r)}] \wedge (\overline{p} \vee \overline{\overline{q}}) \\ &\equiv [p \wedge (\overline{q} \wedge \overline{r})] \wedge (\overline{p} \vee q).\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

31. Δείξατε ὅτι: $\sim \vdash P$ καί $\sim \vdash Q$ ἐάν, καί μόνον ἐάν: $\sim \vdash P \vee Q$.

32. Δείξατε ὅτι: ἐάν $\sim \vdash P$ εἴτε $\sim \vdash Q$, τότε: $\sim \vdash P \wedge Q$.

33. Οἷασθήποτε οὐσης τῆς παραστάσεως Q , δείξατε ὅτι:

$$1) \vdash Q \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))].$$

$$2) \vdash p \wedge [q \Rightarrow (r \Rightarrow p)] \Rightarrow Q.$$

34. Δείξατε ὅτι: ἐάν ἡ παράστασις:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \Rightarrow (p \wedge r \Rightarrow q \wedge s)] \Rightarrow Q$$

εἶναι ταυτολογία, τότε καί ἡ παράστασις:

$$(p \vee q \Rightarrow r \wedge s) \Rightarrow Q$$

εἶναι ταυτολογία.

35. Δείξατε ὅτι: ἐάν ἡ παράστασις:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \Rightarrow Q] \Rightarrow R$$

εἶναι ταυτολογία, τότε καί ἡ παράστασις: $\overline{R} \Rightarrow Q$ εἶναι ταυτολογία.

36. Ἐστῶσαν, P καί Q δύο παραστάσεις, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ P δέν

περιέχει τόν σύνδεσμον: -. Δείξατε ὅτι: ἐάν $\vdash \bar{Q}$, τότε ὁ σύνδεσμος: - ἐμφανίζεται τουλάχιστον μίαν φοράν εἰς τήν Q. Ὁμοίως, ἐάν $\vdash Q \Leftrightarrow \bar{P}$.

37. Δείξατε ὅτι: ἐάν ἡ παράστασις:

$$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow p \wedge q)] \Rightarrow Q \wedge R$$

εἶναι ταυτολογία, τότε ἰσχύει ἡ ἐξῆς ἰσοδυναμία:

$$\bar{Q} \Rightarrow (p \Leftrightarrow q \vee r) \equiv (r \Rightarrow p \wedge q) \Rightarrow R.$$

38. Δείξατε ὅτι: ἐάν ἡ ἰσοδυναμία: $P \vee Q \equiv P$ ἰσχύη διὰ κάθε παράστασιν P, τότε ἡ παράστασις Q εἶναι αὐτοαντίφασις.

39. Δείξατε ὅτι:

1) $\vdash P \Rightarrow Q$ ἐάν, καί μόνον ἐάν: $P \vee Q \equiv Q$.

2) $\vdash P \Rightarrow Q$ ἐάν, καί μόνον ἐάν: $P \wedge Q \equiv P$.

3) $P \vee Q \equiv Q$ ἐάν, καί μόνον ἐάν: $P \wedge Q \equiv P$.

40. Δείξατε ὅτι: $P \vee Q \equiv P \wedge Q$ ἐάν, καί μόνον ἐάν: $P \equiv Q$.

41. Δείξατε ὅτι:

1) 'Εάν $\vdash P \Rightarrow Q$ καί $\vdash \bar{P} \Rightarrow Q$, τότε: $\vdash Q$.

2) 'Εάν $\vdash P \Rightarrow Q$ καί $\vdash P \Rightarrow \bar{Q}$, τότε: $\sim \vdash P$.

3) 'Εάν $\vdash P \Rightarrow Q$, τότε: $\sim \vdash P \wedge \bar{Q}$ καί ἀντιστρόφως.

42. Δείξατε ὅτι: ἐάν $P \wedge Q \equiv P \wedge R$ καί $P \vee Q \equiv P \vee R$, τότε $Q \equiv R$.

43. Δείξατε ὅτι ἡ παράστασις: $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\bar{p} \Rightarrow r)$ συνεπάγεται λογικῶς τήν παράστασιν: $(p \Rightarrow \bar{p}) \Rightarrow r$.

44. Δείξατε τάς κάτωθι ἰσοδυναμίας:

$$1) p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge \bar{r}) \Rightarrow \bar{q} \quad \parallel \quad 3) \bar{p} \vee \bar{q} \vee (\bar{p} \wedge q) \equiv \bar{p}$$

$$2) (\bar{p} \Rightarrow q) \vee (p \wedge q) \equiv p \vee q \quad \parallel \quad 4) p \wedge \bar{r} \Rightarrow \bar{q} \equiv p \wedge q \Rightarrow r$$

45. Δείξατε τάς κάτωθι ἰσοδυναμίας:

$$1) (p \vee q) \wedge (\bar{p} \vee r) \wedge (q \vee r) \equiv (p \vee q) \wedge (\bar{p} \vee r).$$

$$2) [(\bar{p} \wedge \bar{r}) \vee (\bar{p} \wedge q)] \wedge (p \vee r) \equiv p \wedge r.$$

$$3) [\bar{p} \vee (\bar{q} \wedge \bar{r})] \vee [\bar{p} \wedge ((\bar{p} \wedge r) \wedge (\bar{p} \wedge q))] \equiv p.$$

46. Δείξατε τάς κάτωθι ἰσοδυναμίας:

$$1) p \wedge \bar{q} \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \Rightarrow (q \vee s \Rightarrow r \wedge s)] \equiv \\ \equiv [(\bar{p} \vee q) \vee (p \wedge \bar{r})] \vee [(\bar{q} \wedge \bar{s}) \vee (r \wedge s)].$$

$$2) (p \Leftrightarrow q \wedge r) \Rightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow (r \Rightarrow p))] \equiv \\ \equiv (p \Leftrightarrow q \wedge r) \Rightarrow [\bar{p} \Rightarrow (p \Rightarrow q)].$$

$$3) p \wedge q \Rightarrow (r \Rightarrow \bar{p}) \Rightarrow r \equiv (r \Rightarrow p \vee q) \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \bar{q} \Rightarrow \bar{p})].$$

47. Νά ἀπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις:

$$\alpha) \overline{p \Leftrightarrow \bar{q}}. \quad \beta) \overline{\bar{p} \Leftrightarrow \bar{q}}. \quad \gamma) \overline{\bar{p} \Rightarrow \bar{q}}.$$

48. Νά ἀπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις:

$$1) (p \Rightarrow q) \vee \bar{p} \quad \parallel \quad 3) (q \Rightarrow p) \Rightarrow p$$

$$2) (p \Rightarrow q) \vee p \quad \parallel \quad 4) p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$$

- 5) $[(p \wedge q) \vee ((\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee q)] \wedge p$
- 6) $[p \vee (q \wedge r)] \vee [(q \wedge \bar{p}) \vee p]$
- 7) $(\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \bar{q} \wedge r)$
- 8) $[p \vee (q \Leftrightarrow \bar{p})] \Rightarrow \bar{q}.$

49. Νά απλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις:

- 1) $(p \vee s \Leftrightarrow \bar{q}) \wedge (r \vee q) \wedge \bar{s} \Rightarrow [(s \Rightarrow r \vee q) \vee p]$
- 2) $(p \Rightarrow q) \wedge (\overline{q \wedge r \vee p}) \wedge (\overline{r \wedge p})$
- 3) $[(p \Rightarrow r) \wedge s \Leftrightarrow \bar{r} \vee (\overline{r \Rightarrow q})] \wedge (q \Rightarrow \bar{p}) \wedge r$
- 4) $[(p \vee s \Leftrightarrow \bar{q}) \wedge (r \vee q)] \wedge \bar{s} \Rightarrow [(s \Rightarrow r \vee q) \vee p]$
- 5) $\overline{[(p \Rightarrow r) \wedge s \Leftrightarrow \bar{r} \vee (\overline{r \Rightarrow q})]} \wedge [(q \Rightarrow \bar{p}) \wedge r]$
- 6) $(p \Rightarrow q) \wedge [(\overline{q \wedge r \vee p}) \wedge (\overline{r \wedge p})]$

☆☆☆☆☆☆

Κεφάλαιον 4

ΚΑΝΟΝΙΚΑΙ ΜΟΡΦΑΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΣ

4.1. Διαζευκτικάί καί συζευκτικάί παραστάσεις.

Ἐάν εἰς μίαν παράστασιν μέ μεταβλητάς $P_1, P_2, \dots, P_n$ ἔμφανιζέται ἀποκλειστικῶς καί μόνον ὁ σύνδεσμος $\vee$, τότε, λόγῳ τῶν νόμων 2α καί 3α τῆς § 3.12, ἀλλάζοντες καθ'οἷονδήποτε τρόπον τήν τάξιν τῶν μεταβλητῶν προκύπτει μία παράστασις ἰσοδύναμος (ἴση) τῆς ἀρχικῆς. Λόγῳ αὐτοῦ μία τοιαύτη παράστασις δύναται νά συμβολίζεται μέ:

$$P_1 \vee P_2 \vee \dots \vee P_n.$$

Ὅμοιως, ἐάν εἰς μίαν παράστασιν μέ μεταβλητάς $P_1, P_2, \dots, P_n$ ἔμφανίζεται ἀποκλειστικῶς καί μόνον ὁ σύνδεσμος $\wedge$, τότε αὕτη (νόμοι 2β καί 3β, § 3.12) δύναται νά συμβολίζεται μέ:

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n.$$

— Γενικώτερον, ἐάν μία παράστασις κατασκευάζεται ἀναχωροῦντες ἀπό τὰς παραστάσεις $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$, χρησιμοποιοῦντες ἀποκλειστικῶς καί μόνον τόν σύνδεσμον $\vee$, τότε ἀλλάζοντες καθ'οἷονδήποτε τρόπον τήν τάξιν τῶν παραστάσεων αὐτῶν προκύπτει μία παράστασις ἰσοδύναμος (ἴση) τῆς ἀρχικῆς. Μία τοιαύτη παράστασις λέγεται **διαζευκτική παράστασις** καί συμβολίζεται μέ:

$$Q_1 \vee Q_2 \vee \dots \vee Q_n,$$

ὅπου αἱ παραθέσεις αἱ περικλείουσαι τὰς παραστάσεις $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$, αἱ ὁποῖαι λέγονται καί **ὄροι** αὐτῆς, ἔχουν παραληφθῇ.

Ὅμοιως, ἐάν μία παράστασις κατασκευάζεται ἀναχωροῦντες ἀπό τὰς παραστάσεις $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$, χρησιμοποιοῦντες ἀποκλειστικῶς καί μόνον τόν σύνδεσμον $\wedge$, τότε αὕτη λέγεται **συζευκτική παράστασις** καί δύναται νά συμβολίζεται μέ:

$$Q_1 \wedge Q_2 \wedge \dots \wedge Q_n,$$

αἱ δέ παραστάσεις $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ λέγονται πάλιν **ὄροι** αὐτῆς.

4.2. Ἐπέκτασις τῶν ἐπιμεριστικῶν νόμων.

Ἔχομεν (§ 3.12, Ν.5α καὶ 5β):

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad (1)$$

$$\text{καὶ } p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r). \quad (1')$$

— Ἔχομεν ἐπίσης:

$$p \vee (q \wedge r \wedge s) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (p \vee s) \quad (2)$$

$$\text{καὶ } p \wedge (q \vee r \vee s) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (p \wedge s). \quad (2')$$

Πράγματι:

$$\begin{aligned} p \vee (q \wedge r \wedge s) &\equiv p \vee [(q \wedge r) \wedge s] \\ &\equiv [p \vee (q \wedge r)] \wedge (p \vee s) \\ &\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (p \vee s). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p \wedge (q \vee r \vee s) &\equiv p \wedge [(q \vee r) \vee s] \\ &\equiv [p \wedge (q \vee r)] \vee (p \wedge s) \\ &\equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (p \wedge s). \end{aligned}$$

— Ἀνολόγως εὐρίσκομεν ὅτι:

$$p \vee (q \wedge r \wedge s \wedge t) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (p \vee t) \quad (3)$$

$$\text{καὶ } p \wedge (q \vee r \vee s \vee t) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (p \wedge t) \quad (3')$$

κ.λ.π.

Σημειώσεις. Εὐρίσκομεν εὐκόλως ὅτι:

$$(p \vee q) \wedge (r \vee s) \equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s) \quad (4)$$

$$\text{καὶ } (p \wedge q) \vee (r \wedge s) \equiv (p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s). \quad (4')$$

Ἐπίσης:

$$\begin{aligned} (p \wedge q) \vee (r \wedge s \wedge t) &\equiv \\ &\equiv (p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (p \vee t) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s) \wedge (q \vee t) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{καὶ } (p \vee q) \wedge (r \vee s \vee t) &\equiv \\ &\equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (p \wedge t) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s) \vee (q \wedge t) \end{aligned} \quad (5')$$

κ.λ.π.

4.3. Ἐπέκτασις τῶν νόμων τοῦ de Morgan.

Ἔχομεν (§ 3.12, Ν.6α καὶ 6β):

$$\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q} \quad (1)$$

$$\text{καὶ } \overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}. \quad (1')$$

— Ἔχομεν ἐπίσης:

$$\overline{p \vee q \vee r} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q} \wedge \overline{r} \quad (2)$$

$$\text{καὶ } \overline{p \wedge q \wedge r} \equiv \overline{p} \vee \overline{q} \vee \overline{r}. \quad (2')$$

Πράγματι:

$$\begin{aligned} \overline{p \vee q \vee r} &\equiv \overline{(p \vee q) \vee r} \\ &\equiv \overline{(p \vee q)} \wedge \overline{r} \\ &\equiv \overline{p} \wedge \overline{q} \wedge \overline{r}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{p \wedge q \wedge r} &\equiv (\overline{p \wedge q}) \wedge \overline{r} \\ &\equiv (\overline{p} \wedge \overline{q}) \wedge \overline{r} \\ &\equiv \overline{p} \wedge \overline{q} \wedge \overline{r}.\end{aligned}$$

Ανολόγως ευρίσκομεν ὅτι:

$$\overline{p \vee q \vee r \vee s} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q} \wedge \overline{r} \wedge \overline{s} \quad (3)$$

$$\text{καί} \quad \overline{p \wedge q \wedge r \wedge s} \equiv \overline{p} \vee \overline{q} \vee \overline{r} \vee \overline{s} \quad (3')$$

κ.λ.π.

4.4. Στοιχειώδεις διαζευκτικές και συζευκτικές παραστάσεις.

Ορισμός. Κάθε διαζευκτική - αντίστοιχως, συζευκτική - παράσταση (§ 4.1) με ὅρους τās μεταβλητās της ἢ καί τās ἀρνήσεις αὐτῶν, καλεῖται **στοιχειώδης διαζευκτική - αντίστοιχως, στοιχειώδης συζευκτική - παράσταση.**

Παραδείγματα:

1. Αἱ παραστάσεις:

$$p \vee \overline{p}, \overline{p} \vee q, p \vee q \vee r, p \vee \overline{q} \vee q \vee \overline{r}$$

εἶναι στοιχειώδεις διαζευκτικαί.

2. Αἱ παραστάσεις:

$$p \wedge \overline{p}, p \wedge \overline{q}, p \wedge q \wedge r, p \wedge \overline{p} \wedge q \wedge \overline{r}$$

εἶναι στοιχειώδεις συζευκτικαί.

— Συμφωνοῦμεν τώρα ὅτι: εἰς τās στοιχειώδεις διαζευκτικὰς, ὅπως καί εἰς τās στοιχειώδεις συζευκτικὰς παραστάσεις συμπεριλαμβάνονται καί αἱ (προτασιακαί) μεταβληταί καθὼς καί αἱ ἀρνήσεις των.

Πρότασις I. « Ἐάν μία στοιχειώδης διαζευκτική παράσταση περιέχῃ τουλάχιστον δύο ὅρους, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ ἓνας εἶναι ἡ ἀρνήσις τοῦ ἄλλου, τότε αὕτη εἶναι ταυτολογία ».

Πράγματι. Ἐάν ὑπάρχουν δύο τοιοῦτοι ὅροι, ἔστωσαν p καί $\overline{p}$, τότε ἡ παράσταση θά εἶναι τῆς μορφῆς:

$$p \vee \overline{p} \vee q \vee r \vee \dots \vee w$$

(οἱ ὅροι $q, r, \dots, w$ δυνατόν καί νά μήν ὑπάρχουν). Ἐπεὶ δὲ ὅμως ἡ παράσταση $p \vee \overline{p}$ εἶναι ταυτολογία, ἔπεται ὅτι ἡ θεωρουμένη παράσταση εἶναι ταυτολογία, οἷον δὴποτε ὄντων τῶν ὁρῶν $q, r, \dots, w$ (διατί;).

Πρότασις II. « Ἐάν εἰς μίαν στοιχειώδη διαζευκτικὴν παράστασιν δέν ὑπάρχουν δύο ὅροι, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ ἓνας νά εἶναι ἡ ἀρνήσις τοῦ ἄλλου, τότε ἡ παράσταση αὕτη δέν εἶναι ταυτολογία ».

Πράγματι. Τότε δυνάμεθα νά δώσωμεν τὴν τιμὴν ἀληθείας y εἰς ἐκάστην μεταβλητὴν, ἀνωθεν τῆς ὁποίας δέν ὑπάρχει ὁ σύνδεσμος — καί τὴν τιμὴν ἀληθείας x εἰς ἐκάστην μεταβλητὴν, ἀνωθεν τῆς ὁποίας ὑπάρχει τὸ σύμβολον τῆς ἀρνήσεως.

Αυτό είναι πάντοτε δυνατόν, διότι, έξ ύποθέσεως, εκάστη μεταβλητή δέν έμφανίζεται ταυτοχρόνως μέ τήν άρνησίη της. Έκαστος όρος τής παραστάσεως λαμβάνει τότε τήν τιμήν αληθείας γ καί συνεπώς ή έν λόγω παράστασις λαμβάνει τμήν αληθείας γ. Άρα, αύτη δέν είναι ταυτολογία.

Έκ τών δύο άνωτέρω προτάσεων εύρίσκομεν εύκόλως ότι ισχύει ή έξής

Πρότασις III. «Μία στοιχειώδης διαζευκτική παράστασις είναι ταυτολογία εάν, καί μόνον εάν, περιέχη τουλάχιστον δύο όρους, εκ τών οποίων ό ένας είναι ή άρνησις του άλλου».

— Άναλόγως εύρίσκομεν ότι ισχύουν καί αι κάτωθι προτάσεις:

Πρότασις IV. «Έάν μία στοιχειώδης συζευκτική παράστασις περιέχη τουλάχιστον δύο όρους, εκ τών οποίων ό ένας είναι ή άρνησις του άλλου, τότε αύτη είναι αυτοαντίφασις».

Πρότασις V. «Έάν εις μίαν στοιχειώδη συζευκτικήν παράστασιν δέν υπάρχουν δύο όροι, εκ τών οποίων ό ένας νά είναι ή άρνησις του άλλου, τότε ή παράστασις αύτη δέν είναι αυτοαντίφασις».

Πρότασις VI. «Μία στοιχειώδης συζευκτική παράστασις είναι αυτοαντίφασις εάν, καί μόνον εάν, περιέχη τουλάχιστον δύο όρους, εκ τών οποίων ό ένας είναι ή άρνησις του άλλου».

4.5. Κανονικαί διαζευκτικαί καί συζευκτικαί μορφαί παραστάσεως.

Όρισμός. Δοθείσης μιās παραστάσεως P κάθε ίσοδύναμος πρός αύτήν:

- 1) διαζευκτική παράστασις μέ όρους στοιχειώδεις συζευκτικώς παραστάσεις, καλεΐται «κανονική διαζευκτική μορφή» τής P,
- 2) συζευκτική παράστασις μέ όρους στοιχειώδεις διαζευκτικώς παραστάσεις, καλεΐται «κανονική συζευκτική μορφή» τής P.

Παραδείγματα:

1) Έκάστη τών κάτωθι παραστάσεων είναι υπό μίαν κανονικήν διαζευκτικήν μορφήν αύτής:

$$1\alpha. (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge r).$$

$$1\beta. (p \wedge q \wedge \bar{p}) \vee (\bar{q} \wedge r) \vee (p \wedge \bar{r}).$$

$$1\gamma. p \vee (p \wedge q \wedge r) \vee q \vee (\bar{p} \wedge r).$$

2) Έκάστη τών κάτωθι παραστάσεων είναι υπό μίαν κανονικήν συζευκτικήν μορφήν αύτής:

$$2\alpha. (p \vee \bar{q}) \wedge (q \vee r).$$

$$2\beta. (\bar{p} \vee q \vee r) \wedge (p \vee \bar{r}) \wedge (p \vee q \vee r).$$

$$2\gamma. p \wedge \bar{q} \wedge (p \vee q \vee \bar{r}) \wedge (\bar{p} \vee r).$$

— Συμφωνοῦμεν τώρα ὅτι:

α) Εἰς τὰς διαζευκτικὰς παραστάσεις μέ ὄρους στοιχειώδεις συζευκτικὰς παραστάσεις συμπεριλαμβάνονται καί αἱ στοιχειώδεις συζευκτικαί παραστάσεις.

β) Εἰς τὰς συζευκτικὰς παραστάσεις μέ ὄρους στοιχειώδεις διαζευκτικὰς παραστάσεις συμπεριλαμβάνονται καί αἱ στοιχειώδεις διαζευκτικαί παραστάσεις.

— Τῇ βοηθείᾳ τῶν τύπων ἀντικαταστάσεως (§ 3.14) καί τῶν τύπων ἀρνήσεως (§ 3.15) τῶν λογικῶν πράξεων δυνάμεθα, δοθείσης μιᾶς παραστάσεως, νά εὖρωμεν μίαν ἰσοδύναμον παράστασιν, ἥτις νά περιέχῃ ἀποκλειστικῶς καί μόνον τὰς πράξεις: $\vee$, $\wedge$, $-$, τῆς τελευταίας ἐμφανιζομένης μόνον εἰς τὰς μεταβλητάς της (§ 3.15, σημ.).

Οὕτω, τῇ βοηθείᾳ καί τῶν νόμων τῆς ἄλγεβρας τῶν παραστάσεων (§ 3.12), διὰ κάθε παράστασιν δυνάμεθα νά εὖρωμεν μίαν κανονικὴν διαζευκτικὴν, καθὼς καί μίαν κανονικὴν συζευκτικὴν μορφήν (βλέπε ἐπομένῃν παράγραφον).

4.6. Παραδείγματα ἐφαρμογῆς.

Αἱ κάτωθι παραστάσεις νά τεθοῦν ὑπὸ κανονικὴν διαζευκτικὴν καί συζευκτικὴν μορφήν:

$$1) \quad p \wedge (p \Rightarrow q).$$

— "Ἐχομεν:

$$p \wedge (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge (\bar{p} \vee q) \quad (\S 3.12, 7\alpha)$$

Ἡ δεξιὰ παράστασις εἶναι μίᾳ κανονικῇ συζευκτικῇ μορφῇ τῆς δοθείσης παραστάσεως.

— "Ἐχομεν ἐπίσης:

$$\begin{aligned} p \wedge (p \Rightarrow q) &\equiv p \wedge (\bar{p} \vee q) \\ &\equiv (p \wedge \bar{p}) \vee (p \wedge q) \quad (\S 3.12, 5\beta) \end{aligned}$$

Ἡ τελευταία παράστασις εἶναι μίᾳ κανονικῇ διαζευκτικῇ μορφῇ τῆς δοθείσης παραστάσεως.

$$2) \quad \overline{p \vee q} \Leftrightarrow p \wedge q.$$

— "Ἐχομεν:

$$\begin{aligned} \overline{p \vee q} \Leftrightarrow p \wedge q &\equiv [\overline{p \vee q} \wedge (p \wedge q)] \vee [\overline{p \vee q} \wedge \overline{p \wedge q}] \quad (\S 3.14, 1\beta) \\ &\equiv (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge p \wedge q) \vee [(p \vee q) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q})] \quad (\text{διετύ;}) \end{aligned}$$

καὶ ἐπειδὴ:

$$\begin{aligned} (p \vee q) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q}) &\equiv [(p \vee q) \wedge \bar{p}] \vee [(p \vee q) \wedge \bar{q}] \\ &\equiv (p \wedge \bar{p}) \vee (q \wedge \bar{p}) \vee (p \wedge \bar{q}) \vee (q \wedge \bar{q}), \end{aligned}$$

εὐρύσκομεν ὅτι:

$$\overline{p \vee q} \Leftrightarrow p \wedge q \equiv (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge p \wedge q) \vee (p \wedge \bar{p}) \vee (q \wedge \bar{p}) \vee (p \wedge \bar{q}) \vee (q \wedge \bar{q}).$$

Ἡ δεξιὰ παράστασις εἶναι μία κανονικὴ διαζευκτικὴ μορφή τῆς δοθείσης παραστάσεως.

— Ἐχομεν ἐπίσης:

$$\begin{aligned} \overline{p \vee q} &\Leftrightarrow p \wedge q \equiv [\overline{p \vee q} \vee (p \wedge q)] \wedge (\overline{p \wedge q} \vee \overline{p \vee q}) & (\S 3.14, 1\beta) \\ &\equiv [(p \vee q) \vee (p \wedge q)] \wedge [(\overline{p \vee q}) \vee (\overline{p \wedge q})] \\ &\equiv (p \vee q \vee p) \wedge (p \vee q \vee q) \wedge (\overline{p \vee q} \vee \overline{p}) \wedge (\overline{p \vee q} \vee \overline{q}). \end{aligned}$$

Ἡ τελευταία παράστασις εἶναι μία κανονικὴ συζευκτικὴ μορφή τῆς δοθείσης παραστάσεως.

● Σημειοῦμεν ὅτι δέν ὑπάρχει μία μόνον κανονικὴ διαζευκτικὴ ἢ συζευκτικὴ μορφή διὰ κάθε παράστασιν. Ἐφαρμοζόντες διαφοροτρόπως τοὺς ἐπιμεριστικούς νόμους (§ 3.12, 5α καὶ 5β), δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν διαφόρους κανονικὰς μορφάς. Ἐστω π.χ. ἡ παράστασις:

$$p \vee (q \wedge r).$$

Αὕτη εἶναι ὑπὸ μίαν κανονικὴν διαζευκτικὴν μορφήν. Ἐχομεν, ὁμως:

$$\begin{aligned} p \vee (q \wedge r) &\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) & (\S 3.12, 5\alpha) \\ &\equiv [(p \vee q) \wedge p] \vee [(p \vee q) \wedge r] & (\S 3.12, 5\beta) \\ &\equiv (p \wedge p) \vee (q \wedge p) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r). & (\S 3.12, 5\beta) \end{aligned}$$

Ἡ τελευταία παράστασις εἶναι ἐπίσης μία κανονικὴ διαζευκτικὴ μορφή τῆς παραστάσεως: $p \vee (q \wedge r)$.

Βεβαίως, αἱ διάφοροι κανονικαὶ μορφαὶ μιᾶς παραστάσεως δέν διαφέρουν μεταξύ των παρὰ μόνον ὡς πρὸς τὴν «ὄψιν», διότι αὐταὶ εἶναι ὅλοι ἰσοδύναμοι μεταξύ των.

Σημείωσις. Εὗς τὰ ἐπόμενα, μεταξύ τῶν κανονικῶν μορφῶν μιᾶς δοθείσης παραστάσεως, θὰ διακρίνωμεν τὰς καλουμένας «πλήρεις κανονικὰς διαζευκτικὰς καὶ συζευκτικὰς μορφάς».

4.7. Ἐλεγχος τοῦ εἴδους μιᾶς παραστάσεως διὰ τῶν κανονικῶν μορφῶν.

Ὡς εἴπομεν εἰς τὴν § 2.4 (σημ.), ὁ ἔλεγχος τοῦ εἴδους μιᾶς παραστάσεως (δηλαδή, ἐάν εἶναι ταυτολογία ἢ αὐτοαντίφασις ἢ σχετικὴ) διὰ τῶν πινάκων τιμῶν ἀληθείας δέν εἶναι πάντοτε εὐκόλος. Τό πρόβλημα αὐτό δύναται νὰ ἐπιλυθῇ εὐκολώτερον τῇ βοηθείᾳ τῶν κανονικῶν μορφῶν, στηριζόμενοι εἰς τὰ ἑξῆς δύο κριτήρια:

Κριτήριον I. «Μία παράστασις εἶναι ταυτολογία ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, ἕκαστος ὅρος μιᾶς (οἷα σδήποτε) κανονικῆς συζευκτικῆς τῆς μορφῆς περιέχῃ τουλάχιστον δύο ὅρους, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ ἓνας εἶναι ἡ ἄρνησις τοῦ ἄλλου».

Πράγματι. Ἐστω μία παράστασις P καὶ:

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \quad (1)$$

μιά κανονική συζευκτική μορφή αυτής, όπου $P_1, P_2, \dots, P_n$ είναι στοιχειώδεις διαζευκτικές παραστάσεις (οί όροι $P_2, \dots, P_n$ δυνατόν και να μη υπάρχουν). 'Η P είναι ταυτολογία, εάν, και μόνον εάν, η (1) είναι ταυτολογία. 'Η δέ (1) είναι ταυτολογία εάν, και μόνον εάν, έκαστος όρος αυτής $P_1, P_2, \dots, P_n$ είναι ταυτολογία (διατί;). Έκαστος όμως έξ αυτών των όρων είναι ταυτολογία εάν, και μόνον εάν, περιέχει τουλάχιστον δύο όρους, εκ των οποίων ο ένας είναι ή άρνησις του άλλου (§ 4.4, προτ. III).

'Αναλόγως ευρίσκομεν ότι ισχύει και τό έξής

Κριτήριο II. «Μία παράστασις είναι αυτοαντίφασις, εάν και μόνον εάν, έκαστος όρος μιās (οίασδήποτε) κανονικής διαζευκτικής της μορφής περιέχει τουλάχιστον δύο όρους, εκ των οποίων ο ένας είναι ή άρνησις του άλλου».

Ο έλεγχος τώρα του είδους μιās δοθείσης παραστάσεως P δύναται να γίνει ως έξής:

Θέτομεν την P υπό μίαν κανονικήν συζευκτικήν μορφήν. Έξ αυτής, βάσει του κριτηρίου I, βλέπομεν εάν ή P είναι ταυτολογία ή όχι. Εάν ή P δέν είναι ταυτολογία, τότε θέτομεν την P υπό μίαν κανονικήν διαζευκτικήν μορφήν. Έξ αυτής, βάσει του κριτηρίου II, βλέπομεν εάν ή P είναι αυτοαντίφασις ή όχι. Εάν ή P δέν είναι ούτε αυτοαντίφασις, τότε αυτή είναι σχετική.

Παραδείγματα.

Νά ευρεθί τό είδος έκάστης εκ των κάτωθι παραστάσεων:

$$1) \quad p \vee q \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow q].$$

Θέτομεν την παράστασιν αυτήν υπό μίαν κανονικήν συζευκτικήν μορφήν. 'Η παράστασις αυτή είναι ισοδύναμος της:

$$\begin{aligned} p \vee q &\Rightarrow [\overline{p} \vee q \Rightarrow q] && (\S 3.12, 7\alpha) \\ \equiv p \vee q \Rightarrow (\overline{p} \vee q) \vee q && (\S 3.12, 7\alpha) \\ \equiv p \vee q \Rightarrow (p \wedge \overline{q}) \vee q && (\S 3.12, 6\alpha) \\ \equiv (\overline{p} \vee \overline{q}) \vee [(p \vee q) \wedge (\overline{q} \vee q)] && (\S 3.12, 7\alpha \text{ και } 5\alpha) \\ \equiv [\overline{p} \vee \overline{q} \vee (p \vee q)] \wedge [\overline{p} \vee \overline{q} \vee (\overline{q} \vee q)] && (\S 3.12, 5\alpha) \\ \equiv [(\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee (p \vee q)] \wedge [(\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee (\overline{q} \vee q)] && (\S 3.12, 6\alpha) \\ \equiv (\overline{p} \vee p \vee q) \wedge (\overline{q} \vee p \vee q) \wedge (\overline{p} \vee \overline{q} \vee q) \wedge (\overline{q} \vee \overline{q} \vee q) && (\S 3.12, 5\alpha) \end{aligned}$$

'Η τελευταία παράστασις είναι μία κανονική συζευκτική μορφή της δοθείσης παραστάσεως. Βάσει δέ του κριτηρίου I αυτή είναι ταυτολογία.

$$2) \quad (p \vee q) \wedge (\overline{p} \vee q) \wedge \overline{q}.$$

Αυτή είναι υπό μίαν κανονικήν συζευκτικήν μορφήν και βάσει του κριτηρίου I δέν είναι ταυτολογία. Θέτομεν την παράστασιν αυτήν υπό μίαν κανονικήν διαζευκτικήν μορφήν. 'Η παράστασις αυτή είναι ισοδύναμος της:

$$[(p \vee q) \wedge (\overline{p} \vee q)] \wedge \overline{q}$$

$$\equiv [(p \wedge \bar{p}) \vee q] \wedge \bar{q} \quad (\S 3.12, 5\alpha)$$

$$\equiv (p \wedge \bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (q \wedge \bar{q}) \quad (\S 3.12, 5\beta)$$

Ἡ τελευταία παράσταση εἶναι μία κανονική διαζευκτική μορφή τῆς δοθείσης παραστάσεως. Βάσει δέ τοῦ κριτηρίου II, αὕτη εἶναι αὐτοαντίφασις.

$$3) \quad (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}).$$

Αὕτη εἶναι ὑπό μίαν κανονικήν διαζευκτικήν μορφήν καὶ βάσει τοῦ κριτηρίου II δέν εἶναι αὐτοαντίφασις. Θέτομεν τήν παράστασιν αὐτήν ὑπό μίαν κανονικήν συζευκτικήν μορφήν. Ἡ παράσταση αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος τῆς:

$$[(p \wedge q) \vee \bar{p}] \wedge [(p \wedge q) \vee \bar{q}] \quad (\S 3.12, 5\alpha)$$

$$\equiv (p \vee \bar{p}) \wedge (q \vee \bar{p}) \wedge (p \vee \bar{q}) \wedge (q \vee \bar{q}) \quad (\S 3.12, 5\alpha)$$

Ἡ τελευταία παράσταση εἶναι μία κανονική συζευκτική μορφή τῆς δοθείσης παραστάσεως. Βάσει δέ τοῦ κριτηρίου I δέν εἶναι οὔτε ταυτολογία. Ἀρα, ἡ δοθεῖσα παράσταση εἶναι σχετική.

4.8. Πλήρης κανονική διαζευκτική καὶ συζευκτική μορφή παραστάσεως.

Ὁρισμός. Καλοῦμεν **πλήρη** κανονικήν διαζευκτικήν - ἀντιστοιχῶς, συζευκτικήν - μορφήν μιᾶς παραστάσεως, τήν κανονικήν διαζευκτικήν - ἀντιστοιχῶς, συζευκτικήν - μορφήν αὐτῆς, ἥτις ἔχει τὰς ἐξῆς ιδιότητες:

α) Δέν περιέχει τοὺς ἰδίους ὅρους.

β) Ἐκαστος ὅρος δέν περιέχει τοὺς ἰδίους ὅρους.

γ) Ἐκαστος ὅρος δέν περιέχει ταυτοχρόνως μίαν μεταβλητὴν καὶ τὴν ἀρνησίῳ της.

δ) Ἐκαστος ὅρος περιέχει ἐκάστην μεταβλητὴν τῆς παραστάσεως ἢ τὴν ἀρνησίῳ της.

Παραδείγματα.

1) Ἐκάστη τῶν κάτωθι παραστάσεων εἶναι ὑπό τὴν πλήρη κανονικήν διαζευκτικήν μορφήν αὐτῆς:

$$1\alpha. \quad (p \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q}).$$

$$1\beta. \quad (p \wedge q \wedge \bar{r}) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \bar{q} \wedge \bar{r}).$$

$$1\gamma. \quad (\bar{p} \wedge q \wedge r \wedge \bar{E}) \vee (p \wedge \bar{q} \wedge r \wedge \bar{E}).$$

2) Ἐκάστη τῶν κάτωθι παραστάσεων εἶναι ὑπό τὴν πλήρη κανονικήν συζευκτικήν μορφήν αὐτῆς:

$$2\alpha. \quad (p \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q}).$$

$$2\beta. \quad (\bar{p} \vee \bar{q} \vee r) \wedge (\bar{p} \vee q \vee \bar{r}) \wedge (\bar{p} \vee q \vee r).$$

$$2\gamma. \quad (p \vee \bar{q} \vee \bar{r} \vee \bar{E}) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q} \vee r \vee \bar{E}).$$

3) Ἐκάστη τῶν κάτωθι παραστάσεων δέν εἶναι ὑπό τὴν πλήρη κανονικήν διαζευκτικήν οὔτε ὑπό τὴν πλήρη κανονικήν συζευκτικήν

μορφήν αὐτῆς:

$$3\alpha. (p \wedge \bar{p} \wedge q) \vee (p \wedge q).$$

$$3\beta. (p \wedge q) \vee \bar{p}.$$

$$3\gamma. (p \vee q \vee \bar{r}) \wedge (p \vee \bar{q}).$$

4.9. Εὑρεσις τῆς πλήρους κανονικῆς διαζευκτικῆς καὶ συζευκτικῆς μορφῆς μιᾶς παραστάσεως.

A) Διὰ νά εὐρωμεν τήν πλήρη κανονικὴν διαζευκτικὴν μορφήν μιᾶς παραστάσεως P , ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

1ον. Εὐρίσκομεν μίαν κανονικὴν διαζευκτικὴν μορφήν τῆς P . Ε-
στω:

$$P \equiv P_1 \vee P_2 \vee \dots \vee P_n,$$

ὅπου $P_1, P_2, \dots, P_n$ εἶναι στοιχειώδεις συζευκτικαὶ παραστάσεις ($P_1, P_2, \dots, P_n$ εἶναι οἱ ὅροι τῆς κανονικῆς αὐτῆς διαζευκτικῆς μορφῆς τῆς P).

2ον. Ἐάν ἓνας ὅρος, ἔστω ὁ P_1 , δέν περιέχῃ μίαν μεταβλητὴν, ἔστω t (τῆς παραστάσεως P), τότε ἀντικαθιστῶμεν τὸν ὅρον αὐτόν μέ τήν παράστασιν:

$$(t \wedge P_1) \vee (\bar{t} \wedge P_1),$$

$$\text{διότι: } (t \wedge P_1) \vee (\bar{t} \wedge P_1) \equiv (t \vee \bar{t}) \wedge P_1 \equiv P_1,$$

ἤτοι:

$$(t \wedge P_1) \vee (\bar{t} \wedge P_1) \equiv P_1 \quad (1)$$

Ἐργαζόμενοι κατ' αὐτόν τὸν τρόπον, δυνάμεθα νά μετασχηματίσωμεν τήν εὐρεθεῖσαν ἀνωτέρω κανονικὴν μορφήν (τῆς P), ὥστε ἕκαστος ὅρος αὐτῆς νά περιέχῃ ἐκάστην μεταβλητὴν (τῆς E) ἣ τήν ἄρνησίν της.

3ον. Ἐάν ἡ εὐρεθεῖσα κανονικὴ μορφή τῆς P περιέχῃ ἰδίους ὅρους, τότε παραλείπομεν αὐτούς μέ ἐξαίρεσιν ἑνός μόνον ἐξ αὐτῶν, ὁπότε προκύπτει πάλιν μία κανονικὴ διαζευκτικὴ μορφή τῆς P (διατί;).

4ον. Ἐάν εἷς τήν εὐρεθεῖσαν νέαν κανονικὴν μορφήν τῆς P , μερικοὶ ὅροι της περιέχουν τοὺς ἰδίους ὅρους, τότε παραλείπομεν αὐτούς (τοὺς ἰδίου ὅρους) μέ ἐξαίρεσιν ἑνός μόνον ἐξ αὐτῶν, ὁπότε προκύπτει ἐπίσης μία κανονικὴ διαζευκτικὴ μορφή τῆς P (διατί;).

5ον. Τέλος, ἐκ τῆς οὕτω εὐρεθείσης κανονικῆς μορφῆς τῆς P , παραλείπομεν τοὺς ὅρους της, οἱ ὅποιοι περιέχουν ταυτοχρόνως μίαν μεταβλητὴν καὶ τήν ἄρνησίν της. Ἐπειδὴ οἱ ὅροι αὐτοὶ εἶναι αὐτοαντιφάσεις (διατί;), ἡ ἐναπομείνουσα παράστασις εἶναι ἰσοδύναμος τῆς ἀρχικῆς (διατί;).

Ἡ οὕτως ἐπιτευχθεῖσα παράστασις εἶναι, προφανῶς, ἡ ζητούμενη πλήρης κανονικὴ διαζευκτικὴ μορφή τῆς P .

Εἰδική περίπτωση. Ἐάν ἕκαστος ὅρος τῆς ἐπιτευχθείσης εἰς τὸ 4ον βῆμα κανονικῆς διαζευκτικῆς μορφῆς τῆς P , περιέχῃ ταυτοχρόνως μίαν μεταβλητὴν καὶ τὴν ἀρνησίαν τῆς, τότε ἡ παράστασις P εἶναι αὐτοαντίφασις (§ 4.7, κριτ.ΙΙ) καὶ δέν ἔχει πλήρη διαζευκτικὴν μορφήν.

Σημειοῦμεν ὅτι δέν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ γινωρίζωμεν ἐκ τῶν προτέρων, ἐάν ἡ P εἶναι αὐτοαντίφασις ἢ ὄχι. Τοῦτο θὰ φανῇ, ἀφοῦ πραγματοποιήσωμεν τὸ πρῶτον βῆμα (§ 4.7, κριτ.ΙΙ), ὁπότε, ἐάν εἶναι αὐτοαντίφασις, δέν θὰ ἀναζητήσωμεν πλήρη κανονικὴν διαζευκτικὴν μορφήν αὐτῆς.

Σημείωσις I. Κάθε παράστασις, ἥτις δέν εἶναι αὐτοαντίφασις, ἔχει μίαν, καὶ μόνον μίαν, πλήρη κανονικὴν διαζευκτικὴν μορφήν, μὴ λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς τάξεως τῶν ὀρων.

Παράδειγμα 1. Ἡ παράστασις:

$$p \vee [q \wedge (p \vee \bar{q})]$$

 νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν πλήρη κανονικὴν διαζευκτικὴν τῆς μορφήν.

Ἡ δοθεῖσα παράστασις εἶναι ἰσοδύναμος τῆς:

$$\begin{aligned} & p \vee [(q \wedge p) \vee (q \wedge \bar{q})] \\ & \equiv p \vee (q \wedge p) \vee (q \wedge \bar{q}) \quad (1\text{ον βῆμα}) \end{aligned}$$

Ἐπειδὴ:

$$p \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q}),$$

ἡ τελευταία παράστασις εἶναι ἰσοδύναμος τῆς:

$$\begin{aligned} & (p \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q) \vee (q \wedge \bar{q}) \quad (2\text{ον βῆμα}) \\ & \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q}) \vee (q \wedge \bar{q}) \quad (3\text{ον βῆμα}) \\ & \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q}) \quad (5\text{ον βῆμα}) \end{aligned}$$

Οὕτω, ἡ πλήρης κανονικὴ διαζευκτικὴ μορφή τῆς δοθείσης παραστάσεως εἶναι ἡ:

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q}).$$

B) Διὰ νὰ εὗρωμεν τὴν πλήρη κανονικὴν συζευκτικὴν μορφήν μιᾶς παραστάσεως Q , ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

1ον. Εὐρίσκομεν μίαν κανονικὴν συζευκτικὴν μορφήν τῆς Q . "Ε-
 στω:

$$Q \equiv Q_1 \wedge Q_2 \wedge \dots \wedge Q_n,$$

ὅπου $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ εἶναι στοιχειώδεις διαζευκτικαὶ παραστάσεις ($Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ εἶναι οἱ ὅροι τῆς κανονικῆς αὐτῆς συζευκτικῆς μορφῆς τῆς Q).

2ον. Ἐάν ἓνας ὅρος, ἔστω Q_i , δέν περιέχῃ μίαν μεταβλητὴν, ἔστω t (τῆς παραστάσεως Q), τότε ἀντικαθιστῶμεν τὸν ὅρον αὐτόν

μέ την παράστασιν:

$$(t \vee Q_1) \wedge (\bar{E} \vee Q_1),$$

διότι: $(t \vee Q_1) \wedge (\bar{E} \vee Q_1) \equiv (t \wedge \bar{E}) \vee Q_1 \equiv Q_1,$

ήτοι:

$$(t \vee Q_1) \wedge (\bar{E} \vee Q_1) \equiv Q_1 \quad (2)$$

Ακολουθως, προχωρούμεν ως προηγουμένως (διὰ την εύρεσιν της πλήρους κανονικῆς διαζευκτικῆς μορφῆς), ἐκτελοῦντες τὰ ἀντίστοιχα βήματα 3, 4 καί 5.

Εἰδική περίπτωση. Ἐάν ἕκαστος ὅρος, τῆς ἐπιτευχθείσης εἰς τό 4ον βῆμα κανονικῆς συζευκτικῆς μορφῆς τῆς Q , περιέχῃ ταυτοχρόνως μίαν μεταβλητήν καί τήν ἀρνησίῳ της, τότε ἡ παράστασις Q εἶναι ταυτολογία (§ 4.7, κριτ. I) καί δέν ἔχῃ πλήρη κανονικὴν συζευκτικὴν μορφήν.

Ὡς καί προηγουμένως, δέν εἶναι ἀναγκαῖον νά γνωρίζωμεν ἐκ τῶν προτέρων ἐάν ἡ Q εἶναι ταυτολογία ἢ ὄχι. Τοῦτο θά φανῇ, ἀφοῦ πραγματοποιήσωμεν τό πρῶτον βῆμα (§ 4.7, κριτ. 1), ὁπότε, ἐάν εἶναι ταυτολογία, δέν θά ἀναζητήσωμεν πλήρη κανονικὴν συζευκτικὴν μορφήν αὐτῆς.

Σημείωσις II. Κάθε παράστασις, ἣτις δέν εἶναι ταυτολογία, ἔχει μίαν καί μόνον μίαν, πλήρη κανονικὴν συζευκτικὴν μορφήν, μὴ λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς τάξεως τῶν ὀρων.

Παράδειγμα 2. Ἡ παράστασις:

$$[(p \vee q) \wedge (\bar{q} \vee r)] \vee [(p \vee \bar{q}) \wedge (q \vee r)]$$

νά τεθῇ ὑπὸ τὴν πλήρη κανονικὴν συζευκτικὴν της μορφήν.

Ἡ δοθεῖσα παράστασις εἶναι ἰσοδύναμος τῆς:

$$[(p \vee q) \wedge (\bar{q} \vee r)] \vee [(p \vee \bar{q}) \wedge (q \vee r)]$$

$$\equiv (p \vee q \vee p \vee \bar{q}) \wedge (\bar{q} \vee r \vee p \vee \bar{q}) \wedge (p \vee q \vee q \vee r) \wedge (\bar{q} \vee r \vee q \vee r).$$

Παραλείποντες τώρα τοὺς ὀρους, οἱ ὅποιοι εἶναι ταυτολογίαι καί ἀπὸ τοὺς ὑπολοίπους τοὺς διπλοῦς ὀρους, ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμον παράστασιν:

$$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \bar{q} \vee r),$$

ἣτις εἶναι ἡ ζητούμενη πλήρης κανονικὴ συζευκτικὴ μορφή τῆς δοθείσης παραστάσεως.

4.10. Κριτήριον ἰσοδυναμίας δύο παραστάσεων.

Αἱ πλήρεις κανονικαὶ μορφαὶ μᾶς παρέχουν ἓν κριτήριον ἰσοδυναμίας δύο παραστάσεων.

Ἐστῶσαν P καί Q δύο παραστάσεις. Κατ' ἀρχήν, οἷαιδήποτε καί ἐάν εἶναι αἱ P καί Q , δυνάμεθα νά ὑποθέτωμεν πάντοτε ὅτι περιέχουν τὰς ἰδίας μεταβλητάς. Πράγματι, ἐάν π.χ. ἡ P δέν περιέχῃ τὴν μεταβλητὴν t τῆς Q , τότε ἀντὶ τῆς P δυνάμεθα νά θεωρῶμεν τὴν

ίσοδύναμον πρὸς αὐτὴν παράστασιν: $P \vee (t \wedge \bar{t})$ - ἢ τὴν $P \wedge (t \vee \bar{t})$ - ἢ τις περιέχει τὴν μεταβλητὴν t . Ἀκολουθῶς, θέτομεν ἐκάστην τῶν παραστάσεων P καὶ Q ὑπὸ τὴν πλήρη κανονικὴν διαζευκτικὴν - ἢ συζευκτικὴν - τῆς μορφῆς. Λόγῳ τῆς μοναδικότητος τῆς πλήρους κανονικῆς διαζευκτικῆς καὶ συζευκτικῆς μορφῆς μιᾶς παραστάσεως, ἔχομεν τὸ ἑξῆς:

Κριτήριον ἰσοδυναμίας δύο παραστάσεων: Αἱ P καὶ Q εἶναι ἰσοδύναμοι, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, αἱ πλήρεις κανονικαὶ διαζευκτικαὶ ἢ συζευκτικαὶ - μορφαὶ αὐτῶν, ταυτίζονται.

Πῶς θὰ σκεφθῶμεν ἐάν μία τουλάχιστον ἐκ τῶν P καὶ Q εὐρεθῇ ταυτολογία ἢ αὐτοαντίφασις;

Παράδειγμα 1. Νά ἐξετασθῇ ἐάν αἱ κάτωθι δύο παραστάσεις εἶναι ἰσοδύναμοι:

$$p \vee [q \wedge (p \vee \bar{q})], \quad [p \vee (\bar{p} \Rightarrow \bar{q})] \wedge [q \vee (p \wedge \bar{q})].$$

Θέτομεν ἐκάστην ἐξ αὐτῶν ὑπὸ τὴν πλήρη κανονικὴν συζευκτικὴν τῆς μορφῆς.

Ἡ πρώτη παράστασις εἶναι ἰσοδύναμος τῆς:

$$(p \vee q) \wedge [p \vee (p \vee \bar{q})]$$

$$\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee \bar{q}).$$

Ἡ δευτέρα παράστασις εἶναι ἰσοδύναμος τῆς:

$$[p \vee (p \wedge \bar{q})] \wedge [q \vee (p \wedge \bar{q})]$$

$$\equiv (p \vee p) \wedge (p \vee \bar{q}) \wedge (q \vee p) \wedge (q \vee \bar{q})$$

$$\equiv p \wedge (p \vee \bar{q}) \wedge (p \vee q)$$

$$\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee \bar{q}) \wedge (p \vee \bar{q}) \wedge (p \vee q)$$

$$\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee \bar{q}).$$

Βλέπομεν ὅτι αἱ πλήρεις κανονικαὶ συζευκτικαὶ μορφαὶ τῶν δοθεισῶν παραστάσεων ταυτίζονται. Ἀρα, αὗται εἶναι ἰσοδύναμοι.

Παράδειγμα 2. Νά ἐξετασθῇ ἐάν αἱ κάτωθι δύο παραστάσεις εἶναι ἰσοδύναμοι:

$$(p \Rightarrow q) \vee (\bar{p} \wedge q), \quad (p \Leftrightarrow q) \vee (\bar{p} \Rightarrow \bar{q}).$$

Θέτομεν ἐκάστην ἐξ αὐτῶν ὑπὸ τὴν πλήρη κανονικὴν διαζευκτικὴν τῆς μορφῆς. Ἡ πρώτη εἶναι ἰσοδύναμος τῆς:

$$\bar{p} \vee q \vee (\bar{p} \wedge q)$$

$$\equiv (\bar{p} \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (q \wedge p) \vee (q \wedge \bar{p}) \vee (\bar{p} \wedge q)$$

$$\equiv (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q).$$

Ἡ δευτέρα εἶναι ἰσοδύναμος τῆς:

$$(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge \bar{q}).$$

Βλέπομεν ὅτι αἱ πλήρεις κανονικαὶ διαζευκτικαὶ μορφαὶ τῶν δοθεισῶν παραστάσεων δὲν ταυτίζονται. Ἀρα, βάσει τοῦ ἀνωτέρω κριτηρίου, αὗται δὲν εἶναι ἰσοδύναμοι.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

50. Ἐκάστη ἐκ τῶν κάτωθι παραστάσεων νά τεθῇ ὑπό μίαν κανονικήν διαζευκτικήν καί ὑπό μίαν κανονικήν συζευκτικήν μορφήν:

- | | |
|---|---|
| 1) $p \Leftrightarrow (q \wedge \bar{p})$
2) $(p \Rightarrow q) \vee (\bar{p} \wedge r)$
3) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$
4) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
5) $[(p \wedge r) \Rightarrow q] \wedge \bar{r}$
11) $(p \wedge q) \vee \bar{r} \Rightarrow [(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))]$
12) $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \wedge (p \Rightarrow q) \wedge \bar{p} \Rightarrow \bar{r}$ | 6) $[(\bar{p} \Leftrightarrow q) \vee r] \wedge (p \wedge \bar{q})$
7) $[(p \Rightarrow \bar{q}) \wedge r] \vee (\bar{p} \Leftrightarrow r)$
8) $p \wedge \bar{q} \Rightarrow (\bar{p} \Leftrightarrow q)$
9) $(p \vee q \Rightarrow \bar{r}) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q \wedge r)$
10) $(p \Leftrightarrow q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge \bar{q} \Rightarrow r)$ |
|---|---|

51. Νά εὐρεθῇ διὰ τῶν κανονικῶν μορφῶν, τό εἶδος ἐκάστης ἐκ τῶν κάτωθι παραστάσεων (δηλαδή, νά εὐρεθῇ ἐάν εἶναι ταυτολογία ἢ αὐτοαντίφασις ἢ σχετική):

- 1) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow p)]$
- 2) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)]$
- 3) $p \vee q \Rightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow p \wedge q)]$
- 4) $p \wedge r \Rightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow (r \Rightarrow p))]$
- 5) $p \wedge \bar{p} \Rightarrow \bar{q}$
- 6) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge \bar{p} \Rightarrow \bar{r}$
- 7) $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \wedge \bar{p}$
- 8) $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \wedge r \Rightarrow \bar{q} \wedge r)$
- 9) $\bar{p} \Rightarrow \bar{q} \Rightarrow \bar{p} \wedge \bar{r}$
- 10) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(r \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \Rightarrow r) \Rightarrow q)]$.

52. Ἐκάστη ἐκ τῶν κάτωθι παραστάσεων νά τεθῇ ὑπό τήν πλήρη κανονικήν διαζευκτικήν της μορφήν:

- | | |
|---|---|
| 1) $(p \vee q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow q]$
2) $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$
3) $(p \wedge q) \vee [(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \vee q]$ | 4) $[(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow r] \wedge (p \Rightarrow r)$
5) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [\bar{q} \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$
6) $\bar{p} \Rightarrow \bar{q} \wedge \bar{r} \wedge (q \Rightarrow r)$ |
|---|---|

53. Ἐκάστη ἐκ τῶν κάτωθι παραστάσεων νά τεθῇ ὑπό τήν πλήρη κανονικήν συζευκτικήν της μορφήν:

- | | |
|--|---|
| 1) $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow \bar{p}] \Rightarrow p$
2) $(p \Rightarrow q) \wedge [(\bar{p} \Rightarrow q) \Leftrightarrow \bar{q}]$
3) $[(p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \Rightarrow r)] \Leftrightarrow q \vee \bar{r}$ | 4) $(p \vee q \Leftrightarrow p \wedge r) \Rightarrow [p \wedge \bar{r} \Rightarrow q]$
5) $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \wedge q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
6) $(p \Leftrightarrow \bar{q}) \Leftrightarrow [p \wedge \bar{r} \Rightarrow q]$ |
|--|---|

54. Ἀποδείξατε ὅτι ἡ πλήρης κανονική συζευκτική μορφή τῆς παραστάσεως:

$$[p \vee ((q \vee r) \wedge (\bar{q} \wedge r))] \wedge [p \wedge ((q \vee r) \wedge (\bar{q} \wedge \bar{r}))] \quad (1)$$

εἶναι ἡ ἑξῆς:

$$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \bar{q} \vee \bar{r}) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q} \vee r) \wedge (\bar{p} \vee q \vee \bar{r}).$$

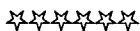
Ακολουθώντας, εύρετε την πλήρη κανονική συζευκτική μορφή της παραστάσεως:

$$[(p \vee q) \wedge (\overline{p} \wedge \overline{q})] \vee r] \wedge [(p \vee q) \wedge (\overline{p} \wedge \overline{q}) \wedge r]. \quad (2)$$

Τί συμπεραίνετε διά τας παραστάσεις (1) και (2);

55. Νά εξετασθῇ, διά τῶν πλήρων κανονικῶν μορφῶν, ἐάν αἱ κάτωθι παραστάσεις εἶναι ἰσοδύναμοι:

- | | |
|---|---|
| 1) $p \wedge [\overline{q} \vee (p \wedge q)]$ | καί $(p \Rightarrow \overline{q}) \vee (q \Rightarrow p)$ |
| 2) $p \vee q \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow q]$ | καί $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow r] \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ |
| 3) $p \Rightarrow [(p \wedge q) \Leftrightarrow q]$ | καί $p \Rightarrow [q \Rightarrow (r \Rightarrow p)]$ |
| 4) $(p \Leftrightarrow q \vee r) \wedge p$ | καί $\overline{p} \vee q \Rightarrow \overline{r}$ |



Κεφάλαιον 5

ΔΙΑΛΟΓΙΣΜΟΙ

5.1. Έπιχείρημα. Διαλογισμός. Συλλογισμός.

Έπιχείρημα καλεῖται μία ὁμάς (προτασιακῶν) παραστάσεων ἢ προτάσεων, ἐκ τῶν ὁποίων ἢ μία, καλουμένη **συμπέρασμα** ἀκολουθεῖ τὰς ἄλλας, καλουμένας **ὕποθέσεις**.

Ἐν ἐπιχείρημα μέ ὑποθέσεις $P_1, P_2, \dots, P_n$ καί συμπέρασμα Q συμβολίζεται ὡς ἐξῆς:

$$P_1, P_2, \dots, P_n \therefore Q$$

καί διαβάζεται:

$$\ll P_1, P_2, \dots, P_n \text{ ἀκολουθεῖ } Q \gg.$$

— Ἡ νοητική ἐνέργεια, διὰ τῆς ὁποίας καταστρώνεται ἓν ἐπιχείρημα, καλεῖται **διαλογισμός**. Πολλὰς φορές ὅμως ὁ ὅρος «διαλογισμός» χρησιμοποιεῖται ἀντὶ τοῦ ὅρου «ἐπιχείρημα».

— Κάθε διαλογισμός, ἀποτελούμενος ἐκ δύο ὑποθέσεων καί τοῦ συμπεράσματος, λέγεται καί **συλλογισμός**.

Π.χ. ὁ διαλογισμός:

$$p \Rightarrow q, q \Rightarrow r \therefore p \Rightarrow r$$

εἶναι ἓνας συλλογισμός, ὅστις μάλιστα καλεῖται καί **ὕποθετινός συλλογισμός**.

5.2. Ἡ ἔννοια τοῦ ἰσχυροῦ διαλογισμοῦ ἐπὶ παραστάσεων⁽¹⁾.

Ἐνας διαλογισμός ἐπὶ παραστάσεων λέγομεν ὅτι εἶναι **ἰσχυρός** ἐάν, καί μόνον ἐάν, τό συμπέρασμά του, λαμβάνη τιμὴν ἀληθείας α διὰ κάθε συνδυασμὸν τῶν τιμῶν ἀληθείας τῶν μεταβλητῶν του⁽²⁾, διὰ τὸν ὁποῖον ὅλαι αἱ ὑποθέσεις του λαμβάνουν τιμὴν ἀληθείας α. Εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν ὁ διαλογισμός λέγομεν ὅτι εἶναι **ἀνί-**

(1) Δηλαδή, τοῦ ὁποίου αἱ ὑποθέσεις καί τό συμπέρασμα εἶναι (προτασιακαί) παραστάσεις.

(2) Δηλαδή, τῶν μεταβλητῶν, αἱ ὁποῖαι ἐμφανίζονται εἰς τὰς παραστάσεις τοῦ διαλογισμοῦ.

σχυρός (μή ισχυρός).

Ένας ισχυρός διαλογισμός: $P_1, P_2, \dots, P_n \therefore Q$ συμβολίζεται με:

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$$

καί διαβάζεται:

$\langle\langle P_1, P_2, \dots, P_n \text{ παράγουν } Q \rangle\rangle$

ή $\langle\langle P_1, P_2, \dots, P_n \text{ ὅθεν (ἢ ἄρα) } Q \rangle\rangle$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου: $P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$ λέγομεν ἀκόμη ὅτι ἡ Q εἶναι μία **ισχυρά συνέπεια** τῶν $P_1, P_2, \dots, P_n$.

— Μὲ τοὺς πίνακας τιμῶν ἀληθείας, ἕνας διαλογισμός: $P_1, P_2, \dots, P_n \therefore Q$ εἶναι **ισχυρός**, σημαίνει ὅτι: ἐάν κατασκευάσωμεν ἕνα πίνακα, εἰς τὸν ὁποῖον νά ἐμφαίνηται ἡ τιμὴ ἀληθείας, τὴν ὁποίαν λαμβάνει ἐκάστη ἐκ τῶν παραστάσεων: $P_1, P_2, \dots, P_n$ καὶ Q δι' ὅλους τοὺς δυνατοὺς συνδυασμοὺς τῶν τιμῶν ἀληθείας τῶν μεταβλητῶν των, τότε ἡ Q λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α τουλάχιστον εἰς ἐκάστην γραμμὴν, εἰς τὴν ὁποίαν αἱ: $P_1, P_2, \dots, P_n$ λαμβάνουν ταυτοχρόνως τιμὴν ἀληθείας α. Εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν, δηλαδή ἐάν ὑπάρχη γραμμὴ, εἰς τὴν ὁποίαν αἱ $P_1, P_2, \dots, P_n$ λαμβάνουν ταυτοχρόνως τιμὴν ἀληθείας α καὶ ἡ Q γ, τότε ὁ διαλογισμός εἶναι **ἀνίσχυρος**.

Παράδειγμα 1. Ὁ διαλογισμός:

$$p \vee q, p \Rightarrow r, \bar{q} \therefore r$$

εἶναι **ισχυρός**, ἥτοι:

$$p \vee q, p \Rightarrow r, \bar{q} \vdash r.$$

Πράγματι, ἐκ τοῦ παραπλεύρως πίνακος βλέπομεν ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅπου αἱ τιμαὶ ἀληθείας τῶν

$$p \vee q, p \Rightarrow r, \bar{q}$$

εἶναι ταυτοχρόνως α (γραμμὴ τρίτη), τότε ἡ τιμὴ ἀληθείας τῆς r εἶναι ἐπίσης α.

p	q	r	$p \vee q$	$p \Rightarrow r$	$\bar{q}$
α	α	α	α	α	γ
α	α	γ	α	γ	γ
α	γ	α	α	α	α
α	γ	γ	α	γ	α
γ	α	α	α	α	γ
γ	α	γ	α	α	γ
γ	γ	α	γ	α	α
γ	γ	γ	γ	α	α

Παράδειγμα 2. Ὁ διαλογισμός:

$$p \Rightarrow q, q \therefore p$$

εἶναι **ἀνίσχυρος**.

Πράγματι, ἐκ τοῦ παραπλεύρως πίνακος βλέπομεν ὅτι ὑπάρχει περίπτωσις (γραμμὴ τρίτη), εἰς τὴν ὁποῖαν αἱ $p \Rightarrow q$ καὶ q λαμβάνουν τιμὴν ἀληθείας α, ἐνῶ (ταυτοχρόνως) ἡ p λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας γ.

p	q	$p \Rightarrow q$
α	α	α
α	γ	γ
γ	α	α
γ	γ	α

5.3. Διαλογισμοί επί παραστάσεων και ταυτολογίας.

Πρότασις I. $\ll P \vdash Q$ εάν, και μόνον εάν:

$$\vdash P \Rightarrow Q \quad \gg.$$

Πράγματι. $P \vdash Q$ εάν και μόνον εάν, ή Q λαμβάνη τιμήν αληθείας α διὰ κάθε συνδυασμόν τῶν τιμῶν αληθείας τῶν μεταβλητῶν τῶν P καὶ Q , διὰ τὸν ὅποιον ή P λαμβάνει τιμήν αληθείας α . Τοῦτο ὅμως συμβαίνει, εάν, και μόνον εάν: $\vdash P \Rightarrow Q$ (§ 3.4).

Πρότασις II. $\ll P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$ εάν, και μόνον εάν:

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \vdash Q \quad \gg.$$

Πράγματι. $P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$ εάν, και μόνον εάν, ή Q λαμβάνη τιμήν αληθείας α διὰ κάθε συνδυασμόν τῶν τιμῶν αληθείας τῶν μεταβλητῶν τῶν $P_1, P_2, \dots, P_n$ καὶ Q , διὰ τὸν ὅποιον ἐκάστη τῶν $P_1, P_2, \dots, P_n$ λαμβάνει τιμήν αληθείας α .

Τοῦτο ὅμως συμβαίνει εάν, και μόνον εάν, ή Q λαμβάνη τιμήν αληθείας α διὰ κάθε συνδυασμόν τῶν ἐν λόγῳ μεταβλητῶν, διὰ τὸν ὅποιον ή παράστασις: $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n$ λαμβάνει τιμήν αληθείας α (διατί;). Τό δέ τελευταῖον συμβαίνει, εάν και μόνον εάν: $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \vdash Q$. (διατί;)

Πρότασις III. $\ll P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$ εάν, και μόνον εάν:

$$\vdash P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \Rightarrow Q \quad \gg.$$

Πράγματι. $P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$ εάν, και μόνον εάν: $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \vdash Q$ (προηγούμενη πρότασις). Ἀλλά: $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \vdash Q$, εάν, και μόνον εάν: $\vdash P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \Rightarrow Q$ (ἀνωτέρω πρότασις I).

— Μία ἄμεσος συνέπεια τῆς τελευταίας προτάσεως και τοῦ κανόνος ἀντικαταστάσεως μεταβλητῶν (§ 3.8), εἶναι ή ἐξῆς

Πρότασις IV. $\ll$ Εάν:

$$P_1(p, q, \dots), P_2(p, q, \dots), \dots, P_n(p, q, \dots) \vdash Q(p, q, \dots),$$

τότε:

$$P_1(p', q', \dots), P_2(p', q', \dots), \dots, P_n(p', q', \dots) \vdash Q(p', q', \dots),$$

οἷωνδήποτε οὐσῶν τῶν παραστάσεων $p', q', \dots$ » (διατί;).

— Μία ἄλλη ἄμεσος συνέπεια τῆς προτάσεως III και τοῦ κανόνος ἀντικαταστάσεως (§ 3.10) εἶναι ή ἐξῆς

Πρότασις V. $\ll$ Ἐστω ἓνας διαλογισμός

$$P_1, P_2, \dots, P_n \therefore Q \quad (1)$$

και

$$P'_1, P'_2, \dots, P'_n \therefore Q' \quad (2),$$

ὁ διαλογισμός, ὅστις προκύπτει ἐκ τοῦ (1) ὅταν ἀντικαταστή-
σωμεν εἰς αὐτόν μίαν ἢ περισσοτέρας παραστάσεις του $(P_1, P_2, \dots, P_n, Q)$ μέ ἄλλας ἰσοδυνάμους των.

Ἐάν ὁ διαλογισμός (1) εἶναι ἰσχυρός, τότε και ὁ διαλογισμός (2) εἶναι ἰσχυρός και ἀντιστρόφως». (διατί;)

Παράδειγμα 1. $p, p \Rightarrow q \vdash q$.

Πράγματι, διότι:

$$\vdash p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q. \quad (\S 2.5)$$

Παράδειγμα 2. $p \Rightarrow q, \bar{q} \vdash \bar{p}$.

Πράγματι, διότι:

$$\vdash (p \Rightarrow q) \wedge q \Rightarrow p. \quad (\S 2.5)$$

Παράδειγμα 3. $p \Rightarrow q, q \Rightarrow r \vdash p \Rightarrow r$.

Πράγματι, διότι:

$$\vdash (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r). \quad (\S 2.5)$$

Σημειώσεις. Αί προηγούμεναι προτάσεις δεικνύουν την μεταξύ διαλογισμών και ταυτολογιών ύπαρχουσάν σχέσιν, έξ οῦ καί ἡ σπουδαιότης τῶν ταυτολογιῶν εἰς τήν Μαθηματικὴν λογικὴν.

5.4. Στοιχειώδεις ἰσχυροὶ διαλογισμοί.

Κατωτέρω ἀναφέρομεν μερικοὺς ἰσχυροὺς διαλογισμοὺς «στοιχειώδους μορφῆς». Ἡ ἰσχυρότης ἐκάστου ἐξ αὐτῶν διαπιστοῦται εὐκόλως.

1. Ἀποσπάσεως ἢ Modus ponens (m.p.):

$$p, p \Rightarrow q \vdash q.$$

2. Ἀρνητικῆς μορφῆς ἢ Modus tollens (m.t.):

$$p \Rightarrow q, \bar{q} \vdash \bar{p}.$$

3. Ὑποθετικὸς συλλογισμὸς (ὕπ.συλ.):

$$p \Rightarrow q, q \Rightarrow r \vdash p \Rightarrow r.$$

4. Διαζευκτικὸς συλλογισμὸς (διαζ.συλ.):

$$p \vee q, \bar{p} \vdash q.$$

5. Δημιουργικὸν δίλημμα (δημ.δίλ.):

$$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow t), p \vee r \vdash q \vee t.$$

6. Ἀπορρόφητικὸς (ἀπορ.):

$$p \Rightarrow q \vdash p \Rightarrow p \wedge q.$$

7. Ἀπλουστευτικὸς (ἀπλουστ.):

$$p \wedge q \vdash p.$$

8. Συζευκτικὸς (συζ.):

$$p, q \vdash p \wedge q.$$

9. Προσθετικὸς (προσθ.):

$$p \vdash p \vee q.$$

Σημειώσεις. Ἐάν εἰς τοὺς ἀνωτέρω διαλογισμοὺς ἀντικαταστήσωμεν τὰς μεταβλητάς p, q , καὶ r μέ οἰασδήποτε παραστάσεις P, Q καὶ R , ἀντιστοίχως, τότε οἱ προκύπτοντες διαλογισμοὶ εἶναι ἐπίσης ἰσχυροὶ (§ 5.3, πρότ. IV).

5.5. Άμεσος απόδειξις τῆς ἰσχυρότητος ἑνός διαλογισμοῦ ἐπὶ παραστάσεων. Κανόνες συμπεράσματος (διὰ τὸν προτασιακὸν λογισμόν).

Πρότασις I. $\ll P_1, P_2, \dots, P_v \vdash P_1$
 $P_1, P_2, \dots, P_v \vdash P_2$
 $\dots \dots \dots$
 $P_1, P_2, \dots, P_v \vdash P_v \gg.$

Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι μίᾳ προφανῆς συνέπειᾳ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἰσχυρότητος ἑνός διαλογισμοῦ.

Πρότασις II. $\ll$ Ἐάν:
 $P_1, P_2, \dots, P_v \vdash Q_1$
 $P_1, P_2, \dots, P_v \vdash Q_2$
 $\dots \dots \dots$
 $P_1, P_2, \dots, P_v \vdash Q_k$
καί
 $Q_1, Q_2, \dots, Q_k \vdash R$
τότε:
 $P_1, P_2, \dots, P_v \vdash R \gg.$

Πράγματι, διὰ κάθε συνδυασμὸν τῶν τιμῶν ἀληθείας τῶν μεταβλητῶν τῶν $P_1, P_2, \dots, P_v, Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ καὶ R , διὰ τὸν ὅποῦον ἐκάστη τῶν $P_1, P_2, \dots, P_v$ λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α , λόγω τῶν ὑποθέσεων, ἐκάστη τῶν $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α καὶ ἐπομένως ἡ R λαμβάνει ἐπίσης τιμὴν ἀληθείας α . Ἐξ αὐτοῦ προκύπτει ὅτι διὰ κάθε συνδυασμὸν τῶν τιμῶν ἀληθείας τῶν μεταβλητῶν τῶν $P_1, P_2, \dots, P_v$ καὶ R , διὰ τὸν ὅποῦον ἐκάστη τῶν $P_1, P_2, \dots, P_v$ λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α , ἡ R λαμβάνει ἐπίσης τιμὴν ἀληθείας α καὶ συνεπῶς: $P_1, P_2, \dots, P_v \vdash R$.

Πρότασις III. $\ll$ Ἐάν:
 $P_1, P_2, \dots, P_k \vdash Q,$

τότε:

$P_1, P_2, \dots, P_k, P_{k+1}, \dots, P_v \vdash Q \gg.$

Πράγματι. Βάσει τῆς ἀνωτέρω προτάσεως I, ἔχομεν:

$P_1, P_2, \dots, P_k, \dots, P_v \vdash P_1$
 $P_1, P_2, \dots, P_k, \dots, P_v \vdash P_2$
 $\dots \dots \dots$
 $P_1, P_2, \dots, P_k, \dots, P_v \vdash P_k.$

Ἐξ αὐτῶν καὶ ἐάν:

$P_1, P_2, \dots, P_k \vdash Q,$

τότε, βάσει τῆς ἀνωτέρω προτάσεως II, ἔχομεν:

$P_1, P_2, \dots, P_k, \dots, P_v \vdash Q.$

— Έστω ένας διαλογισμός:

$$P_1, P_2, \dots, P_n \therefore Q. \quad (1)$$

Βάσει καί τών άνωτέρω προτάσεων προκύπτει ότι:

Ο διαλογισμός (1) είναι ισχυρός, ήτοι:

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q,$$

έάν δυνάμεθα νά κατασκευάσωμεν μίαν (πεπερασμένην) διαδοχήν παραστάσεων:

$$E_1, E_2, \dots, E_k \quad (2)$$

ή τελευταία τών οποίων είναι ή Q καί τοιαύτην, ώστε εκάστη παράστασις (τῆς διαδοχῆς) E

Κανών υ: «είναι μία υπόθεσις (τοῦ διαλογισμοῦ)» ή

Κανών τ: «υπάρχουν προηγούμεναι παραστάσεις (μία ή περισσότεραι) εἰς τήν διαδοχήν, τών οποίων ή σύζευξις συνεπάγεται ταυτολογικῶς τήν E».

Μία τοιαύτη διαδοχή: $E_1, E_2, \dots, E_k$ (έάν ὑπάρχη) λέγομεν ὅτι εἶναι μία παραγωγή τῆς Q ἐκ τών $P_1, P_2, \dots, P_n$ ή ὅτι εἶναι μία (ἄμεσος) **ἀπόδειξις** τῆς ἰσχυρότητος τοῦ διαλογισμοῦ (1). Αἱ παραστάσεις $E_1, E_2, \dots, E_k$ καλοῦνται «ὄροι» τῆς παραγωγῆς αὐτῆς. Οἱ δέ κανόνες υ καί τ καλοῦνται «κανόνες συμπεράσματος» ή «κανόνες ἀποδείξεως» (διά τόν προτασιακόν λογισμόν). Εἰς τά ἐπόμενα θά ἴδωμεν καί ἄλλους τοιοῦτους κανόνας.

— Σημειοῦμεν ὅτι εἰς μίαν παραγωγήν, δι' ἐφαρμογῆς τοῦ κανόνος τ, δυνάμεθα νά ἐμφανίσωμεν ὡς ὄρον της μίαν οἰανδήποτε ταυτολογίαν. Πράγματι, ἐάν $\vdash G$ τότε $\vdash P \Rightarrow G$ οἰασδήποτε οὔσης τῆς παραστάσεως P (§ 3.4, εἰδική περίπτωσις). Οὕτω,, λαμβάνοντες εἰς μίαν παραγωγήν ὡς P μίαν (ἐμφανισθεῖσαν) ὑπόθεσιν, δι' ἐφαρμογῆς τοῦ κανόνος τ, ή G δύναται νά ἐμφανισθῇ ὡς ὄρος της.

Παράδειγμα 1. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\vdash p \vee q, p \Rightarrow r, q \Rightarrow t \vdash r \vee t.$$

Ἀπόδειξις. Ἐχομεν:

- | | | |
|-------------------------------------|--|---------|
| (1) $p \Rightarrow r$ | κανών υ | |
| (2) $p \vee q \Rightarrow r \vee q$ | κανών τ: $\vdash (1) \Rightarrow (2)$ | (§ 2.5) |
| (3) $q \Rightarrow t$ | κανών υ | |
| (4) $r \vee q \Rightarrow r \vee t$ | κανών τ: $\vdash (3) \Rightarrow (4)$ | (§ 2.5) |
| (5) $p \vee q \Rightarrow r \vee t$ | κανών τ: $\vdash (2) \wedge (4) \Rightarrow (5)$ | (§ 2.5) |
| (6) $p \vee q$ | κανών υ | |
| (7) $r \vee t$ | κανών τ: $\vdash (5) \wedge (6) \Rightarrow (7)$ | (§ 2.5) |

Παράδειγμα 2. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\vdash w \vee p \Rightarrow q, q \Rightarrow r \vee s, s \Rightarrow t, \bar{r} \wedge \bar{t} \vdash \bar{w}.$$

Ἀπόδειξις. ἔχομεν:

- | | |
|--------------------------------------|--|
| (1) $\bar{r} \wedge \bar{t}$ | κανών u |
| (2) $\bar{t}$ | κανών $t: \vdash (1) \Rightarrow (2)$ |
| (3) $s \Rightarrow t$ | κανών u |
| (4) $\bar{s}$ | κανών $t: \vdash (2) \wedge (3) \Rightarrow (4)$ |
| (5) $\bar{r}$ | κανών $t: \vdash (1) \Rightarrow (5)$ |
| (6) $\bar{r} \wedge \bar{s}$ | κανών $t: \vdash (4) \wedge (5) \Rightarrow (6)$ |
| (7) $\bar{r} \vee \bar{s}$ | κανών $t: \vdash (6) \Rightarrow (7)$ |
| (8) $w \vee p \Rightarrow q$ | κανών u |
| (9) $q \Rightarrow r \vee s$ | κανών u |
| (10) $w \vee p \Rightarrow r \vee s$ | κανών $t: \vdash (8) \wedge (9) \Rightarrow (10)$ |
| (11) $\bar{w} \vee \bar{p}$ | κανών $t: \vdash (7) \wedge (10) \Rightarrow (11)$ |
| (12) $\bar{w} \wedge \bar{p}$ | κανών $t: \vdash (11) \Rightarrow (12)$ |
| (13) $\bar{w}$ | κανών $t: \vdash (12) \Rightarrow (13)$ |

Σημειώσεις. Ἡ διαπίστωσις τῆς ἰσχυρότητος τοῦ ἀνωτέρω διαλογισμοῦ μέ τοὺς πύνακας τιμῶν ἀληθείας θά ἀπαιτοῦσε τήν κατασκευήν ἑνός πύνακος μέ $2^2 = 64$ γραμμάς!

5.6. Ἄλλοι κανόνες συμπεράσματος (διὰ τόν προτασιακόν λογισμόν).

Ἐξ ἐκάστου ἰσχυροῦ διαλογισμοῦ, βάσει τῆς προτάσεως III τῆς § 5.3 καί τοῦ κανόνος t τῆς προηγουμένης παραγράφου, προκύπτει καί ἕνας κανών συμπεράσματος (διὰ τόν προτασιακόν λογισμόν).

Π.χ. ἐκ τοῦ ἰσχυροῦ διαλογισμοῦ:

$$P, P \Rightarrow Q \vdash Q$$

προκύπτει ὁ ἐξῆς κανών συμπεράσματος:

||| <<Εἰς μίαν παραγωγὴν δυνάμεθα νά ἐμφανίσωμεν ὥς ὅρον τῆς μίαν παράστασιν Q , ἐάν ἔχωμεν προηγουμένως ἐμφανίσῃ ὥς ὅρους τῆς τᾶς παραστάσεις P καί $P \Rightarrow Q$ >>. (διατί;).

Ὁ κανών αὐτός, ὑπὸ μορφήν ἑνός σχήματος, γράφεται ὥς ἐξῆς:

$$\frac{P, P \Rightarrow Q}{Q}$$

καί διατυποῦται συντομώτερον:

<< Ἀπό P καί $P \Rightarrow Q$ συμπεραίνομεν Q >>.

Γενικώτερον. Ἐάν ὁ διαλογισμός:

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$$

εἶναι ἰσχυρός, τότε ὁ κανών συμπεράσματος, ὅστις προκύπτει ἐξ αὐτοῦ, γράφεται ὑπὸ μορφήν σχήματος:

$$\frac{P_1, P_2, \dots, P_n}{Q}$$

καί διατυπώνεται ως εξής:

«Από P_1 καί P_2 καί...καί P_n συμπεραίνομεν Q ».

— Επίσης, βάσει του κανόνος τ , προκύπτει εύκολως ο εξής κανών συμπεράσματος:

||| «Είς μίαν παραγωγὴν δυνάμεθα νά ἐμφανίσωμεν ὡς ὅρον τῆς μίαν παράστασιν Q , ἐάν ἔχωμεν προηγουμένως ἐμφανίσει ὡς ὅρον τῆς μίαν παράστασιν P ἰσοδύναμον τῆς Q » (διατί;).

— Διὰ νά διευκολυνθῶμεν εἰς τὰς παραγωγάς, χρησιμοποιοῦμεν καί τοὺς κανόνας συμπεράσματος, οἱ ὅποιοι προκύπτουν ἐκ τῶν ἐννέα στοιχειωδῶν διαλογισμῶν, τοὺς ὁποίους εἶδομεν εἰς τὴν § 5.4. Εἰς τὴν ἐπομένην παράγραφον παραθέτομεν ἓνα πῖνακα περιέχοντα τοὺς ἐννέα αὐτοὺς κανόνας, καθὼς καί δέκα ἰσοδυναμίας (νόμους) (γνωστάς ἐκ τῶν προηγουμένων κεφαλαίων), εἰς τὸν ὁποῖον καί θά ἀναφερώμεθα εἰς τὰ ἐπόμενα κατὰ τὴν κατασκευὴν τῶν παραγωγῶν.

5.7. Πίναξ κανόνων συμπεράσματος καί ἰσοδυναμιῶν χρησιμοποιουμένων εἰς τὰς παραγωγάς.

Κανόνες:

1. Modus ponens (m.p):

$$\frac{P, P \Rightarrow Q}{Q}$$

2. Modus tollens (m.t.):

$$\frac{P \Rightarrow Q, \bar{Q}}{\bar{P}}$$

3. Ὑποθετικοῦ συλλογισμοῦ (ὕπ.συλ.):

$$\frac{P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow R}{P \Rightarrow R}$$

4. Διαζευκτικοῦ συλλογισμοῦ (διαζ. συλ.):

$$\frac{P \vee Q, \bar{P}}{Q}$$

5. Δημιουργικοῦ διλήμματος (δημ.διλ.):

$$\frac{(P \Rightarrow Q) \wedge (R \Rightarrow T), P \vee R}{Q \vee T}$$

6. Ἀπορροφήσεως (ἀπορ.):

$$\frac{P \Rightarrow Q}{P \Rightarrow P \wedge Q}$$

7. 'Απλουστεύσεως (άπλουστ.):

$$\frac{P \wedge Q}{P}$$

8. Συζεύξεως (συζ.):

$$\frac{P, Q}{P \wedge Q}$$

9. Προσθέσεως (προσθ.):

$$\frac{P}{P \vee Q}$$

'Ισοδυναμίες (νόμοι):

10. Διπλής άρνήσεως (διπλ.άρν.): $\bar{\bar{P}} \equiv P$

11. 'Αδύναμοι (άδύν.): $\begin{cases} P \vee P \equiv P \\ P \wedge P \equiv P \end{cases}$

12. 'Αντιμεταθετικοί (άντιμ.): $\begin{cases} P \vee Q \equiv Q \vee P \\ P \wedge Q \equiv Q \wedge P \end{cases}$

13. Προσεταιριστικοί (προσσετ.): $\begin{cases} P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R \\ P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R \end{cases}$

14. 'Επιμεριστικοί (έπιμερ.): $\begin{cases} P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \\ P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \end{cases}$

15. De Morgan (de M.): $\begin{cases} \overline{P \vee Q} \equiv \bar{P} \wedge \bar{Q} \\ \overline{P \wedge Q} \equiv \bar{P} \vee \bar{Q} \end{cases}$

16. 'Αντικαταστάσεως
συνεπαγωγής (συνεπ.): $P \Rightarrow Q \equiv \bar{P} \vee Q$

17. 'Αντικαταστάσεως
ίσοδυναμίας (ίσοδ.): $\begin{cases} P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P) \\ P \Leftrightarrow Q \equiv (P \wedge Q) \vee (\bar{P} \wedge \bar{Q}) \end{cases}$

18. 'Αντιστροφοαντίθετος
(άντιστροφαντ.): $P \Rightarrow Q \equiv \bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$

19. 'Εξαγωγής (έξαγ.): $P \wedge Q \Rightarrow R \equiv P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$

5.8. Παραδείγματα.

Παράδειγμα 1. Νά αποδειχθῇ ὅτι:

$$\begin{array}{|l} \text{|||} \\ P \Rightarrow q, \quad q \Rightarrow r, \quad r \Rightarrow t, \quad \bar{t}, \quad p \vee s \vdash s. \end{array}$$

'Απόδειξις. "Εχουμεν:

- | | | |
|-----|-------------------|--------|
| (1) | $p \Rightarrow q$ | $\vee$ |
| (2) | $q \Rightarrow r$ | $\vee$ |
| (3) | $r \Rightarrow t$ | $\vee$ |
| (4) | $\bar{t}$ | $\vee$ |
| (5) | $p \vee s$ | $\vee$ |

- | | |
|-----------------------|-------------------------|
| (6) $p \Rightarrow r$ | (1) και (2), υπ. συλ. |
| (7) $p \Rightarrow t$ | (6) και (3), υπ. συλ. |
| (8) $\bar{p}$ | (7) και (4), m.t. |
| (9) s | (5) και (8), διαζ. συλ. |

Παράδειγμα 2. Νά αποδειχθῇ ὅτι:

$$\text{|||} \quad q \Rightarrow (r \Rightarrow p), \quad \bar{r} \wedge q, \quad r \vdash t \Rightarrow p.$$

Ἀπόδειξις. "Ἐχομεν:

- | | |
|---------------------------------------|-------------------------|
| (1) $q \Rightarrow (r \Rightarrow p)$ | υ |
| (2) $\bar{r} \vee q$ | υ |
| (3) r | υ |
| (4) $t \Rightarrow p$ | (2), συνεπ. |
| (5) $t \Rightarrow (r \Rightarrow p)$ | (4) και (1), υπ. συλ. |
| (6) $\bar{r} \vee (\bar{r} \vee p)$ | (5), συνεπ. |
| (7) $(\bar{r} \vee p) \vee \bar{r}$ | (6), ἀντιμ. και προσετ. |
| (8) $\bar{r} \vee p$ | (7) και (3), διαζ. συλ. |
| (9) $t \Rightarrow p$ | (8), συνεπ. |

Παράδειγμα 3. Νά αποδειχθῇ ὅτι:

$$\text{|||} \quad p \Rightarrow q \vee r, \quad q \Rightarrow \bar{p}, \quad t \Rightarrow \bar{r}, \quad p \vdash \bar{t}.$$

Ἀπόδειξις. "Ἐχομεν:

- | | |
|------------------------------|-------------------------|
| (1) $p \Rightarrow q \vee r$ | υ |
| (2) $q \Rightarrow \bar{p}$ | υ |
| (3) $t \Rightarrow \bar{r}$ | υ |
| (4) p | υ |
| (5) $q \vee r$ | (1) και (4), m.p. |
| (6) $\bar{q}$ | (2) και (4), m.t. |
| (7) r | (5) και (6), διαζ. συλ. |
| (8) $\bar{r}$ | (3) και (7), m.t. |

5.9. Ὑποθετική ἀπόδειξις.

Πρότασις. « $P_1, P_2, \dots, P_n \vdash R \Rightarrow Q$ ἐάν, και μόνον ἐάν,

$$\text{|||} \quad P_1, P_2, \dots, P_n, R \vdash Q \quad \gg.$$

Πράγματι. Βάσει τῆς προτάσεως III τῆς § 5.3, ἔχομεν:

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash R \Rightarrow Q$$

ἐάν, και μόνον ἐάν:

$$\vdash P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \Rightarrow (R \Rightarrow Q). \quad (1)$$

Ἀλλά:

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \Rightarrow (R \Rightarrow Q)$$

$$\equiv (P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \wedge R \Rightarrow Q. \quad (§ 5.7, 19)$$

Συνεπῶς, ἡ (1) ἰσχύει ἐάν, και μόνον ἐάν:

$$\vdash P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \wedge R \Rightarrow Q,$$

ήτις ισχύει εάν, και μόνον εάν:

$$P_1, P_2, \dots, P_n, R \vdash Q.$$

— Βάσει της ανωτέρω προτάσεως δυνάμεθα νά διατυπώσωμεν τόν κάτωθι κανόνα, ὅστις καλεῖται «κανών ὑποθετικῆς ἀποδείξεως».

Κανών ὑποθετικῆς ἀποδείξεως (κανών υ. α.): «Αἱ $P_1, P_2, \dots, P_n$ παράγουν τήν $R \Rightarrow Q$ εάν (καί μόνον εάν) αἱ $P_1, P_2, \dots, P_n$ καί R παράγουν τήν Q ».

Οὕτω, βάσει τοῦ κανόνος αὐτοῦ, διὰ νά ἀποδείξωμεν ὅτι:

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash R \Rightarrow Q,$$

ἀρκεῖ νά θεωρήσωμεν τήν R ὡς μίαν ἐπιπρόσθετον ὑπόθεσιν καί ἀκολούθως ἐκ τῶν $P_1, P_2, \dots, P_n$ καί R νά παραγάγωμεν τήν Q .

Παράδειγμα 1. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\vdash p \Rightarrow (q \wedge r) \vee s, q \wedge r \Rightarrow \bar{p}, t \Rightarrow \bar{s} \vdash p \Rightarrow \bar{t}.$$

Ἀπόδειξις. Ἔχομεν:

- | | | |
|-----|-------------------------------------|---------------------------|
| (1) | $p \Rightarrow (q \wedge r) \vee s$ | υ |
| (2) | $q \wedge r \Rightarrow \bar{p}$ | υ |
| (3) | $t \Rightarrow \bar{s}$ | υ |
| (4) | p | υ (ἐπιπρόσθετος ὑπόθεσις) |
| (5) | $(q \wedge r) \vee s$ | (1) καί (4), m.p. |
| (6) | $\overline{q \wedge r}$ | (2) καί (4), m.t. |
| (7) | s | (5) καί (6), διαζ. συλ. |
| (8) | $\bar{t}$ | (3) καί (7), m.t. |
| (9) | $p \Rightarrow \bar{t}$ | (4) καί (8), κανών υ.α. |

Μία ἄλλη ἀπόδειξις, χωρὶς τόν κανόνα υ.α εἶναι ἡ ἑξῆς:

- | | | |
|------|--|--------------------------|
| (1) | $p \Rightarrow (q \wedge r) \vee s$ | υ |
| (2) | $q \wedge r \Rightarrow \bar{p}$ | υ |
| (3) | $t \Rightarrow \bar{s}$ | υ |
| (4) | $\bar{p} \vee [(q \wedge r) \vee s]$ | (1), συνεπ. |
| (5) | $[\bar{p} \vee (q \wedge r)] \vee s$ | (4), προσετ. |
| (6) | $(p \Rightarrow q \wedge r) \vee s$ | (5), συνεπ. |
| (7) | $s \vee (p \Rightarrow q \wedge r)$ | (6), ἀντιμ. |
| (8) | $\bar{s} \Rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r)$ | (7), συνεπ. |
| (9) | $t \Rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r)$ | (3) καί (8), ὑπ. συλ. |
| (10) | $\bar{t} \vee [p \vee (q \wedge r)]$ | (9), συνεπ. |
| (11) | $(\bar{p} \vee \bar{t}) \vee (q \wedge r)$ | (10), προσετ. καί ἀντιμ. |
| (12) | $\overline{\bar{p} \vee \bar{t}} \Rightarrow q \wedge r$ | (11), συνεπ. |
| (13) | $\bar{p} \vee \bar{t} \Rightarrow \bar{p}$ | (12) καί (2), ὑπ. συλ. |
| (14) | $p \Rightarrow \bar{p} \vee \bar{t}$ | (13), ἀντιστροφαντ. |

- (15) $p \Rightarrow (p \Rightarrow \bar{t})$ (14), συνεπ.
 (16) $p \wedge p \Rightarrow \bar{t}$ (15), εξαγ.
 (17) $p \Rightarrow \bar{t}$ (16), άδυν.

Παράδειγμα 2. Νά αποδειχθῇ ὅτι:

$$\text{|||} \quad q \Rightarrow p, r \wedge s \Rightarrow t, (r \vee q) \wedge s \vdash p \vee t.$$

Απόδειξις. Ἀρκεῖ νά αποδείξωμεν ὅτι:

$$q \Rightarrow p, r \vee s \Rightarrow t, (r \vee q) \wedge s \vdash \bar{p} \Rightarrow t. \quad (\text{δυνατό;})$$

Ἔχομεν:

- (1) $q \Rightarrow p$ $\quad \quad \quad \vee$
 (2) $r \vee s \Rightarrow t$ $\quad \quad \quad \vee$
 (3) $(r \vee q) \wedge s$ $\quad \quad \quad \vee$
 (4) $\bar{p}$ $\quad \quad \quad \vee$ (ἐπιπρόσθετος ὑπόθεσις)
 (5) $\bar{q}$ $\quad \quad \quad$ (1) καὶ (4), m.t.
 (6) $\bar{q} \vee \bar{s}$ $\quad \quad \quad$ (5), προσθ.
 (7) $\overline{p \wedge s}$ $\quad \quad \quad$ (6), de M.
 (8) $(r \wedge s) \vee (q \wedge s)$ (3), ἐπιμερ.
 (9) $r \wedge s$ $\quad \quad \quad$ (7) καὶ (8), διαζ. συλ.
 (10) t $\quad \quad \quad$ (2) καὶ (9), m.p.
 (11) $\bar{p} \Rightarrow t$ $\quad \quad \quad$ (4) καὶ (10), κανών υ.α.

5.10. Ἀντίφασις. Συμβιβασταί παραστάσεις.

Δύο παραστάσεις ἢ προτάσεις λέγομεν ὅτι εἶναι **ἀντιφατικαί** ἐάν, καί μόνον ἐάν, ἡ μία εἶναι ἡ ἄρνησις τῆς ἄλλης. Ἡ δέ συζευξις δύο ἀντιφατικῶν παραστάσεων ἢ προτάσεων καλεῖται **ἀντίφασις** (ἀτοπον). Οὕτω, κάθε ἀντίφασις εἶναι μία σύζευξις τῆς μορφῆς: $P \wedge \bar{P}$. (Ἐάν P εἶναι μία παράστασις, τότε: $P \wedge \bar{P}$ εἶναι μία αὐτοαντίφασις. Ἐάν P εἶναι μία πρότασις, τότε $P \wedge \bar{P}$ εἶναι μία πρότασις ψευδῆς).

— Μία ὁμάς παραστάσεων: $P_1, P_2, \dots, P_n$ λέγομεν ὅτι εἶναι **συμβιβαστή** ἐάν, καί μόνον ἐάν, ὑπάρχη εἷς τουλάχιστον συνδυασμός τῶν τιμῶν ἀληθείας τῶν μεταβλητῶν των, διὰ τὸν ὁποῖον ὅλαι αἱ παραστάσεις: $P_1, P_2, \dots, P_n$ λαμβάνουν ταυτοχρόνως τιμὴν ἀληθείας α. Εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν, ἡ ἐν λόγω ὁμάς λέγομεν ὅτι εἶναι **ἀσυμβίβαστος** (μὴ συμβιβαστή). Ἦτοι, μία ὁμάς παραστάσεων: $P_1, P_2, \dots, P_n$ εἶναι ἀσυμβίβαστος ἐάν, καί μόνον ἐάν, διὰ κάθε συνδυασμὸν τῶν τιμῶν ἀληθείας τῶν μεταβλητῶν των μία τουλάχιστον ἐκ τῶν παραστάσεων: $P_1, P_2, \dots, P_n$ λαμβάνη τιμὴν ἀληθείας γ.

Συμπεραίνομεν εὐκόλως ὅτι:

Μία ομάδα παραστάσεων: $P_1, P_2, \dots, P_n$ είναι συμβιβαστή, εάν, και μόνον εάν, η παράστασις: $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n$ λαμβάνη τιμήν αληθείας α δι'έν τουλάχιστον συνδυασμόν τών τιμών αληθείας τών μεταβλητών της και είναι άσυμβιβαστος, εάν, και μόνον εάν, η παράστασις: $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n$ λαμβάνη τιμήν αληθείας γ δι'όλους τούς δυνατούς συνδυασμούς τών τιμών αληθείας τών μεταβλητών της, ήτοι εάν, και μόνον εάν: $\sim \vdash P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n$.

Κριτήριο άσυμβιβαστότητας παραστάσεως « Μία ομάδα παραστάσεων:

$P_1, P_2, \dots, P_n$ είναι άσυμβιβαστος εάν, και μόνον εάν:

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash R \wedge \bar{R},$$

όπου R είναι μία οιαδήποτε παράστασις ».

“Ητοι:

Μία ομάδα παραστάσεων είναι άσυμβιβαστος εάν, και μόνον εάν, δύναται νά παραχθῇ ἐξ αὐτῶν μία αντίφασις.

Πράγματι ἔχομεν:

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash R \wedge \bar{R}$$

εάν, και μόνον εάν:

$$\vdash P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \Rightarrow R \wedge \bar{R}. \quad (\S 5.3, \text{ πρότ. III})$$

Τοῦτο δέ συμβαίνει, εάν, και μόνον εάν:

$$\sim \vdash P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n, \quad (\text{διατί;})$$

τό ὅποῦον ἰσχύει, εάν, και μόνον εάν, ἡ ομάδα τῶν παραστάσεων $P_1, P_2, \dots, P_n$ εἶναι άσυμβιβαστος.

Παράδειγμα. Ἡ ομάδα τῶν παραστάσεων:

$p \Leftrightarrow q, q \Rightarrow r, \bar{r} \vee t, \bar{p} \Rightarrow t, \bar{t}$
εἶναι άσυμβιβαστος.

Βάσει τοῦ άνωτέρω κριτηρίου, ἀρκεῖ ἐκ τῶν παραστάσεων αὐτῶν νά παραγάγῃ-
γωμεν μίαν αντίφασιν. Πράγματι, ἔχομεν:

- | | | |
|------|--|-------------------------|
| (1) | $p \Leftrightarrow q$ | υ |
| (2) | $q \Rightarrow r$ | υ |
| (3) | $\bar{r} \vee t$ | υ |
| (4) | $\bar{p} \Rightarrow t$ | υ |
| (5) | $\bar{t}$ | υ |
| (6) | $\bar{\bar{p}}$ | (4) και (5), m.t. |
| (7) | p | (6), διπλ. άρν. |
| (8) | $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ | (1), ἰσοδ. |
| (9) | $p \Rightarrow q$ | (8), ἀπλουστ. |
| (10) | $p \Rightarrow r$ | (9) και (2), ὑπ. συλ. |
| (11) | r | (7) και (10), m.p. |
| (12) | $\bar{r}$ | (3) και (5), διαζ. συλ. |

(13) $r \wedge \bar{r}$

(11) καὶ (12), συζ. συλ.

5.11. Έμεσος απόδειξις. Μέθοδος τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.**Πρότασις.** « $P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$ ἔάν, καὶ μόνον ἔάν:

$$P_1, P_2, \dots, P_n, \bar{Q} \vdash R \wedge \bar{R},$$

ὅπου R εἶναι μία οἰαδήποτε παράστασις».

Πράγματι. Ἐπειδὴ:

$$Q \equiv Q \vee (R \wedge \bar{R}) \quad (\text{διατύ;})$$

$$\equiv \bar{Q} \Rightarrow R \wedge \bar{R}, \quad (\text{διατύ;})$$

ἔχομεν:

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$$

ἔάν, καὶ μόνον ἔάν:

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash \bar{Q} \Rightarrow R \wedge \bar{R}, \quad (\text{διατύ;})$$

τό ὅποτον συμβαίνει, ἔάν, καὶ μόνον ἔάν:

$$P_1, P_2, \dots, P_n, \bar{Q} \vdash R \wedge \bar{R} \quad (\text{κανών υ.α})$$

— Βάσει τῆς ἀνωτέρω προτάσεως δυνάμεθα νά διατυπώσωμεν τόν κατωθι κανόνα, ὅστις καλεῖται «κανών τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς».

Κανών τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς (κανών α.α.). «Αἰ $P_1, P_2, \dots, P_n$ παράγουν τήν Q , ἔάν (καὶ μόνον ἔάν) αἰ $P_1, P_2, \dots, P_n$ καὶ $\bar{Q}$ παράγουν μίαν ἀντίφασιν».

Οὕτω, βάσει τοῦ κανόνος αὐτοῦ, διὰ νά ἀποδείξωμεν ὅτι:

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q,$$

ἄρκει νά ἀποδείξωμεν ὅτι αἰ $P_1, P_2, \dots, P_n$ καὶ $\bar{Q}$ παράγουν μίαν ἀντίφασιν (δηλαδή, ὅτι ἡ ὁμάς τῶν παραστάσεων: $P_1, P_2, \dots, P_n$ καὶ $\bar{Q}$ εἶναι ἀσυμβίβαστος).Ἡ ἀπόδειξις ὅτι αἰ $P_1, P_2, \dots, P_n$ καὶ $\bar{Q}$ παράγουν μίαν ἀντίφασιν εἶναι, ὡς λέγομεν, μία **έμμεσος** ἀπόδειξις ὅτι αἰ $P_1, P_2, \dots, P_n$ παράγουν τήν Q . Ἡ μέθοδος αὕτη ἀποδείξεως καλεῖται «μέθοδος δι' ἀντιφάσεως» ἢ «μέθοδος διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς». Τά βήματα μιᾶς τοιαύτης ἀποδείξεως εἶναι τὰς ἐξῆς:

α) Ἐπισυνάπτομεν εἰς τὰς ὑποθέσεις τήν ἄρνησιν τοῦ συμπεράσματος ὡς μίαν ἐπιπρόσθετον ὑπόθεσιν.

β) Ἀπό τήν νέαν ὑπόθεσιν μαζί μέ τὰς δεδομένας ὑποθέσεις παραγάγωμεν μίαν ἀντίφασιν.

γ) Βεβαιώνομεν τήν παραγωγὴν τοῦ συμπεράσματος ἐκ τῶν δεδομένων (ἀρχικῶν) ὑποθέσεων.

Παράδειγμα 1. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s), s \wedge q \Rightarrow t, \bar{t} \vdash \bar{p} \vee \bar{r}.$$

Ἀπόδειξις. ἔχομεν:

- | | | |
|------|--|--------------------------------|
| (1) | $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)$ | $\cup$ |
| (2) | $s \wedge q \Rightarrow t$ | $\cup$ |
| (3) | $\bar{t}$ | $\cup$ |
| (4) | $\overline{p \vee r}$ | $\cup$ (έπιπρόσθετος υπόθεσις) |
| (5) | $p \wedge r$ | (4), de M. |
| (6) | p | (5), άπλουστ. |
| (7) | $p \Rightarrow q$ | (1), άπλουστ. |
| (8) | q | (6) και (7), m.p. |
| (9) | $r \Rightarrow s$ | (1), άπλουστ. |
| (10) | r | (5), άπλουστ. |
| (11) | s | (10) και (9), m.p. |
| (12) | $s \wedge q$ | (11) και (8), συζ. |
| (13) | t | (12) και (2), m.p. |
| (14) | $t \wedge \bar{t}$ | (13) και (3), συζ. |
| (15) | $\bar{p} \vee \bar{r}$ | (4) και (14), κανών α.α. |

— 'Η απόδειξις διά της εις άτοπον άπαγωγής είναι έν ειδος υποθετικής άποδείξεως. 'Αντί του κανόνος της εις άτοπον άπαγωγής δυνάμεθα νά εφαρμόζωμεν τόν κανόνα υποθετικής άποδείξεως και άκολούθως τήν ταυτολογίαν:

$$\vdash (p \Rightarrow q \wedge \bar{q}) \Rightarrow \bar{p}.$$

Τήν μέθοδον αὐτήν ακολουθοῦμεν εις τό επόμενον παράδειγμα.

Παράδειγμα 2. Νά αποδειχθῇ ὅτι:

$$\begin{array}{|l} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \quad p \Rightarrow q \vee r, \quad q \Rightarrow \bar{p}, \quad t \Rightarrow \bar{r} \vdash \bar{p} \wedge \bar{t}.$$

Απόδειξις. Έχουμεν:

- | | | | |
|-----------|------|---|-----------------------------------|
| [1] | (1) | $p \Rightarrow q \vee r$ | $\cup$ |
| [2] | (2) | $q \Rightarrow \bar{p}$ | $\cup$ |
| [3] | (3) | $t \Rightarrow \bar{r}$ | $\cup$ |
| [4] | (4) | $p \wedge t$ | $\cup$ (έπιπρόσθετος υπόθεσις) |
| [1,4] | (5) | $q \vee r$ | (4) και (1), άπλουστ. και m.p. |
| [3,4] | (6) | $\bar{r}$ | (4) και (3), άπλουστ. και m.p. |
| [1,3,4] | (7) | q | (5) και (6), διαζ. συλ. |
| [1,2,3,4] | (8) | $\bar{p}$ | (7) και (2), m.p. |
| [1,2,3,4] | (9) | $p \wedge \bar{p}$ | (4) και (8), άπλουστ. και συζ. |
| [1,2,3] | (10) | $p \wedge t \Rightarrow p \wedge \bar{p}$ | (4) και (9), κανών υ.α. |
| [1,2,3] | (11) | $\bar{p} \wedge \bar{t}$ | (10) άνωτέρω ταυτολογία (κανών τ) |

Οί αριθμοί έντός της άγκύλης εκάστης γραμμής δεικνύουν τάς αντίστοιχους παραστάσεις, αἱ ὁποῖαι παράγουν τήν παράστασιν της γραμμής αὐτῆς. Π.χ. ἡ παράστασις της γραμμῆς (5) παράγεται ἐκ τῶν παραστάσεων τῶν γραμμῶν (1) και (4). 'Επίσης, ἡ παράστασις της γραμμῆς (8) παράγεται ἐκ τῶν παραστάσεων τῶν γραμ -

μῶν (1), (2), (3) καὶ (4), κ.λ.π. Εἰδικῶς, ἐάν ἡ παράστασις μιᾶς γραμμῆς εἴ-
ναι ὑπόθεσις, ὅπως π.χ. ἡ παράστασις τῆς γραμμῆς (2), τότε ἐντὸς τῆς ἀντι-
στούχου ἀγκύλης τίθεται μόνον ὁ ἀριθμὸς τῆς γραμμῆς αὐτῆς, διότι ἡ παράστα-
σις αὕτη δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν παραστάσεων τῶν ἄλλων γραμμῶν.

5.12. Εὗρεσις τοῦ εἴδους ἐνός διαλογισμοῦ⁽¹⁾ διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀναλύσεως.

Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν τὸ εἶδος ἐνός διαλογισμοῦ:

$$P_1, P_2, \dots, P_n \therefore Q.$$

Ἐποθέτομεν ὅτι εἶναι δυνατόν ἡ παράστασις Q νὰ λάβῃ τιμὴν ἀληθείας γ καὶ ταυτοχρόνως ἐκάστη τῶν $P_1, P_2, \dots, P_n$ νὰ λάβῃ τιμὴν ἀληθείας α . Ἀναλύομεν τὰς συνεπείας τῆς ὑποθέσεως αὐτῆς, ἕως ὅτου φθάσωμεν εἰς τὰς τιμὰς ἀληθείας, τὰς ὁποίας ὀφείλουν νὰ λάβουν αἱ μεταβληταὶ τοῦ διαλογισμοῦ. Προφανῶς, ἐνδέχεται νὰ ὑπάρχουν πολλοὶ τοιαῦται ἀναλύσεις (διατί;)

α) Ἐάν ὑπάρχῃ μία τοιαύτη ἀνάλυσις, ἥτις δὲν ὀδηγεῖ εἰς ἀντίφασιν⁽²⁾, τότε ὁ δοθεὶς διαλογισμὸς εἶναι ἀνίσχυρος (διατί;).

β) Ἐάν κἀθε τοιαύτη ἀνάλυσις ὀδηγῇ εἰς ἀντίφασιν, τότε ὁ δοθεὶς διαλογισμὸς εἶναι ἰσχυρὸς (διατί;).

Παράδειγμα 1. Νὰ εὕρεθῇ τὸ εἶδος τοῦ διαλογισμοῦ:

$$\begin{array}{l} \text{|||} \\ p \Rightarrow \bar{q}, \bar{p} \therefore q. \end{array}$$

Ἐποθέτομεν ὅτι ἡ q λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας γ καὶ ταυτοχρόνως ἐκάστη τῶν $p \Rightarrow \bar{q}$ καὶ $\bar{p}$ λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α . Τότε, ἐπειδὴ ἡ $\bar{p}$ ἔχει λάβει τιμὴν ἀληθείας α , ἡ p ὀφείλει νὰ λάβῃ τιμὴν ἀληθείας γ . Ἐξ ἄλλου, διὰ τὰς ἐν λόγῳ τιμὰς ἀληθείας τῶν p καὶ q , ἡ $p \Rightarrow \bar{q}$ λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α καὶ οὕτω δὲν ὀδηγούμεθα εἰς ἀντίφασιν. Ἀρα ὁ δοθεὶς διαλογισμὸς εἶναι ἀνίσχυρος.

Παράδειγμα 2. Νὰ εὕρεθῇ τὸ εἶδος τοῦ διαλογισμοῦ:

$$\begin{array}{l} \text{|||} \\ (p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s), \quad s \wedge q \Rightarrow t, \quad \bar{r} \therefore \bar{p} \vee \bar{t}. \end{array}$$

Ἐποθέτομεν ὅτι ἡ $\bar{p} \vee \bar{t}$ λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας γ καὶ ὅτι ἐκάστη τῶν ὑποθέσεων τοῦ διαλογισμοῦ λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α . Τότε ἐκάστη τῶν p καὶ r πρέπει νὰ λάβῃ τιμὴν ἀληθείας α (διατί;). Ἐπειδὴ ἡ $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)$ ἔχει λάβῃ τιμὴν ἀληθείας α , ἐκάστη τῶν q καὶ s πρέπει νὰ λάβῃ τιμὴν ἀληθείας α (διατί;). Ἐξ αὐτοῦ καὶ ἐπειδὴ ἡ $s \wedge q \Rightarrow t$ ἔχει λάβῃ τιμὴν ἀληθείας α , ἔπε-

(1) Δηλαδή, ἐάν εἶναι ἰσχυρὸς ἢ ἀνίσχυρος.

(2) Δηλαδή, δὲν παρίσταται ἀνάγκη νὰ δοθοῦν εἰς τὴν αὐτὴν μεταβλητὴν ταυτοχρόνως τιμὰ ἀληθείας α καὶ γ .

ται ότι ή t πρέπει νά λάβη τιμήν ἀληθείας α . Ἀλλά ή $\bar{t}$ ἔχει λάβει τιμήν ἀληθείας α καί συνεπῶς ή t πρέπει νά λάβη τιμήν ἀληθείας y . Οὕτω, ή ἀνάλυσις αὐτῆς ὁδηγεῖ εἰς ἀντίφασιν. Ἐπειδή, τώρα, δέν ὑπάρχει ἄλλη τοιαύτη ἀνάλυσις (διατί;), τό συμπέρασμα εἶναι ὅτι ὁ δοθεῖς διαλογισμός εἶναι ἰσχυρός.

Σημειώσεις. Ἡ προηγουμένη μέθοδος τῆς ἀναλύσεως δύναται νά χρησιμοποιηθῇ καί διὰ τήν εὕρεσιν τοῦ εἵδους μιᾶς παραστάσεως (§ 2.4). Πράγματι, ἔστω μία παράστασις P . Ὑποθέτομεν ὅτι εἶναι δυνατόν ή P νά λάβη τιμήν ἀληθείας y καί ἀναλύομεν τās συνεπειάς τῆς ὑποθέσεως αὐτῆς ὡς ἀνωτέρω. Ἐνδέχεται, ὡς καί προηγουμένως νά ὑπάρχουν πολλά τοιαῦτα ἀναλύσεις (διατί;).

α) Ἐάν κάθε τοιαύτη ἀνάλυσις ὁδηγῇ εἰς ἀντίφασιν, τότε ή παράστασις P εἶναι ταυτολογία (διατί;)

β) Ἐάν ὑπάρχη μία τοιαύτη ἀνάλυσις, ἥτις δέν ὁδηγεῖ εἰς ἀντίφασιν, τότε ή P δέν εἶναι ταυτολογία. Ἄρα, αὕτη θά εἶναι ἡ αὐτοαντίφασις ἡ σχετική. Διὰ νά ὕδωμεν ποῦον ἐκ τῶν δύο τελευταίων συμβαίνει, ἐργαζόμεθα ὡς ἐξῆς: Ὑποθέτομεν ὅτι ή P εἶναι δυνατόν νά λάβη τιμήν ἀληθείας α καί ἀναλύομεν τās συνεπειάς τῆς ὑποθέσεως αὐτῆς ὡς καί προηγουμένως. Καί πάλιν ἐνδέχεται νά ὑπάρχουν πολλά τοιαῦτα ἀναλύσεις.

β₁) Ἐάν κάθε τοιαύτη ἀνάλυσις ὁδηγῇ εἰς ἀντίφασιν, τότε ή παράστασις P εἶναι αὐτοαντίφασις (διατί;).

β₂) Ἐάν ὑπάρχη μία τοιαύτη ἀνάλυσις, ἥτις δέν ὁδηγεῖ εἰς ἀντίφασιν, τότε ή P δέν εἶναι αὐτοαντίφασις καί ἐπειδή αὕτη δέν εἶναι οὔτε ταυτολογία, ἔπεται ὅτι εἶναι σχετική.

Ἔστω π.χ. ὅτι ζητοῦμεν νά εὕρωμεν τό εἶδος τῆς παραστάσεως:

$$(p \vee \bar{q}) \wedge (p \Rightarrow q).$$

Διὰ νά λάβη αὕτη τιμήν ἀληθείας y , ἀρκεῖ π.χ. ή $p \Rightarrow q$ νά λάβη τιμήν ἀληθείας y καί πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ ή p νά λάβη τιμήν ἀληθείας α καί ή q νά λάβη τιμήν ἀληθείας y . Οὕτω, ή δοθεῖσα παράστασις δέν εἶναι ταυτολογία.

Τώρα, διὰ νά λάβη ή δοθεῖσα παράστασις τιμήν ἀληθείας α , πρέπει ἐκάστη τῶν $p \vee \bar{q}$ καί $p \Rightarrow q$ νά λάβη τιμήν ἀληθείας α . Μία περίπτωση, καθ' ἣν ή $p \Rightarrow q$ λαμβάνει τιμήν ἀληθείας α , εἶναι ή p νά λάβη τιμήν ἀληθείας y καί ή q νά λάβη τιμήν ἀληθείας α . Ἡ ἀνάλυσις, ὅμως, αὕτη ὁδηγεῖ εἰς ἀντίφασιν (διατί;). Μία ἄλλη περίπτωση, καθ' ἣν ή $p \Rightarrow q$ λαμβάνει τιμήν ἀληθείας α , εἶναι ή p νά λάβη τιμήν ἀληθείας y καί ή q νά λάβη τιμήν ἀληθείας ἐπίσης y . Ἡ ἀνάλυσις αὕτη δέν ὁδηγεῖ εἰς ἀντίφασιν (διατί;) καί συνεπῶς ή δοθεῖσα παράστασις δέν εἶναι αὐτοαντίφασις. Ἐξ αὐτῶν ἔπεται ὅτι ή δοθεῖσα παράστασις εἶναι σχετική.

5.13. Μορφή ενός διαλογισμού επί προτάσεων.⁽¹⁾

Καλοῦμεν **μορφήν** ενός δοθέντος διαλογισμού επί προτάσεων τόν διαλογισμόν επί παραστάσεων, ὅστις προκύπτει ἐκ τοῦ δοθέντος διαλογισμοῦ, ἀντικαθιστῶντες τὰς διαφόρους ἀπλᾶς προτάσεις αὐτοῦ μέ (προτασιακᾶς) μεταβλητάς.

Εἶναι προφανές ὅτι κάθε διαλογισμός ἐπί προτάσεων ἔχει μίαν, καί μόνον μίαν, μορφήν. Δηλαδή, διὰ κάθε δοθέντα διαλογισμόν ἐπί προτάσεων ὑπάρχει ἓνας, καί μόνον ἓνας, διαλογισμός ἐπί παραστάσεων, ὅστις εἶναι ἡ μορφή τοῦ δοθέντος διαλογισμοῦ.

— Εἰς τὰ ἐπόμενα παραδείγματα, τὰς ὑποθέσεις: $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ ενός δοθέντος διαλογισμοῦ ἐπί προτάσεων θά γράφωμεν ἄνωθεν μιᾶς ὀριζοντίου γραμμῆς καί κάτωθεν αὐτῆς τό συμπέρασμα: Σ .

Παράδειγμα 1. "Εστω ὁ διαλογισμός:

Y_1 : Ἐάν ἡ Κρήτη εἶναι νῆσος καί ὁ 7 ἄρτιος, τότε τό Παρίσι εἶναι εἰς τήν Ἀγγλίαν.

Y_2 : Ἐάν ὁ 7 δέν εἶναι ἄρτιος, τότε τό Παρίσι εἶναι εἰς τήν Ἀγγλίαν καί ἐάν ἡ Κρήτη εἶναι νῆσος, τότε ὁ 7 εἶναι πρῶτος.

Y_3 : Ἡ Κρήτη δέν εἶναι νῆσος καί ὁ 7 εἶναι πρῶτος.

Σ : Τό Παρίσι δέν εἶναι εἰς τήν Ἀγγλίαν εἴτε ὁ 7 εἶναι πρῶτος.

— θέτοντες:

p ἀντί: <<Ἡ Κρήτη εἶναι νῆσος>>

q ἀντί: <<Ὁ 7 εἶναι ἄρτιος>>

r ἀντί: <<Τό Παρίσι εἶναι εἰς τήν Ἀγγλίαν>>

καί t ἀντί: <<Ὁ 7 εἶναι πρῶτος>>,

εὐρίσκομεν ὅτι ἡ μορφή τοῦ δοθέντος διαλογισμοῦ εἶναι ἡ ἑξῆς:

$p \wedge q \Rightarrow r, (\bar{q} \Rightarrow r) \wedge (p \Rightarrow t), \bar{p} \wedge t \therefore \bar{r} \vee t.$

Παράδειγμα 2. "Εστω ὁ διαλογισμός:

Y_1 : Ὁ 3 διαιρεῖ τόν 10 καί ὁ 9 εἶναι περιττός.

Y_2 : Ἐάν ὁ 3 διαιρῇ τόν 10, τότε ὁ 9 δέν εἶναι περιττός.

Σ : Ὁ 3 δέν διαιρεῖ τόν 10.

— θέτοντες:

p ἀντί: <<Ὁ 3 διαιρεῖ τόν 10>>

καί q ἀντί: <<Ὁ 9 εἶναι περιττός>>,

εὐρίσκομεν ὅτι ἡ μορφή τοῦ δοθέντος διαλογισμοῦ εἶναι ἡ ἑξῆς:

$p \wedge q, p \Rightarrow \bar{q} \therefore \bar{p}.$

(1) Δηλαδή, τοῦ ὁποίου αἱ ὑποθέσεις καί τό συμπέρασμα εἶναι προτάσεις.

5.14. Η έννοια του ισχυρού διαλογισμού επί προτάσεων.

Ένας διαλογισμός επί προτάσεων λέγουμεν ότι είναι **ισχυρός** (άντιστοιχως, **άνισχυρος**) εάν, καί μόνον εάν, η μορφή του είναι ένας ισχυρός (άντιστοιχως άνισχυρος) διαλογισμός (§ 5.2).

Ούτω η μελέτη της ισχυρότητας (άντιστοιχως, άνισχυρότητας) των διαλογισμών επί προτάσεων ανάγεται εις την μελέτην της ισχυρότητας (άντιστοιχως, άνισχυρότητας) των διαλογισμών επί παραστάσεων.

Ένας ισχυρός διαλογισμός επί προτάσεων $Y_1, Y_2, \dots, Y_n \vdash \Sigma$ συμβολίζεται, όπως καί ένας ισχυρός διαλογισμός επί παραστάσεων (§ 5.2) μέ:

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_n \vdash \Sigma$$

καί διαβάζεται:

« $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ παράγουν Σ »

ή « $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ ὁθεν (ή ἄρα) Σ ».

Εἰς τήν περίπτωσιν ὅπου: $Y_1, Y_2, \dots, Y_n \vdash \Sigma$ λέγουμεν ὅτι ἡ πρότασις Σ εἶναι **μία ισχυρά συνέπεια** ἢ **μία λογική συνέπεια** ἢ **έν λογικόν συμπέρασμα** τῶν προτάσεων: $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$.

Παράδειγμα 1. Ἐστω ὁ διαλογισμός:

Y_1 : Ἐάν ὁ 7 εἶναι πρῶτος, τότε ὁ 7 δέν διαιρεῖ τόν 21.

Y_2 : Ὁ 7 διαιρεῖ τόν 21.

Σ : Ὁ 7 δέν εἶναι πρῶτος.

— θέτοντες:

p ἀντί: «ὁ 7 εἶναι πρῶτος»

καί q ἀντί: «ὁ 7 διαιρεῖ τόν 21»,

εὐρίσκομεν ὅτι ἡ μορφή τοῦ δοθέντος διαλογισμοῦ, εἶναι:

$$p \Rightarrow \bar{q}, q \cdot \bar{p}.$$

Ἐπειδή ὁ διαλογισμός αὐτός εἶναι ισχυρός (§ 5.4, m.t.), ἔπεται ὅτι καί ὁ δοθείς διαλογισμός: $Y_1, Y_2, \cdot \Sigma$ εἶναι ισχυρός (ἂν καί τό συμπέρασμά του εἶναι ψευδές), ἥτοι: $Y_1, Y_2 \vdash \Sigma$.

Παράδειγμα 2. Ἐστω ὁ διαλογισμός:

Y_1 : Ἐάν ὁ 7 εἶναι μικρότερος τοῦ 4, τότε ὁ 7 δέν εἶναι πρῶτος.

Y_2 : Ὁ 7 δέν εἶναι μικρότερος τοῦ 4.

Σ : Ὁ 7 εἶναι πρῶτος.

— θέτοντες:

p ἀντί: «ὁ 7 εἶναι μικρότερος τοῦ 4»

καί q ἀντί: «ὁ 7 εἶναι πρῶτος»,

εὐρύσκομεν ὅτι ἡ μορφή τοῦ δοθέντος διαλογισμοῦ, εἶναι:

$$p \Rightarrow \bar{q}, \bar{p} \cdot q.$$

Ἐπειδὴ ὁ διαλογισμὸς αὐτὸς εἶναι ἀνίσχυρος (§ 5.12, παρ. 1) ἔπεται ὅτι καὶ ὁ δοθεὶς διαλογισμὸς εἶναι ἀνίσχυρος (ἂν καὶ τὸ συμπέρασμά του εἶναι ἀληθές).

Παράδειγμα 3. Ἐστω ὁ διαλογισμὸς:

Y_1 : Ὁ 3 εἶναι ἄρτιος εἴτε ὁ 4 εἶναι ἄρτιος.

Y_2 : Ὁ 3 δὲν εἶναι ἄρτιος.

Σ : Ὁ 4 εἶναι ἄρτιος.

— θέτοντες:

p ἀντί: «ὁ 3 εἶναι ἄρτιος»

καὶ q ἀντί: «ὁ 4 εἶναι ἄρτιος»,

εὐρύσκομεν ὅτι ἡ μορφή τοῦ δοθέντος διαλογισμοῦ εἶναι:

$$p \vee q, \bar{p} \cdot q.$$

Ἐπειδὴ ὁ διαλογισμὸς αὐτὸς εἶναι ἰσχυρὸς (§ 5.4, διαζ. συλ.), ἔπεται ὅτι καὶ ὁ δοθεὶς διαλογισμὸς εἶναι ἰσχυρὸς (ὅλαι αἱ ὑποθέσεις του εἶναι ἀληθεῖς καὶ τὸ συμπέρασμά του εἶναι ἀληθές).

— Σχετικῶς μὲ τούτους διαλογισμοὺς ἐπὶ προτάσεων σημειοῦμεν γενικῶς ὅτι:

α) Ἡ ἰσχυρότης ἐνὸς διαλογισμοῦ δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰς τιμὰς ἀληθείας, οὔτε ἀπὸ τὸ περιεχόμενον ἐκάστης τῶν προτάσεων, αἱ ὁποῖαι ὑπεισέρχονται εἰς τὸν διαλογισμόν, ἀλλὰ ἀπὸ τὴν μορφήν τοῦ διαλογισμοῦ.

β) Ἐάν ἓνας διαλογισμὸς εἶναι ἰσχυρὸς, τότε δὲν ἔπεται ἀναγκαιῶς ὅτι τὸ συμπέρασμά του εἶναι ἀληθές (δυνατὸν νὰ εἶναι ἀληθές, δυνατὸν ὅμως νὰ εἶναι καὶ ψευδές).

γ) Ἡ ἀλήθεια τοῦ συμπεράσματος ἐνὸς διαλογισμοῦ δὲν εἶναι οὔτε ἀναγκαία οὔτε ἱκανὴ συνθήκη διὰ τὴν ἰσχυρότητα τοῦ διαλογισμοῦ.

δ) Ἐάν τὸ συμπέρασμα ἐνὸς διαλογισμοῦ εἶναι ψευδές, τότε ἢ ὁ διαλογισμὸς εἶναι ἀνίσχυρος ἢ μίᾳ τουλάχιστον τῶν ὑποθέσεών του εἶναι ψευδής (διατί;).

ε) Διὰ νὰ ἐξασφαλισθῇ ἡ ἀλήθεια τοῦ συμπεράσματος ἐνὸς διαλογισμοῦ, ἀπαιτεῖται ἡ ικανοποίησις τῶν ἐξῆς δύο συνθηκῶν: ὁ διαλογισμὸς νὰ εἶναι ἰσχυρὸς καὶ αἱ ὑποθέσεις του ἀληθεῖς (διατί;).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

56. Διαπιστώσατε διά τῶν πινάκων τιμῶν ἀληθείας ὅτι ἕκαστος ἐκ τῶν κάτωθι διαλογισμῶν εἶναι ἰσχυρός:

- | | |
|--|--|
| 1) $p \Leftrightarrow q, q \therefore p$ | 4) $p \Rightarrow \bar{q}, \bar{p} \Rightarrow r \therefore q \Rightarrow r$ |
| 2) $p \Rightarrow \bar{q}, r \Rightarrow q, r \therefore \bar{p}$ | |
| 3) $p \Rightarrow q, r \Rightarrow \bar{q} \therefore r \Rightarrow \bar{p}$ | |
| | 5) $p \wedge q \Rightarrow r, q \therefore p \Rightarrow r$ |

57. Εὑρετε διά τῶν πινάκων τιμῶν ἀληθείας ποῖος ἐκ τῶν κάτωθι διαλογισμῶν εἶναι ἰσχυρός καί ποῖος εἶναι ἀνίσχυρος:

- 1) $p \Rightarrow q, \bar{p} \therefore \bar{q}$
- 2) $p \Rightarrow q \wedge r, \bar{q} \therefore \bar{p}$
- 3) $p \Rightarrow (\bar{r} \Rightarrow \bar{q}), \bar{r} \Rightarrow p \wedge q \therefore r$
- 4) $p \Rightarrow \bar{q}, \bar{r} \Rightarrow \bar{q} \therefore p \Rightarrow \bar{r}$
- 5) $(p \wedge q) \vee (r \wedge p), \bar{r} \therefore \bar{q} \Rightarrow \bar{r}$
- 6) $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s), \bar{q} \vee \bar{s} \therefore \bar{p} \vee \bar{r}$
- 7) $p \Rightarrow q \vee r, r \wedge s \Rightarrow t \therefore p \Rightarrow t$
- 8) $p \Rightarrow q \wedge r, r \vee s \Rightarrow t \therefore p \Rightarrow t$
- 9) $p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r), p \Rightarrow q \therefore p \Rightarrow r$
- 10) $p \Leftrightarrow (q \Rightarrow r), r \Rightarrow \bar{p} \therefore r \Rightarrow \bar{q}$

58. Βάσει τῆς μεταξὺ διαλογισμῶν καί ταυτολογιῶν ὑπαρχούσης σχέσεως, διαπιστώσατε ὅτι ἕκαστος ἐκ τῶν κάτωθι διαλογισμῶν εἶναι ἰσχυρός:

- 1) $p \vee q, \bar{q} \vee r \therefore p \vee r$
- 2) $p \vee (q \wedge r), p \Rightarrow r \therefore r$
- 3) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r, \bar{p} \therefore r$
- 4) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r), q \wedge r \Rightarrow t \therefore p \Rightarrow (q \Rightarrow t)$
- 5) $p \Rightarrow q \wedge r, \bar{q} \therefore \bar{p}$

59. Εἰς τὰς κάτωθι ἀποδείξεις δικαιολογήσατε τὴν ἐμφάνισιν ἑκάστου ὁρου:

- 1) $p \vee (q \Rightarrow s), \bar{r} \Rightarrow (s \Rightarrow t), p \Rightarrow r, \bar{r} \vdash q \Rightarrow t.$

Ἀπόδειξις.

- (1) $p \vee (q \Rightarrow s)$
- (2) $\bar{r} \Rightarrow (s \Rightarrow t)$
- (3) $p \Rightarrow r$
- (4) $\bar{r}$
- (5) $\bar{p}$
- (6) $q \Rightarrow s$
- (7) $s \Rightarrow t$
- (8) $q \Rightarrow t$

- 2) $p \wedge q \Rightarrow (p \Rightarrow s \wedge t), (p \wedge q) \wedge r \vdash s \vee t.$

- Απόδειξις.**
- (1) $p \wedge q \Rightarrow (p \Rightarrow s \wedge t).$
 - (2) $(p \wedge q) \wedge r$
 - (3) $p \wedge q$
 - (4) $p \Rightarrow s \wedge t$
 - (5) p
 - (6) $s \wedge t$
 - (7) s
 - (8) $s \vee t$

3) $\overline{p \wedge q} \Rightarrow r, q \vdash \overline{s \wedge r}.$

- Απόδειξις.**
- (1) $\overline{p \wedge q} \Rightarrow r$
 - (2) q
 - (3) $q \vee p$
 - (4) $p \vee q$
 - (5) $\overline{p \wedge q}$
 - (6) r
 - (7) $r \vee s$
 - (8) $s \vee r$
 - (9) $\overline{s \wedge r}$

60. Είς τας κάτωθι αποδείξεις δικαιολογήσατε τήν εμφάνισιν ἐκάστου ὅρου:

- 1) $(p \vee \overline{q}) \vee r \Rightarrow [s \Rightarrow (t \Leftrightarrow f)], p \vee \overline{q} \Rightarrow [(f \Leftrightarrow g) \Rightarrow h],$
 $p \Rightarrow [(t \Leftrightarrow f) \Rightarrow (f \Leftrightarrow g)], p \vdash s \Rightarrow h.$

- Απόδειξις.**
- (1) $(p \vee \overline{q}) \vee r \Rightarrow [s \Rightarrow (t \Leftrightarrow f)]$
 - (2) $p \vee \overline{q} \Rightarrow [(f \Leftrightarrow g) \Rightarrow h]$
 - (3) $p \Rightarrow [(t \Leftrightarrow f) \Rightarrow (f \Leftrightarrow g)]$
 - (4) p
 - (5) $p \vee \overline{q}$
 - (6) $(p \vee \overline{q}) \vee r$
 - (7) $s \Rightarrow (t \Leftrightarrow f)$
 - (8) $(t \Leftrightarrow f) \Rightarrow (f \Leftrightarrow g)$
 - (9) $s \Rightarrow (f \Leftrightarrow g)$
 - (10) $(f \Leftrightarrow g) \Rightarrow h$
 - (11) $s \Rightarrow h$

- 2) $p \vee q \Rightarrow r, p, \overline{q} \Rightarrow \overline{s} \Rightarrow \overline{p}, r \Rightarrow (p \Rightarrow t) \vdash s \vee t.$

- Απόδειξις.**
- (1) $p \vee q \Rightarrow r$
 - (2) p
 - (3) $\overline{q} \Rightarrow \overline{s} \Rightarrow \overline{p}$
 - (4) $r \Rightarrow (p \Rightarrow t)$
 - (5) $\overline{p}$

- (6) $\overline{\overline{q}} \Rightarrow \overline{s}$
 (7) $q \Rightarrow s$
 (8) $p \vee q$
 (9) r
 (10) $p \Rightarrow t$
 (11) $t \vee s$
 (12) $s \vee t$

61. 'Αποδείξτε ότι:

- 1) $p \vee q \Rightarrow r \wedge s, \overline{r} \vdash \overline{q}$.
- 2) $p \Rightarrow q, r \Rightarrow s, \overline{q} \vee \overline{s}, p, t \wedge f \Rightarrow r \vdash \overline{t} \wedge \overline{f}$.
- 3) $t \wedge (f \vee g), t \wedge g \Rightarrow \overline{h} \vee \overline{w}, \overline{h} \vee \overline{w} \Rightarrow \overline{t} \wedge \overline{f} \vdash h \Leftrightarrow w$.
- 4) $q \Rightarrow (r \Rightarrow s), (r \Rightarrow s) \Rightarrow t, s \wedge p \Rightarrow \overline{g}, \overline{g} \Rightarrow (r \Leftrightarrow \overline{w}), \overline{t} \vee \overline{(r \Leftrightarrow \overline{w})} \vdash \overline{q} \vee \overline{(s \wedge p)}$.
- 5) $r \Rightarrow (s \Rightarrow \overline{r}), r \Leftrightarrow s \vdash \overline{r} \wedge \overline{s}$.

62. 'Αποδείξτε ότι:

- 1) $(p \Rightarrow q) \wedge r, (s \Rightarrow t) \wedge (r \Rightarrow s) \vdash t \vee q$.
- 2) $\overline{p} \vee q, \overline{r} \Rightarrow (\overline{s} \Rightarrow t), \overline{r}, \overline{t} \vee p \vdash s \vee q$.
- 3) $p, (q \Leftrightarrow r) \wedge \overline{r}, p \wedge \overline{q} \Rightarrow \overline{s} \vdash \overline{s}$.
- 4) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r), \overline{s} \Rightarrow (\overline{t} \Rightarrow f), \overline{s}, \overline{t} \vee \overline{p} \vdash \overline{r} \Rightarrow f$.
- 5) $p \Rightarrow (q \Leftrightarrow \overline{r}), s \Rightarrow (q \Leftrightarrow t), \overline{f} \wedge h, (p \wedge s) \vee f, h \Rightarrow (r \Leftrightarrow g) \vdash t \vee g$.

63. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα υποθετικής απόδειξης, δείξτε ότι:

- 1) $p \vee q \Rightarrow r \wedge s, s \vee t \Rightarrow f \vdash p \Rightarrow f$.
- 2) $p \wedge q \Leftrightarrow r, \overline{r} \Rightarrow \overline{p} \vee s, p \vdash \overline{s} \Rightarrow p \wedge q$.
- 3) $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s), p \wedge (r \vee \overline{t}) \vdash q \vee s$.
- 4) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r), \overline{s} \vee p, (q \Rightarrow r) \Rightarrow t \wedge f, s \vdash f \vee h$.
- 5) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r), q \Rightarrow (r \Rightarrow s) \vdash p \Rightarrow (q \Rightarrow s)$.

64. 'Αποδείξτε ότι εκάστη εκ των κάτωθι ομάδων παραστάσεων είναι άσυμβίβαστος:

- 1) $s \Rightarrow (t \Rightarrow u), u \Rightarrow \overline{u}, (p \Rightarrow s) \wedge (w \Rightarrow t), p \wedge w$.
- 2) $(t \Rightarrow \overline{p}) \wedge (p \Rightarrow q), q \Rightarrow t, \overline{r} \Rightarrow p, \overline{r}$.
- 3) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r), p \Rightarrow (t \Rightarrow u), p \wedge (q \vee t), \overline{r}, \overline{u}$.
- 4) $\overline{p} \Leftrightarrow \overline{q}, q \Leftrightarrow r, p, \overline{r} \wedge \overline{s}$.
- 5) $p \Rightarrow (q \Rightarrow \overline{r}), r \Rightarrow p \wedge q, (p \wedge r) \vee (s \wedge t), \overline{t} \vee \overline{s}$.

65. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της εις άτοπον απαγωγής, αποδείξτε ότι:

- 1) $p \Rightarrow q \wedge r, q \vee s \Rightarrow t, p \vee s \vdash t$.

- 2) $p \vee r, (r \Rightarrow s) \wedge (p \Rightarrow u) \vdash s \vee u$.
- 3) $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q), s \Rightarrow p \vee r \vdash s \Rightarrow q$.
- 4) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r), p \Rightarrow q, \bar{s} \Rightarrow r \vee p \vdash s \vee r$.
- 5) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r \wedge s, r \vee t \Rightarrow (s \Rightarrow p) \vdash p$.
- 6) $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow t), q \vee t \Rightarrow s, \bar{s} \vdash \bar{p} \wedge \bar{r}$.

66. Εύρετε διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀναλύσεως τό εἶδος ἐκάστου ἐκ τῶν κάτωθι διαλογισμῶν:

- 1) $p \Rightarrow q, r \Rightarrow s, q \vee r \therefore p \vee s$.
- 2) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r), q \Rightarrow (r \Rightarrow s) \therefore p \Rightarrow (q \Rightarrow s)$.
- 3) $p \Rightarrow q, \bar{r} \Rightarrow \bar{q} \therefore p \Rightarrow r$.
- 4) $t \Leftrightarrow u, u \Leftrightarrow p \wedge w, p \Leftrightarrow t \vee q, t \vee q \therefore t \wedge q$.
- 5) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r), q \Rightarrow (\bar{r} \Rightarrow t), r \vee t \Rightarrow s \therefore p \Rightarrow s$.

67. Διαπιστώσατε διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀναλύσεως ὅτι αἱ κάτωθι παραστάσεις εἶναι ταυτολογίαι:

- 1) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$.
- 2) $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$.
- 3) $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \Rightarrow (p \wedge r \Rightarrow q \wedge s)$.
- 4) $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \Rightarrow (p \vee r \Rightarrow q \vee s)$.
- 5) $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \Rightarrow p$.
- 6) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(\bar{p} \Rightarrow q) \Rightarrow q]$.
- 7) $(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow \bar{q})$.
- 8) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\bar{q} \wedge \bar{r} \Rightarrow \bar{r} \wedge \bar{p})$.
- 9) $p \Rightarrow [(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r] \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)$.
- 10) $[(p \vee q) \Rightarrow r] \Rightarrow [(r \vee s \Rightarrow t) \Rightarrow (p \Rightarrow t)]$.
- 11) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(r \Rightarrow t) \Rightarrow q] \Rightarrow ((r \Rightarrow p) \Rightarrow q)$.

68. Εύρετε διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀναλύσεως τό εἶδος ἐκάστης ἐκ τῶν κάτωθι παραστάσεων:

- 1) $(p \Rightarrow q \wedge r) \wedge [\bar{q} \Leftrightarrow (r \Rightarrow q)]$.
- 2) $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow q] \Rightarrow p \vee q$.
- 3) $(p \Rightarrow q) \wedge p \wedge (\bar{p} \vee \bar{q})$.
- 4) $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \wedge \bar{p}$.
- 5) $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow p$.

69. Ἀποδείξατε ὅτι ἕκαστος ἐκ τῶν κάτωθι διαλογισμῶν εἶναι ἰσχυρός:

- 1) Y_1 : Ἐάν τό Παρίσι εἶναι εἰς τήν Ἀγγλίαν, τότε ὁ 5 εἶναι περριττός.
- Y_2 : Ὁ 5 εἶναι ἄρτιος.

Σ : Τό Παρίσι δέν εἶναι εἰς τήν Ἀγγλίαν.

2) Y_1 : Τό Παρίσι είναι εις τήν Γαλλίαν.

Y_2 : 'Εάν τό Παρίσι είναι εις τήν Γαλλίαν, τότε τό Λονδῖνον
είναι εις τήν Γερμανίαν.

Σ : Τό Λονδῖνον είναι εις τήν Γερμανίαν.

3) Y_1 : 'Ο 3 είναι περιττός εἴτε $2 = 7$.

Y_2 : 'Ο 3 είναι ἄρτιος.

Σ : $2 = 7$.

4) Y_1 : 'Εάν $3 > 7$, τότε $7 > 2$ καί εάν ὁ 5 είναι περιττός, τότε ὁ
3 είναι ἄρτιος.

Y_2 : $3 > 7$ εἴτε ὁ 5 είναι περιττός.

Σ : $7 > 2$ εἴτε ὁ 3 είναι ἄρτιος.

70. 'Αποδείξατε ὅτι ἕκαστος ἐκ τῶν κάτωθι δύο διαλογισμῶν
είναι ἀνίσχυρος:

1) Y_1 : 'Εάν τό Παρίσι είναι εις τήν Γαλλίαν, τότε τό Λονδῖνον
δέν είναι εις τήν 'Αγγλίαν.

Y_2 : Τό Παρίσι δέν είναι εις τήν Γαλλίαν.

Σ : Τό Λονδῖνον είναι εις τήν 'Αγγλίαν.

2) Y_1 : 'Εάν ἡ Κρήτη είναι νῆσος, τότε ὁ 7 είναι ἄρτιος.

Y_2 : 'Εάν τό Λονδῖνον δέν είναι εις τήν 'Αγγλίαν, τότε ὁ 7 εἴ-
ναι ἄρτιος.

Σ : 'Εάν ἡ Κρήτη είναι νῆσος, τότε τό Λονδῖνον δέν είναι εις
τήν 'Αγγλίαν.

71. Εὑρετε ποῖος ἐκ τῶν κάτωθι διαλογισμῶν είναι ἰσχυρός καί
ποῖος είναι ἀνίσχυρος:

1) Y_1 : 'Εάν ὁ 3 είναι περιττός, τότε ὁ 2 είναι ἄρτιος.

Y_2 : 'Ο 3 είναι ἄρτιος.

Σ : 'Ο 2 είναι περιττός.

2) Y_1 : 'Εάν ὁ 5 είναι ἄρτιος, τότε ὁ 3 είναι ἄρτιος.

Y_2 : 'Εάν τό Λονδῖνον είναι εις τήν 'Αγγλίαν, τότε ὁ 3 είναι

περιττός.

Y_3 : Τό Λονδῖνον εἶναι εἰς τήν Ἀγγλίαν.

Σ : Ὁ 5 εἶναι περιττός.

3) Y_1 : Τό Παρίσι εἶναι εἰς τήν Γαλλίαν εἴτε ὁ 4 εἶναι περιττός.

Y_2 : Ὁ 4 εἶναι ἄρτιος ἐάν, καί μόνον ἐάν, τό Παρίσι δέν εἴ-
ναι εἰς τήν Γαλλίαν.

Y_3 : Ἐάν ὁ 4 εἶναι περιττός, τότε τό Λονδῖνον εἶναι πρω-
τεύουσα τῆς Γαλλίας.

Σ : Ὁ 4 εἶναι ἄρτιος καί τό Λονδῖνον εἶναι πρωτεύουσα τῆς
Γαλλίας.

☆☆☆☆☆

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Κεφάλαιον 6

ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΙ ΤΥΠΟΙ - ΠΟΣΟΔΕΙΚΤΑΙ

6.1. Προτασιακοί τύποι - Κατηγορήματα.

Προτασιακός τύπος ή προτασιακή συνάρτησις μιᾶς μεταβλητῆς καλεῖται κάθε ἔκφρασις, ἡ ὁποία περιέχει μίαν μεταβλητὴν καὶ ἡ ὁποία καθίσταται μία πρότασις, ὅταν ἡ ἐν λόγω μεταβλητὴ ἀντικατασταθῇ μέ ἓν οἰονδήποτε στοιχεῖον ἐνός ὁρισμένου συνόλου (περίον μεταβολῆς τῆς μεταβλητῆς, § 0.9).

Γενικώτερον, προτασιακός τύπος ἢ προτασιακή συνάρτησις δύο, τριῶν κ.λ.π. μεταβλητῶν καλεῖται κάθε ἔκφρασις, ἡ ὁποία περιέχει δύο, τρεῖς κ.λ.π. μεταβλητάς καὶ ἡ ὁποία καθίσταται μία πρότασις, ὅταν αἱ ἐν λόγω μεταβληταὶ ἀντικατασταθοῦν μέ οἰαδήποτε στοιχεῖα δύο τριῶν κ.λ.π. ὁρισμένων συνόλων, ἀντιστοίχως.

Εἰς τό παρόν κεφάλαιον τοῦς προτασιακοῦς τύπους μιᾶς μεταβλητῆς x θά συμβολίζωμεν μέ:

$$p(x), q(x), r(x), \dots \quad (1)$$

δύο μεταβλητῶν x καὶ y μέ:

$$p(x,y), q(x,y), r(x,y), \dots \quad (2)$$

κ.λ.π.

Ἡ μεταβλητὴ x , τό ζεύγος τῶν μεταβλητῶν (x,y) κ.λ.π. λέγεται καὶ **ὄρισμα** τῶν προτασιακῶν τύπων (1), (2), κ.λ.π., ἀντιστοίχως. Τό ὄρισμα ἐνός προτασιακοῦ τύπου μιᾶς μεταβλητῆς διατρέχει ἐν σύνολον ἀντικειμένων, δύο μεταβλητῶν ἐν σύνολον ζευγῶν ἀντικειμένων κ.λ.π.⁽¹⁾. Τό σύνολον αὐτό (ἀντικειμένων, ζευγῶν ἀντι-

(1) Ἐνταῦθα, εἰς ἐν ζεύγος, εἰς μίαν τριάδα κ.λ.π. ἀντικειμένων λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν καὶ τὴν τάξιν καθ' ἣν θεωροῦνται τὰ ἀντικείμενα, δηλαδή πρόκειται, ὡς λέγομεν, περί διατεταγμένων ζευγῶν, διατεταγμένων τριάδων κ.λ.π.

κειμένων κ.λ.π.) καλεῖται **πεδίου ὀρισμοῦ** ἢ **σύνολον ἀναφορᾶς** τοῦ προτασιακοῦ τύπου. Λέγομεν, ἐπίσης, ὅτι ὁ προτασιακός τύπος εἶναι **ὠρισμένος** ἐπ' αὐτοῦ τοῦ συνόλου.

Εἰς τοὺς συμβολισμούς: $p(x)$, $p(x,y)$, κ.λ.π. τὸ p παριστᾷ μίαν ὁμάδα λέξεων (ἢ καὶ ἄλλων γνωστῶν συμβόλων), αἱ ὁποῖαι, ὡς λέγομεν, ἐκφράζουν μίαν **ιδιότητα**, ἣτις ἀποδίδεται (ἀναφέρεται) εἰς ἓν ἀντικείμενον, εἰς δύο ἀντικείμενα κ.λ.π., ἀντιστοίχως. Μία τοιαύτη ιδιότης λέγεται καὶ **κατηγορημα** μιᾶς θέσεως, δύο θέσεων κ.λ.π., ἀντιστοίχως. Ἐν κατηγορημα μιᾶς θέσεως, δύο θέσεων κ.λ.π. συμβολίζεται καὶ μέ:

$p()$, $p(,)$ κ.λ.π., ἀντιστοίχως.

Ἐν κατηγορημα δύο, τριῶν κ.λ.π. θέσεων, δύναται νά ἐκφράζη, ὡς λέγομεν, μίαν «σχέσιν» μεταξὺ δύο, τριῶν κ.λ.π. ἀντικειμένων, ἀντιστοίχως (βλέπε κατωτέρω παραδείγματα).

Συμφωνοῦμεν τώρα ὅτι εἰς τοὺς προτασιακοὺς τύπους συμπεριλαμβάνονται καὶ αἱ (σταθεραὶ) προτάσεις, θεωροῦντες ταύτας ὡς προτασιακοὺς τύπους χωρὶς (μέ μηδέν) μεταβλητάς (κατηγορήματα μηδέν θέσεων). Ὡς πεδίου ὀρισμοῦ ἑνός τοιούτου προτασιακοῦ τύπου, δύναται νά θεωρηθῇ ἓν οἰονδήποτε σύνολον. Τοὺς ἓν λόγῳ προτασιακοὺς τύπους, εἰς τὸ παρόν κεφάλαιον, θά συμβολίζωμεν μέ:

Παράδειγμα 1. Ἡ ἐκφρασις:

$p(x)$: « x εἶναι ἄρτιος ἀριθμός»,

ὅπου ἡ μεταβλητὴ x διατρέχει τὸ σύνολον Z τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν: $0, \pm 1, \pm 2, \dots$, εἶναι ἓνας προτασιακός τύπος μιᾶς μεταβλητῆς (ὠρισμένος ἐπὶ τοῦ συνόλου Z). Ἐνταῦθα, τὸ $p()$ συμβολίζει τὸ κατηγορημα (μιᾶς θέσεως): «εἶναι ἄρτιος ἀριθμός».

Παράδειγμα 2. Ἡ ἐκφρασις:

$p(x, y)$: « x εἶναι μεγαλύτερος τοῦ y »,

ὅπου ἐκάστη τῶν μεταβλητῶν x καὶ y διατρέχει τὸ σύνολον R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, εἶναι ἓνας προτασιακός τύπος δύο μεταβλητῶν. Οὗτος εἶναι ὠρισμένος ἐπὶ τοῦ συνόλου, τοῦ ὁποῖου τὰ στοιχεῖα εἶναι ζεύγη πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἐνταῦθα, τὸ $p(,)$ συμβολίζει τὸ κατηγορημα (δύο θέσεων): «εἶναι μεγαλύτερος τοῦ».

Παράδειγμα 3. Ἡ ἐκφρασις:

$p(x, y)$: « x εἶναι σύζυγος τῆς y »,

ὅπου ἡ μεταβλητὴ x διατρέχει τὸ σύνολον τῶν ἀνδρῶν καὶ ἡ μεταβλητὴ y διατρέχει τὸ σύνολον τῶν γυναικῶν, εἶναι ἓνας προτασιακός τύπος δύο μεταβλητῶν. Οὗτος εἶναι ὠρισμένος ἐπὶ τοῦ συνόλου,

τοῦ ὁποῖου τὰ στοιχεῖα εἶναι ζεύγη ἀντικειμένων μέ πρῶτον ἀντικείμενον ἐκάστου ζεύγους ἔν στοιχεῖον ἐκ τοῦ συνόλου τῶν ἀνδρῶν καί δεύτερον ἔν στοιχεῖον ἐκ τοῦ συνόλου τῶν γυναικῶν. Ἐνταῦθα τό $p(,)$ συμβολίζει τό κατηγορήμα (δύο θέσεων): «εἶναι σύζυγος τῆς» .

— Ἐνας προτασιακός τύπος μιᾶς, δύο κ.λ.π. μεταβλητῶν, δέν εἶναι βεβαίως μία πρότασις, ἀλλά διά κάθε τιμὴν τοῦ ὁρίσματος αὐτοῦ (ἐκ τοῦ συνόλου ἀναφορᾶς του) καθίσταται μία πρότασις, ὅποτε καί λαμβάνει μίαν τελειῶς καθωρισμένην τιμὴν ἀληθείας α ἢ γ . Εἶναι προφανές ὅτι ἡ ἐν λόγῳ τιμὴ ἀληθείας ἐξαρτᾶται, ἐν γένει, ἐκ τῆς τιμῆς τοῦ ὁρίσματος.

Ἐστω, τώρα, $p(x)$ ἕνας προτασιακός τύπος μιᾶς μεταβλητῆς x . Ἐάν διά μίαν τιμὴν τοῦ x , ἔστω ξ , ἡ πρότασις $p(\xi)$ εἶναι ἀληθής, τότε, καί μόνον τότε, λέγομεν ὅτι: «τό ξ κατέχει τήν ιδιότητα p » ἢ ὅτι «τό ξ πληροῖ τήν ιδιότητα p ». Οὕτω, εἰς τό ἀνωτέρω παράδειγμα 1 ὁ 4 π.χ. κατέχει τήν ιδιότητα p , διότι ἡ πρότασις $p(4)$ εἶναι ἀληθής. Ὁ -7 π.χ. δέν κατέχει τήν ιδιότητα p , διότι ἡ πρότασις $p(-7)$ εἶναι ψευδής.

Ὁμοίως, ἔστω $p(x, y)$ ἕνας προτασιακός τύπος δύο μεταβλητῶν x καί y . Ἐάν διά μίαν τιμὴν τοῦ (x, y) , ἔστω (ξ, η) , ἡ πρότασις $p(\xi, \eta)$ εἶναι ἀληθής, τότε, καί μόνον τότε, λέγομεν ὅτι: «τό (ξ, η) κατέχει τήν ιδιότητα p » κ.ο.κ.

6.2. Παρατηρήσεις.

1. Δέν πρέπει νά συγχέωμεν τοὺς προτασιακοὺς τύπους μέ τὰς μεταβλητάς προτάσεις (προτασιακὰς μεταβλητάς). Μία μεταβλητὴ πρότασις εἶναι ἔν σύμβολον (συνήθως, γράμμα), δυνάμενον νά ἀντικατασταθῇ ὑπὸ μιᾶς (οἰασδήποτε) προτάσεως (§ 2.1), ἐνῶ ἕνας προτασιακός τύπος δέν ἀντικαθίσταται μέ προτάσεις, ἀλλὰ ὁ ἴδιος καθίσταται μία πρότασις, ὅταν δώσωμεν εἰς τό ὄρισμά του μίαν συγκεκριμένην τιμὴν (ἐκ τοῦ συνόλου ἀναφορᾶς του).

2. Ἐάν ἀντικαταστήσωμεν ἔν γράμμα, τό ὁποῖον συμβολίζει μίαν μεταβλητὴν εἰς ἕνα προτασιακόν τύπον, μέ ἔν ἄλλο γράμμα διάφορον ἐκείνων, τὰ ὁποῖα συμβολίζουν τὰς ἄλλας μεταβλητάς του (ἐάν ἔχη), τότε προκύπτει ἕνας προτασιακός τύπος ταυτόσημος τοῦ ἀρχικοῦ. Οὕτω, π.χ. οἱ συμβολισμοί: $p(x)$ καί $p(y)$ νοοῦνται ὡς ταυτόσημοι. Ὁμοίως, οἱ: $p(x, y)$ καί $p(z, y)$, $p(x, y)$ καί $p(z, \omega)$ κ.λ.π.

3. Εἰς τὰ Μαθηματικά μερικά κατηγορήματα παριστῶνται μέ εἰδικὰ σύμβολα, ὅπως π.χ.:

- α) Τό κατηγορήμα (δύο θέσεων): «είναι στοιχείον τοῦ» συμβολίζεται μέ: $\in(,)$, ἀπλούστερον μέ $\in$.
- β) Τό κατηγορήμα (δύο θέσεων): «είναι ἴσον μέ» συμβολίζεται μέ: $=(,)$, ἀπλούστερον μέ $=$.
- γ) Τό κατηγορήμα (δύο θέσεων): «είναι μεγαλύτερον τοῦ» συμβολίζεται μέ: $>(,)$, ἀπλούστερον μέ $>$ κ.λ.π.

6.3. Ἀρχικοί καί σύνθετοι προτασιακοί τύποι.

Συνδέοντες μέ τούς λογικούς συνδέσμους, ὡς καί τάς προτάσεις, δοθέντας προτασιακοὺς τύπους, αἱ προκύπτουσαι ἐκφράσεις εἶναι, προφανῶς, πάλιν προτασιακοὶ τύποι. Οὕτω, ἀναχωροῦντες ἐκ δεδομένων προτασιακῶν τύπων, π.χ. $p(x)$, $q(y)$, $r(z, \omega)$, δυνάμεθα τῇ βοηθείᾳ τῶν λογικῶν συνδέσμων νά κατασκευάσωμεν (σχηματίσωμεν) ἄλλους προτασιακοὺς τύπους, ὅπως π.χ.

$$\overline{p(x)}, p(x) \Rightarrow p(x), p(x) \wedge q(y), q(y) \Rightarrow r(z, \omega) \quad \text{κ.λ.π.}$$

Ἐξ αὐτῶν ἡ καί τῶν προηγουμένων δυνάμεθα κατὰ τόν ἴδιον τρόπον νά κατασκευάσωμεν ἄλλους κ.ο.κ., ὅπως π.χ.:

$$\overline{p(x)} \Rightarrow r(z, \omega), [r(z, \omega) \Leftrightarrow q(y)] \Rightarrow [p(x) \wedge q(y)] \quad \text{κ.λ.π.}$$

Οἱ δοθέντες προτασιακοὶ τύποι, ἐκ τῶν ὁποίων ἀναχωροῦμεν, λέγονται καί **ἀρχικοί** προτασιακοὶ τύποι. Οἱ δέ προκύπτοντες ἐξ αὐτῶν κατὰ τόν ὡς ἄνω τρόπον λέγονται καί **μικτοί** ἢ **σύνθετοι** προτασιακοὶ τύποι.

Παράδειγμα 1. Ἐστῶσαν οἱ προτασιακοὶ τύποι:

$$p(x): \langle\langle x \text{ εἶναι μαθητής} \rangle\rangle$$

$$\text{καί } q(y): \langle\langle y \text{ εἶναι μαθήτρια} \rangle\rangle.$$

Ἐξ αὐτῶν δυνάμεθα νά σχηματίσωμεν π.χ. τούς ἑξῆς προτασιακοὺς τύπους:

$$\overline{p(x)}: \langle\langle x \text{ δέν εἶναι μαθητής} \rangle\rangle$$

$$p(x) \wedge q(y): \langle\langle x \text{ εἶναι μαθητής καί } y \text{ εἶναι μαθήτρια} \rangle\rangle$$

$$p(x) \Rightarrow \overline{q(y)}: \langle\langle \text{Ἐάν } x \text{ εἶναι μαθητής, τότε } y \text{ δέν εἶναι μαθήτρια} \rangle\rangle.$$

— Ἀνωτέρω, τούς δοθέντας προτασιακοὺς τύπους, ἀντιμετωπίσαμεν, ἐν σχέσει μέ τούς λογικούς συνδέσμους, ὡς τί τό ἐνιαῖον. Εἶναι δυνατόν ὅμως, ἕνας δοθεῖς προτασιακός τύπος νά ἔχη τήν μορφήν ἐνός συνθέτου, θεωροῦντες ἄλλους ὡς ἀρχικούς. Κατά τήν συμβολικὴν παράστασιν τοιούτων δοθέντων προτασιακῶν τύπων πρέπει νά προσέχωμεν εἰς τόν συμβολισμόν τῶν μεταβλητῶν. Δίδομεν κατωτέρω μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 2. Ἐστω ὁ προτασιακός τύπος:

$$\langle\langle x \text{ εἶναι καθηγητής καί συγγραφεύς} \rangle\rangle.$$

Οὗτος σημαίνει:

« x είναι καθηγητής καὶ x είναι συγγραφεύς».

Συμβολίζοντας, τώρα, τό κατηγορήμα:

«είναι καθηγητής» μέ $p()$,

καί τό «είναι συγγραφεύς» μέ $q()$,

ὁ δοθείς προτασιακός τύπος δύναται νά συμβολισθῇ ὡς ἐξῆς:

$$p(x) \wedge q(x).$$

Παράδειγμα 3. "Εστω ὁ προτασιακός τύπος:

« x είναι καθηγητής καὶ y συγγραφεύς».

Οὗτος σημαίνει: « x είναι καθηγητής καὶ y είναι συγγραφεύς».

Συμβολίζοντας, τώρα, τά κατηγορήματα:

«είναι καθηγητής»

καί «είναι συγγραφεύς»,

ὡς καί εἰς τό προηγούμενον παράδειγμα, ὁ δοθείς προτασιακός τύπος δύναται νά συμβολισθῇ ὡς ἐξῆς:

$$p(x) \wedge q(y).$$

Παράδειγμα 4. "Εστω ὁ προτασιακός τύπος:

«Ἐάν x είναι ἄρτιος καὶ μεγαλύτερος τοῦ y ,

τότε ὁ x είναι μεγαλύτερος τοῦ z ».

Οὗτος σημαίνει:

«Ἐάν x είναι ἄρτιος καὶ x είναι μεγαλύτερος τοῦ y ,

τότε ὁ x είναι μεγαλύτερος τοῦ z ».

Συμβολίζοντας, τώρα, τό κατηγορήμα:

«είναι ἄρτιος» μέ $p()$

καί τό «είναι μεγαλύτερος τοῦ» μέ $q(,)$,

ὁ δοθείς προτασιακός τύπος δύναται νά συμβολισθῇ ὡς ἐξῆς:

$$p(x) \wedge q(x, y) \Rightarrow q(x, z).$$

6.4. Ποσοδεῖκται.

Α. Καθολινός ποσοδεῖκτης

"Εστω $p(x)$ ἕνας προτασιακός τύπος ὠρισμένος ἐπὶ ἑνός συνόλου M . Ἡ πρότασις, ἣτις εἶναι ἀληθής, ἐάν ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ M κατέχουν τήν ιδιότητα p (§ 6.1) καί ψευδής εἰς τὰς ἄλλας περιπτώσεις, συμβολίζεται μέ:

$$(\forall x)p(x) \quad (1)$$

καί διαβάζεται:

«διὰ κάθε x , $p(x)$ εἶναι ἀληθής»

ἢ «διὰ κάθε x , ἰσχύει $p(x)$ »

ἢ «δι' ὅλα τά x , ἰσχύει $p(x)$ ».

Τό σύμβολον: $\forall$ καλεῖται **καθολινός ποσοδεῖκτης** καί διαβάζε-

ται: «διὰ κάθε» ή «δι'όλα τά».

Είναι φανερόν ότι ή τιμή αλήθείας τής προτάσεως (1) δέν έ-
ξαρτάται έκ μιὰς έκάστης τών τιμών τής μεταβλητής x έκ τοῦ M .

Η πρότασις (1) συμβολίζεται καί ως έξής:

$$(\forall x, x \in M) p(x) \quad \text{ή} \quad (\forall x \in M) p(x) \\ \text{ή} \quad \forall x, p(x) \quad \text{ή} \quad \forall x \in M, p(x).$$

Παράδειγμα 1. "Εστω ό προτασιακός τύπος: « $x^2 + 1 > 0$ » ώρισμένος
έπί τοῦ συνόλου R τών πραγματικῶν αριθμῶν. Τότε:

$$(\forall x) (x^2 + 1 > 0)$$

είναι μία πρότασις αλήθης (διατί;).

Παράδειγμα 2. "Εστω ό προτασιακός τύπος: « $n + 2 > 10$ » ώρισμένος
έπί τοῦ συνόλου N τών φυσικῶν αριθμῶν. Τότε:

$$(\forall n) (n + 2 > 10)$$

είναι μία πρότασις ψευδής (διατί;).

Β. Ὑπαρξιακός ποσοδείκτης.

"Εστω, πάλιν, $p(x)$ ένας προτασιακός τύπος, ώρισμένος επί έ-
νός συνόλου M . Η πρότασις, ήτις είναι αλήθης, εάν έν τουλάχισ-
στον στοιχεῖον τοῦ M κατέχη τήν ιδιότητα p καί ψευδής είς τās
άλλας περιπτώσεις, συμβολίζεται μέ:

$$(\exists x) p(x) \quad (2)$$

καί διαβάζεται:

$$\begin{aligned} &\ll \text{υπάρχει } x, \text{ ώστε } p(x) \text{ αλήθης} \gg \\ &\text{ή} \ll \text{υπάρχει } x, \text{ ώστε νά ίσχύη: } p(x) \gg \\ &\text{ή} \ll \text{διὰ μερικά } x \text{ ίσχύει } p(x) \gg. \end{aligned}$$

Τό σύμβολον: $\exists$ καλεῖται **υπαρξιακός ποσοδείκτης** καί διαβάζε-
ται: «υπάρχει» ή «διὰ μερικά».

Η πρότασις (2) διαβάζεται ένίοτε καί ως έξής: «υπάρχει έν
 x τοιοῦτον, ώστε $p(x)$ ». Τότε, τό «έν» έχει τήν έννοιαν τοῦ
«τουλάχιστον έν» καί όχι τοῦ «έν καί μόνον έν».

Είναι φανερόν ότι ή τιμή αλήθείας τής προτάσεως (2) δέν έ-
ξαρτάται έκ μιὰς έκάστης τών τιμών τής μεταβλητής x έκ τοῦ M .

Η πρότασις (2) συμβολίζεται καί ως έξής:

$$(\exists x, x \in M) p(x) \quad \text{ή} \quad (\exists x \in M) p(x) \\ \text{ή} \quad \exists x: p(x) \quad \text{ή} \quad \exists x \in M: p(x).$$

Παράδειγμα 3. "Εστω ό προτασιακός τύπος: « $2^y < y + 4$ » ώρισμένος
έπί τοῦ συνόλου N τών φυσικῶν αριθμῶν. Τότε:

$$(\exists y) (2^y < y + 4)$$

είναι μία πρότασις αλήθης (διατί;).

Παράδειγμα 4. "Εστω ό προτασιακός τύπος: « $x^2 + 1 = 0$ » ώρισμένος

ἐπὶ τοῦ συνόλου R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Τότε:

$$(\exists x)(x^2 + 1 = 0)$$

εἶναι πρότασις ψευδής (διατί;).

Σημείωσις. Ἐστω $p(x)$ ἓνας προτασιακὸς τύπος ὁρισμένος ἐπὶ ἐνὸς συνόλου M . Ἐάν τό πλῆθος τῶν στοιχείων τοῦ M εἶναι ἓνας πεπερασμένος ἀριθμὸς (πεπερασμένον σύνολον) καὶ καλέσωμεν: $a_1, a_2, \dots, a_n$, τὰ στοιχεῖα αὐτοῦ, τότε, ὥς εἶναι φανερόν, ἰσχύουν αἱ ἐξῆς ἰσοδυναμίαι:

$$(\forall x)p(x) \Leftrightarrow p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge \dots \wedge p(a_n)$$

$$(\exists x)p(x) \Leftrightarrow p(a_1) \vee p(a_2) \vee \dots \vee p(a_n).$$

6.5. Ποσοδεῖκται καὶ προτασιακοὶ τύποι δύο ἢ περισσοτέρων μεταβλητῶν.

Ἐστω $p(x, y)$ ἓνας προτασιακὸς τύπος δύο μεταβλητῶν x καὶ y . Ἀντικαθιστῶντες τὴν μίαν μεταβλητὴν, π.χ. τὴν x , μέ μίαν τιμὴν τῆς, ἔστω ξ , προκύπτει ἡ ἐκφρασις: $p(\xi, y)$, ἥτις προφανῶς εἶναι ἓνας προτασιακὸς τύπος μιᾶς μεταβλητῆς y . Ἐπομένως, ἐκάστη ἐκ τῶν ἐκφράσεων:

$$(\forall y)p(\xi, y) \quad \text{καὶ} \quad (\exists y)p(\xi, y)$$

εἶναι μία πρότασις, τῆς ὁποίας ἡ τιμὴ ἀληθείας δέν ἐξαρτᾶται ἐκ μιᾶς ἐκάστης τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς y . Ἄρα, ἐκάστη ἐκ τῶν ἐκφράσεων:

$$(\forall y)p(x, y) \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad (\exists y)p(x, y) \quad (2)$$

καθίσταται μία πρότασις, ὅταν ἡ μεταβλητὴ x ἀντικατασταθῇ μέ μίαν οἰανδήποτε τιμὴν τῆς. Συνεπῶς, ἐκάστη ἐκ τῶν ἐκφράσεων αὐτῶν εἶναι ἓνας προτασιακὸς τύπος μιᾶς μεταβλητῆς x .

Οἱ ποσοδεῖκται $\forall$ καὶ $\exists$, εἰς τοὺς προτασιακοὺς τύπους (1) καὶ (2) ἀντιστοίχως, λέγομεν ὅτι **ἀναφέρονται** εἰς τὴν μεταβλητὴν y .

Βάσει τῶν προηγουμένων, ἐκάστη ἐκ τῶν ἐκφράσεων:

$$(\forall x)[(\forall y)p(x, y)] \quad \text{καὶ} \quad (\exists x)[(\forall y)p(x, y)],$$

αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἐκ τοῦ (1) καὶ τὰς ὁποίας θὰ γράφωμεν ἀπλούστερον, ἀντιστοίχως:

$$(\forall x)(\forall y)p(x, y) \quad \text{καὶ} \quad (\exists x)(\forall y)p(x, y),$$

εἶναι μία πρότασις, τῆς ὁποίας ἡ τιμὴ ἀληθείας δέν ἐξαρτᾶται ἐκ μιᾶς ἐκάστης τῶν τιμῶν τοῦ ὁρίσματος (x, y) . Ὁμοίως καὶ αἱ ἐκφράσεις:

$$(\forall x)(\exists y)p(x, y) \quad \text{καὶ} \quad (\exists x)(\exists y)p(x, y),$$

αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἐκ τοῦ (2).

Ἀναλόγως, εὐρίσκομεν ὅτι ἐκάστη ἐκ τῶν ἐκφράσεων:

$$(\forall x)p(x, y) \text{ και } (\exists x)p(x, y)$$

είναι ένας προτασιακός τύπος μιᾶς μεταβλητῆς y καὶ ὅτι ἐκάστη ἐκ τῶν ἐκφράσεων:

$$(\forall y)(\forall x)p(x, y), (\exists y)(\forall x)p(x, y)$$

$$(\forall y)(\exists x)p(x, y), (\exists y)(\exists x)p(x, y)$$

εἶναι μία πρότασις, τῆς ὁποίας ἡ τιμὴ ἀληθείας δέν ἐξαρτᾶται ἐκ μιᾶς ἐκάστης τῶν τιμῶν τοῦ ὁρίσματος (x, y) .

— Θεωροῦντες ἓνα προτασιακόν τύπον τριῶν, τεσσάρων κ.λ.π. μεταβλητῶν δυνάμεθα νὰ φθάσωμεν εἰς ἀνάλογα συμπεράσματα.

Παράδειγμα: Ἐστω ὁ προτασιακός τύπος: « $2\mu = \nu$ », ὅπου ἐκάστη τῶν μεταβλητῶν μ καὶ ν διατρέχει τό σύνολον N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Τότε:

α) Ἡ ἔκφρασις: $(\exists \mu)(2\mu = \nu)$ εἶναι ἓνας προτασιακός τύπος μιᾶς μεταβλητῆς ν . Οὗτος π.χ. διὰ $\nu = 6$ λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α , ἐνῶ π.χ. διὰ $\nu = 5$ λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας γ .

β) Ἡ ἔκφρασις: $(\forall \mu)(\exists \nu)(2\mu = \nu)$ εἶναι μία πρότασις ἀληθής (διατί;). Ἀντιθέτως ἡ ἔκφρασις: $(\exists \nu)(\forall \mu)(2\mu = \nu)$ εἶναι μία πρότασις ψευδής (διατί;).

— Ἀναχωροῦντες, τώρα, ἐκ δεδομένων (ἀρχικῶν) προτασιακῶν τύπων δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἄλλους συνθέτους προτασιακοὺς τύπους, ὅχι μόνον τῇ βοηθείᾳ τῶν λογικῶν συνδέσμων (§ 6.3), ἀλλὰ καὶ τῶν ποσοδεικτῶν. Οὕτω, ἀναχωροῦντες ἐκ τῶν προτασιακῶν τύπων: $p(x)$, $q(y)$ καὶ $r(z, \omega)$ δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν π.χ. τοὺς ἑξῆς (συνθέτους) προτασιακοὺς τύπους:

$$[(\exists x)p(x)] \vee q(y), [(\forall x)p(x)] \Rightarrow \overline{p(x)}, (\exists y)[p(x) \Leftrightarrow q(y)],$$

$$(\forall x)(\exists y)[p(x) \wedge r(z, \omega) \Rightarrow q(y) ((\forall z)r(z, \omega))], (\forall z)[\overline{r(z, \omega)}].$$

Ἐνας προτασιακός τύπος, ὅστις περιέχει καὶ ποσοδείκτας, λέγεται καὶ **ποσοδεικτινός** προτασιακός τύπος. Εἰδικῶς, μία πρότασις, ἥτις περιέχει καὶ ποσοδείκτας, λέγεται καὶ **ποσοδεικτική** πρότασις. Ποσοδεικτικαὶ προτάσεις εἶναι π.χ. αἱ ἑξῆς:

$$(\forall x)p(x), (\forall x)(\exists x)[\overline{p(x, y)}], [(\forall x)p(x)] \wedge [(\exists y)q(y)],$$

$$(\exists x)[((\forall y)p(x, y)) \Leftrightarrow ((\exists z)q(z))] \quad \text{κ.λ.π.}$$

Ἐπεκτείνοντες τὰς συμφωνίας τῆς § 1.6 διὰ τὴν ἰσχὺν τῶν λογικῶν συνδέσμων, συμφωνοῦντες ἀκόμη ὅτι οἱ ποσοδεῖνται μαζί μὲ τὸν λογικόν σύνδεσμον: — ἔχουν τὴν μικροτέραν δυνατὴν ἰσχύν, ἐπιτυχάνομεν μίαν ἀπλουστέραν γραφὴν τῶν ποσοδεικτῶν προτασιακῶν τύπων, παραλείποντες ἐξ αὐτῶν μερικὰς (ἴσον τό δυνατόν περισσοτέρας) παρενθέσεις ἢ καὶ ἀγκύλας. Οὕτω π.χ. ἀντί:

$$[(\forall x)p(x)] \vee q(y) \quad \text{θὰ γράφωμεν: } (\forall x)p(x) \vee q(y)$$

$[(\exists x)(\forall y)p(x, y)] \Rightarrow q(z)$ θά γράφωμεν: $(\exists x)(\forall y)p(x, y) \Rightarrow q(z)$
κ.λ.π.

Επίσης, αντί π.χ.

$\overline{[(\forall x)p(x)]}$ θά γράφωμεν: $\overline{(\forall x)p(x)}$
 $(\exists x) \overline{[p(x, y)]}$ θά γράφωμεν: $(\exists x)\overline{p(x, y)}$ κ.λ.π.

6.6. Παρατηρήσεις

1) Μία διαφορετική διάταξις τών ποσοδεικτῶν εἰς ἓνα ποσοδεικτικόν προτασιακόν τύπον ὀρίζει, ἐν γένει, ἓνα διαφορετικόν προτασιακόν τύπον.

Ἐστω π.χ. ὁ προτασιακός τύπος: $\langle\langle x + y = z \rangle\rangle$, ὅπου ἐκάστη τῶν μεταβλητῶν x , y καὶ z διατρέχει τό σύνολον R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Τότε, οἱ ἐξῆς δύο προτασιακοί τύποι:

$$(\forall x)(\exists y)(x + y = z) \text{ καί } (\exists y)(\forall x)(x + y = z)$$

δέν ἔχουν τήν ἰδίαν ἔννοιαν.

Ἐστω ἐπίσης ὁ προτασιακός τύπος: $\langle\langle x < y \rangle\rangle$, ὅπου ἐκάστη τῶν μεταβλητῶν x καὶ y διατρέχει τό σύνολον R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Τότε, ἡ πρότασις:

$$(\forall x)(\exists y)(x < y) \text{ εἶναι ἀληθής (διατί;),}$$

ἐνῶ ἡ πρότασις:

$$(\exists y)(\forall x)(x < y) \text{ εἶναι ψευδής (διατί;).}$$

2) Πολλάκις εἰς τὰ Μαθηματικά ἡ ἔκφρασις: $\langle\langle \text{ὑπάρχει ἓν, καί μόνον ἓν,} \rangle\rangle$ συμβολίζεται μέ: $\exists!$ ἢ μέ $\exists!$. Π.χ. συμβολίζοντες μέ N_2 τό σύνολον τῶν ἀρτίων φυσικῶν ἀριθμῶν, ἡ ἔκφρασις:

$$\exists! n \in N_2, \quad n \text{ πρῶτος}$$

εἶναι μία πρότασις ἀληθής.

3) Τά σύμβολα $\forall$ καὶ $\exists$ δέν πρέπει νά γράφωνται εἰς τὰ κείμενα, λαμβανόμενα ὡς σύμβολα στενογραφίας. Ὁ συμβολισμός εἰς τὰ Μαθηματικά δέν εἶναι μία μορφή στενογραφίας. Π.χ. δέν εἶναι ὀρθόν νά γράφωνται ἐκφράσεις ὅπως αἱ ἐξῆς:

$$\langle\langle \text{ἀποδείξατε ὅτι } \forall x, \text{ ἰσχύει: } |x|^2 = |x^2| \rangle\rangle$$

$$\text{ἢ } \langle\langle \exists \text{ περιφέρεια διερχομένη ἐκ τῶν κορυφῶν} \\ \text{ἐνός δοθέντος τριγώνου} \rangle\rangle \quad \text{κ.λ.π.}$$

6.7. Ἀκτίς ἐνός ποσοδείκτου. Δεσμευμένοι καί ἐλεύθεροι μεταβληταί.

Ἀκτίς ἐνός ποσοδείκτου, ἐμφανιζομένου εἰς ἓνα (ποσοδεικτικόν) προτασιακόν τύπον, λέγεται ὁ προτασιακός τύπος, εἰς τόν ὁποῖον ὁ ποσοδείκτης αὐτός ἀπευθύνεται. Εἰς τὰ κατωτέρω τρία πρῶ-

τα παραδείγματα (1, 2 και 3) έχουμε υπογραμμίσει την άκτινα του ποσοδείκτου x , ὅστις αναφέρεται εἰς τὴν μεταβλητὴν x καὶ εἰς τὰ ἐπόμενα τρία (4, 5 καὶ 6), τὴν άκτινα τοῦ ποσοδείκτου $\exists$, ὅστις αναφέρεται, ἐπίσης, εἰς τὴν μεταβλητὴν x :

1. $(\forall x) \underline{p(x)} \wedge q(y)$
2. $(\exists y) (\forall x) \underline{[p(x, y) \Rightarrow (\forall z) q(z)]}$
3. $(\forall x) (\forall y) \underline{[p(x, z) \wedge q(y, \omega)]} \vee (\exists x) p(x, z)$
4. $(\exists x) \underline{p(x, y)} \vee q(z)$
5. $(\exists x) (\forall y) p(x, y)$
6. $(\forall y) (\exists x) \underline{p(x, y)} \Rightarrow (\forall x) p(x, y)$

— Μία ἐμφάνισις μιᾶς μεταβλητῆς εἰς ἓνα προτασιακόν τύπον, λέγομεν ὅτι εἶναι:

α) Δεσμευμένη ἢ ἄλλως **φραγμένη**, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, ἡ ἐμφάνισις αὕτη πραγματοποιηθῇ εἰς τὴν άκτινα ἐνός ποσοδείκτου, ἀναφερομένου εἰς τὴν μεταβλητὴν αὐτὴν ἢ ἐντός τῆς παρενθέσεως τοῦ ἐν λόγῳ ποσοδείκτου,

β) ἐλευθέρα, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, ἡ ἐμφάνισις αὕτη τῆς μεταβλητῆς δέν εἶναι δεσμευμένη.

Π.χ. εἰς τόν ἀνωτέρω προτασιακόν τύπον (1) ἀμφότεραι αἱ ἐμφανίσεις τῆς μεταβλητῆς x εἶναι δεσμευμέναι, ἐνῷ ἡ ἐμφάνισις τῆς μεταβλητῆς y εἶναι ἐλευθέρα. Ἐπίσης, εἰς τόν ἀνωτέρω προτασιακόν τύπον (6) αἱ δύο πρῶται ἐμφανίσεις τῆς μεταβλητῆς y εἶναι δεσμευμέναι, ἐνῷ ἡ τρίτη ἐμφάνισις αὐτῆς εἶναι ἐλευθέρα. Εἰς τόν αὐτόν προτασιακόν τύπον ὅλαι αἱ ἐμφανίσεις τῆς μεταβλητῆς x εἶναι δεσμευμέναι.

— Μία μεταβλητὴ εἰς ἓνα προτασιακόν τύπον, λέγομεν ὅτι εἶναι:

α) δεσμευμένη ἢ ἄλλως **φραγμένη**, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, μία τουλάχιστον ἐμφάνισις τῆς μεταβλητῆς αὐτῆς εἶναι δεσμευμένη,

β) ἐλευθέρα, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, μία τουλάχιστον ἐμφάνισις τῆς μεταβλητῆς αὐτῆς εἶναι ἐλευθέρα.

Π.χ. εἰς τόν ἀνωτέρω προτασιακόν τύπον (1), ἡ μεταβλητὴ x εἶναι δεσμευμένη, ἐνῷ ἡ μεταβλητὴ y εἶναι ἐλευθέρα.

Εἶναι προφανές ὅτι εἰς μίαν ποσοδεικτικὴν πρότασιν δέν ὑπάρχουν ἐλεύθεραι μεταβληταί. Π.χ. εἰς τὴν ἀνωτέρω πρότασιν (5) ἀμφότεραι αἱ μεταβληταί x καὶ y εἶναι δεσμευμέναι.

Σημειοῦμεν ὅτι εἰς ἓνα καὶ τόν αὐτόν προτασιακόν τύπον μία μεταβλητὴ δύναται νά εἶναι ταυτοχρόνως δεσμευμένη καὶ ἐλευθέρα, ὅπως π.χ. ἡ μεταβλητὴ y εἰς τόν ἀνωτέρω προτασιακόν τύπον (6). Ἀντιθέτως, μία ὠρισμένη ἐμφάνισις μιᾶς μεταβλητῆς εἰς ἓνα καὶ

τόν αὐτόν προτασιακόν τύπον, δέν δύναται νά εἶναι ταυτοχρόνως καί δεσμευμένη καί ἐλευθέρα.

— Εἰς ἓνα δοθέντα προτασιακόν τύπον, ἀντικατάστασις μιᾶς ἐλευθέρας μεταβλητῆς του, ἔστω x , ὑπό μιᾶς τιμῆς της, π.χ. ξ , σημαίνει ἀντικατάστασιν ἐκάστης ἐλευθέρας ἐμφανίσεως τῆς x ὑπό τοῦ ξ . Εἶναι προφανές ὅτι: ἐάν εἰς ἓνα δοθέντα προτασιακόν τύπον ἀντικαταστήσωμεν ὅλας τὰς ἐλευθέρας μεταβλητάς του μέ συγκεκριμένους τιμάς αὐτῶν, τότε προκύπτει μία πρότασις. Ἐστω π.χ. ὁ προτασιακός τύπος:

$$(\forall x)(x \geq y) \Rightarrow (x + y > 15), \quad (1)$$

ὅπου ἐκάστη τῶν μεταβλητῶν του x καί y διατρέχει τό σύνολον N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Προφανῶς ἀμφότεραι αἱ μεταβληταί x καί y τοῦ προτασιακοῦ αὐτοῦ τύπου εἶναι ἐλεύθεραι. Ἀντικαθιστῶντες π.χ. τό x μέ τό 7 καί τό y μέ τό 1, ὁ προτασιακός τύπος (1) γίνεται:

$$(\forall x)(x \geq 1) \Rightarrow (7 + 1 > 15),$$

ἥτοι καθίσταται μία πρότασις ψευδῆς (διατί;). Ἐπίσης ἀντικαθιστῶντες π.χ. τό x μέ τό 10 καί τό y μέ τό 8 ὁ (1) γίνεται:

$$(\forall x)(x \geq 8) \Rightarrow (10 + 8 > 15),$$

ἥτοι καθίσταται μία πρότασις ἀληθῆς (διατί;).

Ὅπως εἶναι φανερόν, αἱ δεσμευμέναι καί αἱ ἐλεύθεραι ἐμφανίσεις μιᾶς καί τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς, εἰς ἓνα προτασιακόν τύπον, οὐδεμίαν σχέσιν ἔχουν μεταξύ των.

Σημειοῦμεν, τέλος, ὅτι ὁ προτασιακός τύπος π.χ.

$$(\exists y)p(x, y) \wedge (\forall z)q(z)$$

δύναται νά συμβολισθῇ καί ὡς ἑξῆς:

$$(\exists y)p(x, y) \wedge (\forall x)q(x).$$

Ἐπίσης, ἡ πρότασις π.χ:

$$(\exists x)p(x) \Rightarrow (\exists y)q(y)$$

δύναται νά συμβολισθῇ καί ὡς ἑξῆς:

$$(\exists x)p(x) \Rightarrow (\exists x)q(x).$$

6.8. Παραδείγματα συμβολικῆς παραστάσεως προτάσεων τῇ βοηθείᾳ καί τῶν ποσοδεικτῶν.

A) Αἱ τέσσαρες ἀπλαῖ μορφαί, τῶν καλουμένων εἰς τήν Κλασσικήν Λογικήν (Ἀριστοτέλης, 384 - 321), «κατηγορικῶν προτάσεων» μέ τοὺς ἀντιστοίχους συμβολισμούς των, εἶναι:

I. Γενική καταφατική.

(A): «Κάθε A εἶναι K »

ή, άλλως: «δέν υπάρχει Λ , τό όποϊον δέν εἶναι K ».

II. Γενική άρνητική.

(E): «Κάθε Λ δέν εἶναι K »

ή, άλλως: «δέν υπάρχει Λ , τό όποϊον εἶναι K » .

III. Μερική καταφατική.

(I): «Μερικά Λ εἶναι K »

ή, άλλως: «υπάρχουν Λ , τά όποῖα εἶναι K ».

IV. Μερική άρνητική.

(O): «Μερικά Λ δέν εἶναι K »

ή, άλλως: «υπάρχουν Λ , τά όποῖα δέν εἶναι K ».

Τά γράμματα Λ καί I εἶναι τά άρχικά φωνήεντα τοῦ Λατινικοῦ, ρήματος AFFIRMO, τό όποϊον σημαίνει: «καταφάσκω». Τά δέ E καί O εἶναι τά φωνήεντα τοῦ Λατινικοῦ, επίσης, ρήματος NEGO, τό όποϊον σημαίνει: «άποφάσκω (άρνοῦμαι)».

Ἡ, βάσει τοῦ προτασιακοῦ καί κατηγορικοῦ λογισμοῦ, συμβολική παράστασις τῶν άνωτέρω τεσσάρων προτάσεων, ἔχει ὡς ἑξῆς:

I. Γενική καταφατική (A): «Κάθε Λ εἶναι K », σημαίνει:

«διά κάθε x , εάν x εἶναι Λ , τότε x εἶναι K ».

Συμβολίζοντας, τώρα, τό κατηγορήμα:

«εἶναι Λ » μέ: $\lambda()$ (1)

καί τό: «εἶναι K » μέ: $k()$ (2)

ή δοθεῖσα γενική καταφατική πρότασις, δύναται νά συμβολισθῇ ὡς ἑξῆς:

$(\forall x) [\lambda(x) \Rightarrow k(x)]$.

Παράδειγμα 1. "Εστω ἡ πρότασις:

«Κάθε άκέραιος εἶναι ρητός».

Αὕτη σημαίνει ὅτι:

«διά κάθε x , εάν x εἶναι άκέραιος, τότε x εἶναι ρητός».

Συμβολίζοντας, τώρα, τό κατηγορήμα:

«εἶναι άκέραιος» μέ: $p()$ (3)

καί τό «εἶναι ρητός» μέ: $q()$, (4)

ή δοθεῖσα πρότασις δύναται νά συμβολισθῇ ὡς ἑξῆς:

$(\forall x) [p(x) \Rightarrow q(x)]$.

II. Γενική άρνητική (E): «Κάθε Λ δέν εἶναι K », σημαίνει:

«διά κάθε x , εάν x εἶναι Λ , τότε x δέν εἶναι K ».

Οὕτω, χρησιμοποιοῦντες τούς συμβολισμούς (1) καί (2), ἡ δοθεῖσα γενική άρνητική πρότασις δύναται νά συμβολισθῇ ὡς ἑξῆς:

$(\forall x) [\lambda(x) \Rightarrow \bar{k}(x)]$.

Παράδειγμα 2. "Εστω ἡ πρότασις:

«Κάθε άκέραιος δέν είναι ρητός».

Αϋτη σημαίνει, ότι:

«διά κάθε x , εάν x είναι άκέραιος, τότε x δέν είναι ρητός».

Οϋτω, χρησιμοποιοϋντες τούς συμβολισμούς (3) και (4), ή δο-
θεΐσα πρότασις, δύναται νά συμβολισθῇ ως έξῆς:

$$(\forall x) [p(x) \Rightarrow \overline{q(x)}].$$

III. Μερική καταφατική (I): «Μερικά Λ είναι K » ή, άλλως:
«ϋπάρχουν Λ , τά όποΐα είναι K », σημαίνει:

«ϋπάρχει x , x είναι Λ και x είναι K ».

Οϋτω, χρησιμοποιοϋντες τούς συμβολισμούς (1) και (2), ή δο-
θεΐσα μερική καταφατική πρότασις, δύναται νά συμβολισθῇ ως έξῆς:

$$(\exists x) [\lambda(x) \wedge k(x)].$$

Παράδειγμα 3. "Εστω ή πρότασις:

«Μερικοί άκέραιοι είναι ρητοί».

Αϋτη σημαίνει ότι:

«ϋπάρχει x , x είναι άκέραιος και x είναι ρητός».

Οϋτω, χρησιμοποιοϋντες τούς συμβολισμούς (3) και (4), ή δο-
θεΐσα πρότασις, δύναται νά συμβολισθῇ ως έξῆς:

$$(\exists x) [p(x) \wedge q(x)].$$

IV. Μερική άρνητική (O): «Μερικά Λ δέν είναι K » ή, άλλως:
«ϋπάρχουν Λ , τά όποΐα δέν είναι K », σημαίνει:

«ϋπάρχει x , x είναι Λ και x δέν είναι K ».

Οϋτω, χρησιμοποιοϋντες τούς συμβολισμούς (1) και (2), ή δο-
θεΐσα μερική άρνητική πρότασις, δύναται νά συμβολισθῇ ως έξῆς:

$$(\exists x) [\lambda(x) \wedge \overline{k(x)}].$$

Παράδειγμα 4. "Εστω ή πρότασις:

«Μερικοί άκέραιοι δέν είναι ρητοί».

Αϋτη σημαίνει ότι:

«ϋπάρχει x , x είναι άκέραιος και x δέν είναι ρητός».

Οϋτω, χρησιμοποιοϋντες τούς συμβολισμούς (3) και (4), ή δο-
θεΐσα πρότασις δύναται νά συμβολισθῇ ως έξῆς:

$$(\exists x) [p(x) \wedge \overline{q(x)}].$$

Σημείωσις I. θά ήτο σφάλμα ή πρότασις: «Μερικοί άκέραιοι είναι ρητοί»
(παράδ. 3) νά συμβολισθῇ ως έξῆς:

$$(\exists x) [p(x) \Rightarrow q(x)]. \text{ (διατί;)}$$

Έπίσης, θά ήτο σφάλμα ή πρότασις: «Μερικοί άκέραιοι δέν είναι ρητοί»
(παράδ. 4) νά συμβολισθῇ ως έξῆς:

$$(\exists x) [p(x) \Rightarrow \overline{q(x)}]. \text{ (διατί;)}$$

Β) Κατωτέρω δίδομεν μερικά ακόμη παραδείγματα, περισσότερο πολύπλοκα.

Παράδειγμα 5. "Εστω ή πρότασις:

« 'Εάν ὅλοι οἱ ἀκέραιοι εἶναι ρητοί, τότε ὁ 2 εἶναι ρητός».

Χρησιμοποιοῦντες μεταβλητάς, αὕτη σημαίνει:

« 'Εάν (διὰ κάθε x , ἐάν x εἶναι ἀκέραιος, τότε x εἶναι ρητός), τότε (ὁ 2 εἶναι ρητός) ».

Οὕτω, χρησιμοποιοῦντες τοὺς συμβολισμούς (1) καί (2) τοῦ παραδείγματος 1, ή δοθεῖσα πρότασις δύναται νά συμβολισθῇ ὡς ἑξῆς:

$(\forall x) [p(x) \Rightarrow q(x)] \Rightarrow q(2).$

Παράδειγμα 6. "Εστω ή πρότασις:

« 'Εάν ὅλοι οἱ ἀκέραιοι εἶναι ρητοί, τότε μερικοί πραγματικοί εἶναι ρητοί ».

Χρησιμοποιοῦντες μεταβλητάς, αὕτη σημαίνει:

« 'Εάν (διὰ κάθε x , ἐάν x εἶναι ἀκέραιος, τότε x εἶναι ρητός), τότε (ὑπάρχει y , y εἶναι πραγματικός καί y εἶναι ρητός) ».

Οὕτω, χρησιμοποιοῦντες τοὺς συμβολισμούς (1) καί (2) τοῦ παραδείγματος 1 καί συμβολίζοντες τό κατηγορήμα:

« εἶναι πραγματικός » μέ: $r()$,

ή δοθεῖσα πρότασις δύναται νά συμβολισθῇ ὡς ἑξῆς:

$(\forall x) [p(x) \Rightarrow q(x)] \Rightarrow (\exists y) [r(y) \wedge q(y)].$

Παράδειγμα 7. "Εστω ή πρότασις:

« Μεταξύ δύο ἀνίσων ρητῶν ἀριθμῶν ὑπάρχει ρητός ἀριθμός ».

Αὕτη σημαίνει:

« 'Εάν ἓνας ρητός εἶναι μικρότερος ἐνός ἄλλου ρητοῦ, τότε ὑπάρχει ρητός μεγαλύτερος τοῦ πρώτου καί μικρότερος τοῦ δευτέρου ».

"Ἦτοι:

« 'Εάν ἓνας τυχόν ρητός εἶναι μικρότερος ἐνός ἄλλου τυχόντος ρητοῦ, τότε ὑπάρχει ρητός μεγαλύτερος τοῦ πρώτου καί μικρότερος τοῦ δευτέρου ».

Χρησιμοποιοῦντες μεταβλητάς, αὕτη σημαίνει:

« 'Εάν ἓνας τυχόν ρητός x εἶναι μικρότερος ἐνός ἄλλου τυχόντος ρητοῦ y , τότε ὑπάρχει ρητός z μεγαλύτερος τοῦ x καί μικρότερος τοῦ y ».

Ἀκριβέστερον:

« Διά κάθε x , διά κάθε y , εάν x είναι ρητός και y είναι ρητός και x είναι μικρότερος του y , τότε υπάρχει z τοιοῦτον ὥστε z είναι ρητός και z είναι μεγαλύτερος του x και z είναι μικρότερος του y » .

Συμβολίζοντας, τώρα τό κατηγορήμα (μιᾶς θέσεως):

« είναι ρητός » μέ $q()$

και ἕκαστον ἐκ τῶν δύο κατηγορημάτων (δύο θέσεων):

« είναι μικρότερος τοῦ » και « είναι μεγαλύτερος τοῦ » μέ τά συνήθη σύμβολα τῆς ἀλγέβρας (δηλαδή, μέ $<$ και $>$, ἀντιστοίχως), ἡ δοθεῖσα πρότασις δύναται νά συμβολισθῇ ὡς ἑξῆς:

$$(\forall x)(\forall y)[q(x) \wedge q(y) \wedge (x < y) \Rightarrow (\exists z)(q(z) \wedge (z > x) \wedge (z < y))].$$

Σημείωσις II. Ὡς γνωστόν, τό σύνολον τῶν ρητῶν ἀριθμῶν συμβολίζεται μέ Q . Οὕτω, τό κατηγορήμα: « είναι ρητός » ταυτίζεται μέ τό: « είναι στοιχεῖον τοῦ Q ». Χρησιμοποιοῦντες, τώρα και διὰ τό τελευταῖον κατηγορήμα τό σύννηδες σύμβολον τῶν συνόλων, ἡ δοθεῖσα πρότασις δύναται νά συμβολισθῇ ὡς ἑξῆς:

$$(\forall x)(\forall y)[x \in Q \wedge y \in Q \wedge (x < y) \Rightarrow (\exists z)(z \in Q \wedge (z > x) \wedge (z < y))].$$

Σημείωσις III. Εἰς τήν γλῶσσαν μας ὁ καθολικός ποσοδείκτης δύναται νά ἐκφρασθῇ κατά διαφόρους τρόπους. Οὕτω π.χ. εἰς τό ἀνωτέρω παράδειγμα: « Μεταξύ δύο ἀνύσων ρητῶν » σημαίνει: « Μεταξύ δύο τυχόντων ἀνύσων ρητῶν ». Βεβαίως, πρὸς ἀποφυγὴν σφαλμάτων, χρειάζεται μῦα σχετικὴ πεῖρα και μεγάλη προσοχή. Π.χ. ἡ ἀνωτέρω δοθεῖσα πρότασις θά ἦτο δυνατόν νά ἐρμηνευθῇ ὡς ἑξῆς:

« Εάν x είναι ρητός και y είναι ρητός και x είναι μικρότερος τοῦ y , τότε ὑπάρχει z τοιοῦτον, ὥστε z είναι ρητός και z είναι μεγαλύτερος τοῦ x και z είναι μικρότερος τοῦ y »

και ἀκολούθως, χρησιμοποιοῦντες τοὺς συνήθεις συμβολισμοὺς τῶν Μαθηματικῶν, αὕτη νά συμβολισθῇ (ἐσφαλμένως) ὡς ἑξῆς:

$$x \in Q \wedge y \in Q \wedge (x < y) \Rightarrow (\exists z)[z \in Q \wedge (z > x) \wedge (z < y)].$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

72. Νά εὑρεθῇ ἡ τιμὴ ἀληθείας ἐκάστης ἐκ τῶν κάτωθι προτάσεων⁽¹⁾

- | | |
|--|---|
| 1) $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 = x)$ | 3) $(\forall x \in \mathbb{Q})(x = x)$ |
| 2) $(\forall x \in \mathbb{R})(x + 1 > x)$ | 4) $(\forall x \in \mathbb{Z})(x^2 - 2x + 6 = 0)$ |

(1) Διὰ τοῦ $\mathbb{R}$ παριστῶμεν τό σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, διὰ τοῦ $\mathbb{Q}$ τό σύνολον τῶν ρητῶν ἀριθμῶν, διὰ τοῦ $\mathbb{Z}$ τό σύνολον τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, διὰ τοῦ $\mathbb{N}$ τό σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν και διὰ τοῦ $\mathbb{C}$ τό σύνολον τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

- 5) $(\forall x \in \mathbb{N}) (x \geq 1)$ 6) $(\forall x \in \mathbb{C}) (|x|^2 = x^2)$.

73. Νά εὑρεθῇ ἡ τιμὴ ἀληθείας ἐκάστης ἐκ τῶν κάτωθι προτάσεων:

- | | |
|---|---|
| 1) $(\exists x \in \mathbb{R}) (2x = x)$ | 4) $(\exists x \in \mathbb{N}) (x \geq 1)$ |
| 2) $(\exists x \in \mathbb{R}) (x^5 = x)$ | 5) $(\exists x \in \mathbb{Z}) (6x^2 - 5x + 1 = 0)$ |
| 3) $(\exists x \in \mathbb{R}) (x + 3 = x)$ | 6) $(\exists x \in \mathbb{C}) (x^2 + 1 = 0)$. |

74. Νά εὑρεθῇ ἡ τιμὴ ἀληθείας ἐκάστης ἐκ τῶν κάτωθι προτάσεων, εἰς τὰς ὁποίας οἱ ἀναφερόμενοι προτασιακοὶ τύποι εἶναι ὠρισμένοι ἐπὶ τοῦ συνόλου $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

- | | |
|--------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $(\forall x) (x^2 > 38)$ | 4) $(\forall x) (x^2 - 2x \geq 24)$ |
| 2) $(\exists x) (x + 4 = 10)$ | 5) $(\exists x) (x \text{ πρῶτος})$ |
| 3) $(\exists x) (x^2 - x = 6)$ | 6) $(\forall x) (x^x > 100)$. |

75. Νά εὑρεθῇ ἡ τιμὴ ἀληθείας ἐκάστης ἐκ τῶν κάτωθι προτάσεων, εἰς τὰς ὁποίας ἐκάστη μεταβλητὴ τῶν ἀναφερομένων προτασιακῶν τύπων διατρέχει τὸ σύνολον $\{0, 1, 2\}$:

- | | |
|--|--|
| 1) $(2 < 1) \Rightarrow (\exists x) (x < 0)$ | 5) $(\forall x) (\exists y) (y < x)$ |
| 2) $(\exists y) (\forall x) (y < x)$ | 6) $(\exists y) (\forall x) (y < x + 1)$ |
| 3) $(\forall x) (\exists y) (y \leq x)$ | 7) $(\exists y) (\forall x) (y \leq x)$ |
| 4) $(\forall x) (\exists y) (x + y = 0)$ | 8) $(\forall x) (\forall y) (x + y = y + x)$. |

76. Ἐστω ὁ προτασιακὸς τύπος: $\langle x = 3y \rangle$, ὅπου ἐκάστη τῶν μεταβλητῶν x καὶ y διατρέχει τὸ σύνολον $\mathbb{N}$ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

α) Νά εὑρεθῇ ἡ τιμὴ ἀληθείας, τὴν ὁποίαν λαμβάνει ὁ προτασιακὸς τύπος: $(\forall x) (x = 3y)$ διὰ $y = 1$ καὶ διὰ $y = 100$.

β) Νά εὑρεθῇ ἡ τιμὴ ἀληθείας, τὴν ὁποίαν λαμβάνει ὁ προτασιακὸς τύπος: $(\exists y) (x = 3y)$ διὰ $x = 5$ καὶ διὰ $x = 12$.

γ) Νά εὑρεθῇ ἡ τιμὴ ἀληθείας ἐκάστης ἐκ τῶν κάτωθι προτάσεων:

- | | |
|------------------------------------|--------------------------------------|
| $(\forall x) (\exists y) (x = 3y)$ | $(\exists x) (\forall y) (x = 3y)$ |
| $(\forall x) (\forall y) (x = 3y)$ | $(\exists x) (\exists y) (x = 3y)$ |
| $(\forall y) (\exists x) (x = 3y)$ | $(\exists y) (\forall x) (x = 3y)$ |
| $(\forall y) (\forall x) (x = 3y)$ | $(\exists y) (\exists x) (x = 3y)$. |

77. Ἐστω ὁ προτασιακὸς τύπος: $\langle x^2 = y \rangle$, ὅπου ἐκάστη τῶν μεταβλητῶν x καὶ y διατρέχει τὸ σύνολον $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Νά εὑρεθῇ ἡ τιμὴ ἀληθείας ἐκάστης ἐκ τῶν ἑξῆς δύο προτάσεων:

$$(\forall x) (\exists y) (x^2 = y), \quad (\exists y) (\forall x) (x^2 = y).$$

78. Εἰς ἕναστον ἐκ τῶν κάτωθι προτασιακῶν τύπων νά ὑπογραμμισθῇ ἡ ἀκτίς τοῦ ποσοδείκτου $\forall$, ὅστις ἀναφέρεται εἰς τὴ μεταβλητὴν x :

- 1) $(\forall x)p(x) \Rightarrow q(y)$.
- 2) $(\exists y)(\forall x)p(x, y) \wedge p(x, y)$.
- 3) $(\forall x)(\forall y)[p(x, y) \Rightarrow q(z)] \vee p(x, y)$.
- 4) $(\forall y)p(x, y) \Rightarrow [(\exists y)(\forall x)p(x, y) \wedge (\forall z)q(z)]$.

79. Είς ἕκαστον ἐκ τῶν κάτωθι προτασιακῶν τύπων νά ὑπογραμμισθῇ ἡ ἀκτίς τοῦ ποσοδείκτου $\exists$, ὅστις ἀναφέρεται εἰς τήν μεταβλητήν y :

- 1) $(\exists y)(\forall x)[p(x, y) \Rightarrow q(z)] \Rightarrow (\forall x)p(x, y)$.
- 2) $(\exists x)p(x, y) \wedge (\forall x)(\exists y)[p(x, y) \Rightarrow q(z)]$.
- 3) $(\forall x)(\exists y)[p(x) \Rightarrow q(y)] \wedge q(y)$.
- 4) $(\forall x)[p(x, y) \Rightarrow (\exists y)p(x, y)] \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)p(x, y)$.

80. Εἰς ἕκαστον ἐκ τῶν κάτωθι προτασιακῶν τύπων, εὑρετε τάς δεσμευμένας καί ἀκολούθως τάς ἐλευθέρas ἐμφανίσαις ἐκάστης μεταβλητῆς:

- 1) $(\forall x)p(x)$.
- 2) $(\forall x)p(x) \Rightarrow q(y)$.
- 3) $(\exists x)(\exists y)[p(x, y) \wedge q(z)]$.
- 4) $(\exists x)(\forall y)[p(x) \vee q(y)] \Rightarrow (\forall x)p(x)$.
- 5) $(\forall x)[p(x, y) \Rightarrow q(z)] \Leftrightarrow (\exists z)[p(x, y) \wedge q(z)]$.

Εὑρετε, ἐπίσης εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν τῶν τύπων, ποῖαι μεταβληταί εἶναι δεσμευμένοι καί ποῖαι εἶναι ἐλεύθεραι.

81. Νά παρασταθοῦν συμβολικῶς τῇ βοηθείᾳ καί τῶν ποσοδεικτῶν, αἱ κάτωθι προτάσεις:

- 1) Κάθε ἄνθρωπος εἶναι θνητός.
- 2) Κάθε ἄνθρωπος δέν εἶναι θνητός.
- 3) Μερικοί ἄνθρωποι εἶναι θνητοί.
- 4) Μερικοί ἄνθρωποι δέν εἶναι θνητοί.

82. Νά παρασταθοῦν συμβολικῶς, τῇ βοηθείᾳ καί τῶν ποσοδεικτῶν, αἱ κάτωθι προτάσεις:

- 1) Ἐάν ὅλοι οἱ ἄνθρωποι εἶναι θνητοί, τότε ὁ Πάπας εἶναι θνητός.
- 2) Ἐάν ὅλοι οἱ φυσικοί ἀριθμοί εἶναι ἀκέρατοι, τότε μερικοί ρητοί εἶναι ἀκέρατοι.
- 3) Μεταξύ δύο φυσικῶν διαδοχικῶν ἀριθμῶν δέν ὑπάρχει φυσικός ἀριθμός.
- 4) Ἐάν τό γινόμενον δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἴσον μέ τό 0, τότε εἰς τουλάχιστον ἐξ αὐτῶν εἶναι ἴσος μέ τό 0.
- 5) Κάθε κοινός διαιρέτης δύο ἀκεραίων εἶναι καί διαιρέτης τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν.

ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΩΝ ΤΥΠΩΝ - ΕΠΕΚΤΑΣΙΣ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΤΑΥΤΟΛΟΓΙΑΣ - ΠΟΣΟΔΕΙΚΤΙΚΟΙ ΝΟΜΟΙ

7.1. Παραστάσεις προτασιακών τύπων.

Είς τό παρόν κεφάλαιον μέ:

$p, q, r, \dots$

$p(x), q(x), r(x), \dots$

$p(x, y), q(x, y), r(x, y), \dots$

.....

θά παριστῶμεν τυχόντας προτασιακοὺς τύπους (μηδέν, μιᾶς, δύο κ.λ.π. ἐλευθέρων μεταβλητῶν, ἀντιστοίχως) ἢ, ὡς λέγομεν, «μεταβλητοὺς προτασιακοὺς τύπους». Τοὺς δέ δεδομένους προτασιακοὺς τύπους, τοὺς ὁποίους εἰς ἀντιδιαστολήν θά καλοῦμεν καί «σταθεροὺς προτασιακοὺς τύπους», θά παριστῶμεν διὰ τῶν ἰδίων συμβόλων μέ τήν ἀντίστοιχον μνείαν.

Σημειοῦμεν ὅτι ἓνας μεταβλητός προτασιακός τύπος π.χ. μιᾶς μεταβλητῆς, ἔστω $p(x)$, δέν εἶναι ἓνας προτασιακός τύπος, ἀλλά ἓν σύμβολον δυνάμενον νά ἀντικατασταθῇ ὑπό ἑνός προτασιακοῦ τύπου μιᾶς μεταβλητῆς x , ὅπως π.χ. ὑπό τοῦ:

« x εἶναι μαθητής»

ἢ τοῦ: « x εἶναι ρητός ἀριθμός»

ἢ τοῦ: « x εἶναι τρίγωνον ὀρθογώνιον» κ.λ.π.

— Κάθε ἔκφρασις, ἀποτελουμένη ἀπό μεταβλητοῦς ἢ μεταβλητοῦς καί σταθεροῦς προτασιακοῦς τύπους, μέ τοὺς λογικοὺς συνδέσμους ἢ τοὺς ποσοδείκτας ἢ τοὺς λογικοὺς συνδέσμους καί τοὺς ποσοδείκτας⁽¹⁾, ἥτις καθίσταται ἓνας προτασιακός τύπος, ὅταν οἱ μεταβλητοὶ προτασιακοὶ τύποι ἀντικατασταθοῦν μέ σταθεροὺς τοιούτους, καλεῖται **παράστασις προτασιακῶν τύπων** ἢ, ἀπλουστερον, **τύπος** (τοῦ

(1) Ἐκαστος ποσοδείκτης, εἰς τὰς θεωρουμένας ἐκφράσεις, θεωρεῖται γραμμένος ἐντὸς μιᾶς παρενθέσεως μαζί μέ μίαν μεταβλητήν $x, y, z, \dots$ εἰς τήν ὁποίαν, ὡς λέγομεν οὗτος ἀναφέρεται.

κατηγορικοῦ λογισμοῦ).

Συμφωνοῦμεν, τώρα, ὅτι εἰς τοὺς τύπους συμπεριλαμβάνονται καὶ οἱ μεταβλητοί, καθὼς καὶ οἱ σταθεροὶ προτασιακοὶ τύποι. Μάλιστα δέ οὗτοι λέγονται καὶ **στοιχειώδεις τύποι**.

Εἰς ἓνα τύπον: α) ἡ ἀκτίς ἐνός ποσοδείκτου (ἐμφανιζομένου εἰς αὐτόν), β) ἡ ἔννοια τῆς δεσμευμένης (ἢ, ἄλλως, φραγμένης) καὶ ἐλευθέρως ἐμφανίσεως μιᾶς μεταβλητῆς καὶ γ) ἡ ἔννοια τῆς δεσμευμένης (ἢ, ἄλλως, φραγμένης) καὶ ἐλευθέρως μεταβλητῆς, ὁρίζονται ὅπως καὶ εἰς ἓνα προτασιακόν τύπον (§ 6.7).

Τοὺς τύπους θά συμβολίζωμεν μέ: $P, Q, R, \dots$. Ἐάν δέ θέλωμεν νά τονίσωμεν ὅτι ἓνας τύπος P περιέχει κάποια ἐλευθέραν μεταβλητήν π.χ. x , θά γράφωμεν: $P(x)$.

Σημειοῦμεν, ὅτι ὁ συμβολισμός $P(x)$ δέν σημαίνει ὅτι ὁ τύπος P δέν περιέχει καὶ ἄλλας ἐλευθέρως μεταβλητάς πλην τῆς x (δυνατόν νά περιέχη καὶ ἄλλας, δυνατόν ὅμως καὶ μή περιέχη). Ὑπὸ ἀνάλογον ἔννοιαν θά γράφωμεν: $P(x, y), P(x, y, z)$ κ.λ.π.

Εἶναι προφανές ὅτι, ἐάν P καὶ Q εἶναι δύο τύποι, τότε καὶ ἑκάστη ἐκ τῶν ἐκφράσεων:

$$\bar{P}, P \vee Q, P \wedge Q, P \Rightarrow Q, P \Leftrightarrow Q$$

(ὅπως καὶ ἡ $P \not\equiv Q$) εἶναι πάλιν ἓνας τύπος. Ἐπίσης, ἐάν $P(x)$ εἶναι ἓνας τύπος, τότε καὶ ἑκάστη τῶν ἐκφράσεων:

$$(\forall x)P(x) \quad \text{καὶ} \quad (\exists x)P(x)$$

εἶναι πάλιν ἓνας τύπος.

— Ἀντικατάστασις μιᾶς ἐλευθέρως μεταβλητῆς, π.χ. x , ὑπὸ μιᾶς ἄλλης μεταβλητῆς, π.χ. y (ἢ ὑπὸ μιᾶς τιμῆς τῆς, π.χ. ξ) εἰς ἓνα δοθέντα τύπον $P(x)$, σημαίνει, ὅπως καὶ εἰς ἓνα προτασιακόν τύπον (§ 6.7), ἀντικατάστασιν, ἐκάστης ἐλευθέρως ἐμφανίσεως τῆς x , εἰς τὸν δοθέντα τύπον $P(x)$, ὑπὸ τῆς μεταβλητῆς y (ἢ ὑπὸ τοῦ ξ , ἀντιστοίχως). Τό δέ ἀποτέλεσμα μιᾶς τοιαύτης ἀντικαταστάσεως θά συμβολίζεται μέ $P(y)$ (ἢ μέ $P(\xi)$, ἀντιστοίχως).

— Κάθε τμήμα ἐνός τύπου, τό ὅποῖον θεωρούμενον ἀνεξάρτητον εἶναι ἐπίσης ἓνας τύπος, λέγεται καὶ **ὑποτύπος** τοῦ ἀρχικοῦ τύπου.

Ἐστω π.χ. ὁ τύπος:

$$(\forall x)[p(x) \wedge (\exists z)q(x, z) \Rightarrow (\exists y)r(x, y)] \vee q(x, z). \quad (1)$$

Οἱ τύποι π.χ.:

$$p(x), (\exists z)q(x, z), p(x) \wedge (\exists z)q(x, z) \Rightarrow (\exists y)r(x, y)$$

εἶναι ὑποτύποι τοῦ (1).

— Εἰς ἓνα τύπον $P(x)$ θά λέγωμεν ὅτι: «ἓν γράμμα y εἶναι ἐλεύθερον διὰ τό x » ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, εἰς τὸν $P(x)$ δέν ὑπάρ-

χουν ελεύθεραι εμφανίσεις του x εἰς ἄκτινα ποσοδείκτου ἀναφερομένου εἰς τό y .

Οὕτω, π.χ. εἰς τόν τύπον:

$$p(x, y) \wedge (\forall y)q(y)$$

τό y εἶναι ἐλεύθερον διὰ τό x . Ἀντιθέτως, εἰς τόν τύπον π.χ.:

$$p(x) \vee (\exists y)q(x, y)$$

τό y δέν εἶναι ἐλεύθερον διὰ τό x .

7.2. Πεδίον. Ἐπέκτασις τῆς ἐννοίας τῆς ταυτολογίας.

Θά λέγωμεν ὅτι ἕνας προτασιακός τύπος ἀναφέρεται εἰς ἓν σύνολον M , ἔάν, καί μόνον ἔάν, αἱ μεταβληταί του διατρέχουν τό σύνολον M .

Εἰς τά ἐπόμενα θά ὑποθέτωμεν ὅτι οἱ θεωρούμενοι προτασιακοί τύποι ἀναφέρονται εἰς ἓν καί τό αὐτό σύνολον M , τό ὁποῖον θά καλοῦμεν **πεδίον**. Οὕτω, αἱ εἰσαγόμεναι ἐννοιαί θά σχετίζονται μέ ἓν δεδομένον πεδίον, τό ὁποῖον θά δυνάμεθα νά μεταβάλλωμεν ἀναλόγως τῶν ἐφαρμογῶν⁽¹⁾.

Τά στοιχεῖα ἐνός θεωρουμένου πεδίου M , τά λεγόμενα καί **σταθερά ἀντικείμενα**, θά συμβολίζωμεν μέ τά μικρά ἀρχικά γράμματα τοῦ Ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Τάς μεταβλητάς: $x, y, z, \dots$, αἱ ὁποῖαι θά διατρέχουν τό M , θά καλοῦμεν καί **μεταβλητά ἀντικείμενα**.

— Θά λέγωμεν ὅτι ἕνας τύπος εἶναι **ταυτολογικός εἰς ἓν πεδίον M** , ἔάν, καί μόνον ἔάν, ὁ τύπος αὐτός λαμβάνη τιμὴν ἀληθείας α διὰ κάθε ἀντικατάστασιν τῶν μεταβλητῶν του προτασιακῶν τύπων καί τῶν ἐλευθέρων μεταβλητῶν ἀντικειμένων του, ἀντιστοίχως μέ σταθεροὺς προτασιακοὺς τύπους ἀναφερομένους εἰς τό M καί μέ σταθερά ἀντικείμενα τοῦ M (ἔάν εἰς τόν τύπον ὑπεισέρχωνται μεταβληταί προτάσεις - αἵτινες, βεβαίως, συμπεριλαμβάνονται εἰς τοὺς μεταβλητοὺς προτασιακοὺς τύπους - αὗται ὀφείλουν νά ἀντικαθίστανται μέ σταθεράς προτάσεις).

(1) Ὁ οὕτως ἀναπτυσσόμενος κατηγορικός λογισμός λέγεται καί «κατηγορικός λογισμός μέ ἓν εἶδος μεταβλητῶν». Ἐξ αὐτοῦ εἶναι εὐκόλον νά μεταβῶμεν εἰς τόν καλούμενον «κατηγορικόν λογισμόν μέ δύο εἶδη μεταβλητῶν», εἰς τόν ὁποῖον δηλαδή αἱ μεταβληταί τῶν θεωρουμένων προτασιακῶν τύπων διατρέχουν, ἅλλαι ἓν σύνολον M_1 καί αἱ ὑπόλοιποι ἓν ἄλλο σύνολον M_2 . Ἀκολουθῶς, δυνάμεθα νά μεταβῶμεν εἰς τόν «κατηγορικόν λογισμόν μέ τρία εἶδη μεταβλητῶν» κ.ο.κ.

● Θά λέγωμεν ότι ένας τύπος P είναι **ταυτολογία** καί θά γράφω -
μεν: $\vdash P$, εάν, καί μόνον εάν, ο τύπος P είναι ταυτολογικός είς
κάθε πεδίο.

Ο όρισμός αυτός επέκτεινεί την έννοιαν της ταυτολογίας, την
οποίαν είδομεν είς την § 2.4.

Βάσει του άνωτέρω όρισμού, διά νά δείξωμεν ότι ένας τύπος P
δέν είναι ταυτολογία, άρκει νά εϋρωμεν έν πεδίο M , είς τό ό-
ποιον ο τύπος P δέν είναι ταυτολογικός. Διά νά δείξωμεν δέ ότι
ένας τύπος είναι ταυτολογία, δέν δυνάμεθα παρά νά χρησιμοποιή-
σωμεν, έν γένει, συλλογιστικές μεθόδους.

Παράδειγμα 1. Νά δειχθῇ ότι ο τύπος:

$$\begin{array}{|l} \\ \\ \\ \end{array} \quad (\forall x) [p(x) \Rightarrow q] \vee [p(y) \wedge q] \quad (1)$$

δέν είναι ταυτολογία.

Θεωρούμεν ως πεδίο M τό σύνολον: $\{1, 2\}$. "Εστω, τώρα, ότι τό κατηγορή-
μα $p(\)$ σημαίνει: «είναι ἕσον μέ 1». 'Αντικαθιστώντες είς τόν τύπον (1), ἔ-
χομεν:

$$(\forall x) [(x=1) \Rightarrow q] \vee [(y=1) \wedge q]$$

θέτοντες είς αὐτόν άντί q τήν πρότασιν: « $1 > 2$ » καί άντί y τό 1, λαμ-
βάνομεν τήν πρότασιν:

$$(\forall x) [(x=1) \Rightarrow (1 > 2)] \vee [(1=1) \wedge (1 > 2)],$$

ἥτις είναι ψευδής (διατί;).

Οὕτω, ο τύπος (1) δέν είναι ταυτολογικός είς τό πεδίο $\{1, 2\}$. "Αρα, ο
τύπος (1) δέν είναι ταυτολογία.

Παράδειγμα 2. Νά δειχθῇ ότι ο τύπος:

$$\begin{array}{|l} \\ \\ \\ \end{array} \quad (\forall x) (\exists y) p(x, y) \Rightarrow (\exists y) (\forall x) p(x, y) \quad (1)$$

δέν είναι ταυτολογία.

Θεωρούμεν ως πεδίο M τό σύνολον: $\{1, 2\}$. "Εστω, τώρα, ότι τό κατηγορή-
μα $p(,)$ σημαίνει: «είναι διάφορον του». 'Αντικαθιστώντες είς τόν τύπον (1)
ἔχομεν:

$$(\forall x) (\exists y) (x \neq y) \Rightarrow (\exists y) (\forall x) (x \neq y). \quad (2)$$

Διά νά εϋρωμεν τήν τιμήν ἀληθείας τῆς προτάσεως αὐτῆς, εϋρίσκομεν προη-
γουμένως τήν τιμήν ἀληθείας ἐκάστης τῶν προτάσεων:

$$(\forall x) (\exists y) (x \neq y) \quad (3)$$

$$\text{καί} \quad (\exists y) (\forall x) (x \neq y). \quad (4)$$

Διά νά εϋρωμεν, τώρα, τήν τιμήν ἀληθείας τῆς προτάσεως (3), εϋρίσκομεν,
κατ'άρχήν, τās τιμάς ἀληθείας, τās όποίας λαμβάνει ο προτασιακός τύπος:

$$(\exists y) (x \neq y)$$

διά τās διάφόρους τιμάς τῆς ἐλευθέρως του μεταβλητῆς x . Καταχωρούμεν τά άπο-

τελέσματα εἰς τόν παραπλεύρως πύνακα.

Ὡς βλέπομεν, ὁ προτασιακός τύπος:

$$(\exists y)(x \neq y)$$

x	$(\exists y)(x \neq y)$
1	α
2	α

λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α διὰ κάθε τι-

μὴν τῆς ἐλευθέρας του μεταβλητῆς x καὶ ἐπομένως ἡ πρότασις (3) εἶναι ἀληθής.

Ὁμοίως, διὰ νά εὐρωμεν τὴν τιμὴν ἀληθείας τῆς προτάσεως (4), εὐρύσκομεν, κατ' ἀρχὴν, τὰς τιμὰς ἀληθείας, τὰς ὁποίας λαμβάνει ὁ προτασιακός τύπος:

$$(\forall x)(x \neq y)$$

διὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τῆς ἐλευθέρας του μεταβλητῆς y. Καταχωροῦμεν τὰ ἀποτελέσματα εἰς τόν παραπλεύρως πύνακα. Ὡς βλέπομεν, ὁ προτασιακός τύπος:

y	$(\forall x)(x \neq y)$
1	y
2	y

$$(\forall x)(x \neq y)$$

λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας y διὰ κάθε τιμὴν τῆς ἐλευθέρας του μεταβλητῆς y καὶ ἐπομένως ἡ πρότασις (4) εἶναι ψευδής.

Συνεπῶς, ἡ πρότασις (2) εἶναι ψευδής καὶ ἄρα ὁ τύπος (1) δέν εἶναι ταυτολογία.

● Σημειοῦμεν ὅτι καὶ ὁ τύπος:

$$(\forall y)(\exists x)p(x, y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)p(x, y)$$

δέν εἶναι ταυτολογία (διατί;).

Παράδειγμα 3. Νά δειχθῇ ὅτι ὁ τύπος:

$$\begin{array}{|l} (\exists x)p(x) \Rightarrow (\forall x)p(x) \end{array} \quad (1)$$

δέν εἶναι ταυτολογία.

Θεωροῦμεν ὡς πεδῖον M τό σύνολον: {1, 2}. "Εστω, τώρα, ὅτι τό κατηγορήμα $p()$, σημαίνει: «εἶναι ἕσον μέ 1». Ἀντικαθιστῶντες εἰς τόν τύπον (1) λαμβάνομεν τὴν πρότασιν:

$$(\exists x)(x = 1) \Rightarrow (\forall x)(x = 1),$$

ἥτις εἶναι ψευδής (διατί;). Ἀρα, ὁ τύπος (1) δέν εἶναι ταυτολογία.

Παράδειγμα 4. Νά δειχθῇ ὅτι:

$$\begin{array}{|l} \vdash (\forall x)p(x) \Rightarrow p(y). \end{array} \quad (1)$$

"Εστωσαν, ἓν (τυχόν) πεδῖον M καὶ $p()$ ἓν (τυχόν) κατηγορήμα ἀναφερόμενον εἰς τό M. Ἐάν ἡ πρότασις $(\forall x)p(x)$ εἶναι ἀληθής, τότε ὁ προτασιακός τύπος $p(y)$ λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α διὰ κάθε τιμὴν τοῦ y (διατί;). Ἀρα, $(\forall x)p(x) \Rightarrow p(y)$ λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α διὰ κάθε τιμὴν τοῦ y (διατί;). Οὕτω, ὁ τύπος: $(\forall x)p(x) \Rightarrow p(y)$ εἶναι ταυτολογικός εἰς κάθε πεδῖον καὶ συνεπῶς οὗτος εἶναι ταυτολογία.

● Σημειοῦμεν ὅτι ἡ ταυτολογία (1) δύναται νά γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\vdash (\forall x)p(x) \Rightarrow p(x).$$

Παράδειγμα 5. Νά δειχθῇ ὅτι:



$$\vdash p(y) \Rightarrow (\exists x)p(x). \quad (1)$$

"Εστωσαν, ἓν (τυχόν) πεδίων M καὶ $p()$ ἓν (τυχόν) κατηγορημα ἀναφερόμενον εἰς τό M . Ἐάν ἡ πρότασις $(\exists x)p(x)$ εἶναι ψευδής, τότε ὁ προτασιακός τύπος $p(y)$ λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας y διὰ κάθε τιμὴν τοῦ y (διατύ;)." Ἀρα, $p(y) \Rightarrow (\exists x)p(x)$ λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α διὰ κάθε τιμὴν τοῦ y (δυνατύ;). Οὕτω, ὁ τύπος: $p(y) \Rightarrow (\exists x)p(x)$ εἶναι ταυτολογικὸς εἰς κάθε πεδίων καὶ συνεπῶς οὗτος εἶναι ταυτολογία.

● Σημειοῦμεν ὅτι ἡ ταυτολογία (1) δύναται νά γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\vdash p(x) \Rightarrow (\exists x)p(x).$$

— Θά λέγωμεν ὅτι ἓνας τύπος εἶναι **αὐτοαντιφατικός** εἰς ἓν πεδίων M , ἔάν, καὶ μόνον ἔάν, ὁ τύπος αὐτός λαμβάνῃ τιμὴν ἀληθείας y διὰ κάθε ἀντικατάστασιν τῶν μεταβλητῶν του προτασιακῶν τύπων καὶ τῶν ἐλευθέρων μεταβλητῶν ἀντικειμένων του, ἀντιστοίχως μέ σταθεροὺς προτασιακοὺς τύπους, ἀναφερομένους εἰς τό M καὶ μέ σταθερά ἀντικείμενα τοῦ M .

Εἶναι προφανές ὅτι: ἓνας τύπος P εἶναι αὐτοαντιφατικός εἰς ἓν πεδίων M , ἔάν, καὶ μόνον ἔάν, ὁ τύπος $\bar{P}$ εἶναι ταυτολογικὸς εἰς τό M καὶ ἀντιστρόφως.

● Θά λέγωμεν ὅτι ἓνας τύπος P εἶναι **αὐτοαντίφασις** καὶ θά γράψωμεν: $\vdash \neg P$, ἔάν, καὶ μόνον ἔάν, ὁ τύπος αὐτός P εἶναι αὐτοαντιφατικός εἰς κάθε πεδίων.

Εἶναι προφανές ὅτι: ἔάν ἓνας τύπος P εἶναι αὐτοαντίφασις, τότε ὁ τύπος $\bar{P}$ εἶναι ταυτολογία καὶ ἀντιστρόφως.

— Κάθε τύπος, ὅστις δέν εἶναι οὔτε ταυτολογία οὔτε αὐτοαντίφασις, καλεῖται **σχετικός**.

Εἶναι προφανές ὅτι: ἔάν ἓνας τύπος P εἶναι σχετικός, τότε καὶ ὁ τύπος $\bar{P}$ εἶναι σχετικός καὶ ἀντιστρόφως.

— Ὡς εἴπομεν καὶ εἰς τὴν § 2.4, τὸν σπουδαιότερον ρόλον εἰς τὴν Μαθηματικὴν Λογικὴν παίζουν αἱ ταυτολογίαι, καλούμεναι καὶ νόμοι. Ἐάν ἓνας νόμος περιέχῃ καὶ ποσοδείκτας, λέγεται καὶ **ποσοδεικτικὸς νόμος**.

7.3. Μόρφωσις ταυτολογιῶν εἰς τὸν κατηγορικὸν λογισμόν.

Λογικὴ συνεπαγωγὴ καὶ λογικὴ ἰσοδυναμία τύπων.

Κατ' ἀρχὴν εἶναι προφανές ὅτι: ἔάν μία προτασιακὴ παράστασις

είναι ταυτολογία (§ 2.4) και αντικαταστήσωμεν τας προτασιακάς της μεταβλητάς με τυχόντας τύπους (του κατηγορικού λογισμού), τότε ο προκύπτων τύπος είναι επίσης ταυτολογία. Ούτω, π.χ. έχουμε:

$$\vdash p(x) \vee \overline{p(x)}, \vdash \overline{(\forall x)p(x, y)} \Leftrightarrow (\forall x)p(x, y),$$

$$\vdash (\exists x)p(x) \vee q(y) \Leftrightarrow (\exists x)p(x) \wedge q(y),$$

$$\vdash [(\forall x)(\exists y)p(x, y) \Rightarrow q] \wedge (\forall x)(\exists y)p(x, y) \Rightarrow q.$$

— Αι έννοιαι της λογικής συνεπαγωγής και λογικής ισοδυναμίας μεταξύ προτασιακών παραστάσεων (§ 3.5 και § 3.7) επεκτείνονται ομοίως και μεταξύ τύπων (του κατηγορικού λογισμού). 'Ακριβέστερον:

● Ένας τύπος P λέγομεν ότι «συνεπάγεται λογικώς» ή, άλλως, «συνεπάγεται ταυτολογικώς» ένα τύπον Q , εάν, και μόνον εάν: $\vdash P \Rightarrow Q$.

● Ένας τύπος P λέγομεν ότι είναι «λογικώς (ή, άλλως, ταυτολογικώς) ισοδύναμος» ή απλώς «ισοδύναμος» με ένα τύπον Q και γράφομεν: $P \equiv Q$, εάν, και μόνον εάν: $\vdash P \Leftrightarrow Q$.

Ούτω, π.χ. έχουμε:

$$(\exists x)p(x, y) \Rightarrow q(y) \equiv \overline{(\exists x)p(x, y)} \vee q(y),$$

$$\overline{(\exists x)(\forall y)p(x, y)} \equiv (\exists x)(\forall y)p(x, y).$$

Αι προτάσεις II και III της § 3.7 εξακολουθούν ισχύουσai και εις την περίπτωσιν όπου τά P , Q και R παριστούν τυχόντας τύπους. Ομοίως και η πρότασις της § 3.8.

— Οι κανόνες των παραγράφων 3.2 (άρνήσεως, διαζεύξεως, συζεύξεως), 3.3 (modus ponens) και 3.10 (αντικαταστάσεως), εξακολουθούν ισχύοντες και εις τόν κατηγορικόν λογισμόν, δηλαδή και εις την περίπτωσιν όπου τά υπεισερχόμενα γράμματα παριστούν τυχόντας τύπους (του κατηγορικού λογισμού).

Ούτω, π.χ. βάσει του κανόνος της § 3.10 (κάνων αντικαταστάσεως), έχουμε:

$$(\exists x)[p(x) \Rightarrow (\forall y)q(y)] \equiv (\exists x)[\overline{p(x)} \vee (\forall y)q(y)],$$

$$\begin{aligned} (\forall x)p(x) \Rightarrow [q(y) \Rightarrow (\forall x)r(x)] &\equiv \\ &\equiv (\forall x)p(x) \Rightarrow [\overline{q(y)} \vee (\forall x)r(x)] \\ &\equiv \overline{(\forall x)p(x)} \vee [\overline{q(y)} \vee (\forall x)r(x)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(\exists x)p(x) \Rightarrow (\forall y)q(y)] \Rightarrow r(x) &\equiv \\ &\equiv \overline{(\exists x)p(x) \Rightarrow (\forall y)q(y)} \vee r(x) \\ &\equiv \overline{(\exists x)p(x)} \vee (\forall y)q(y) \vee r(x) \\ &\equiv [\overline{(\exists x)p(x)} \wedge (\forall y)q(y)] \vee r(x) \end{aligned}$$

$$\equiv [(\exists x)p(x) \wedge \overline{(\forall y)q(y)}] \vee r(x).$$

— Είς τὰ παραδείγματα 4 καὶ 5 τῆς προηγουμένης παραγράφου εἴ-
δομεν, ἀντιστοίχως ὅτι:

$$\vdash (\forall x)p(x) \Rightarrow p(y) \quad \text{καὶ} \quad \vdash p(y) \Rightarrow (\exists x)p(x).$$

Γενικώτερον, ἰσχύει ἡ ἐξῆς:

Πρότασις I. « Ἐάν εἰς ἓνα τύπον $P(x)$ τὸ y εἶναι ἐλεύθερον διὰ
τό x , τότε:

$$\text{α) } \vdash (\forall x)P(x) \Rightarrow P(y), \quad \text{β) } \vdash P(y) \Rightarrow (\exists x)P(x) \gg.$$

Οὕτω, π.χ. ἐπειδὴ εἰς τὸν τύπον:

$$(\forall z)[q(x) \vee (\forall x)p(x, y) \vee p(z, x)]$$

τὸ y εἶναι ἐλεύθερον διὰ τὸ x , ἔχομεν:

$$\vdash (\forall x)(\forall z)[q(x) \vee (\forall x)p(x, y) \vee p(z, x)] \Rightarrow (\forall z)[q(y) \vee (\forall x)p(x, y) \vee p(z, y)]$$

καὶ ἐπίσης:

$$\vdash (\forall z)[q(y) \vee (\forall x)p(x, y) \vee p(z, y)] \Rightarrow (\exists x)(\forall z)[q(x) \vee (\forall x)p(x, y) \vee p(z, x)].$$

Πρότασις II. « Οἷουδήποτε ὄντος τοῦ τύπου $P(x)$:

$$\vdash (\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists x)P(x) \gg.$$

Πράγματι. Ἐκ τῆς προηγουμένης προτάσεως, ἔχομεν:

$$\vdash (\forall x)P(x) \Rightarrow P(x) \quad \text{καὶ} \quad \vdash P(x) \Rightarrow (\exists x)P(x) \quad (\text{διατύ;})$$

καὶ ἐξ αὐτῶν:

$$\vdash (\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists x)P(x). \quad (\text{διατύ;})$$

Πρότασις III. « Ἐστῶσαν $P(x)$ καὶ Q δύο τύποι, ἐξ ὧν ὁ Q δέν πε-
ριέχει ἐλευθέρας ἐμφανίσεις τοῦ x .

$$\text{α) } \text{Ἐάν } \vdash Q \Rightarrow P(x), \text{ τότε: } \vdash Q \Rightarrow (\forall x)P(x).$$

$$\text{β) } \text{Ἐάν } \vdash P(x) \Rightarrow Q, \text{ τότε: } \vdash (\exists x)P(x) \Rightarrow Q \gg.$$

Πράγματι. α) Ἐστω ὅτι: $\vdash Q \Rightarrow P(x)$. θεωροῦμεν ἓν (τυχόν) πεδῖον M καὶ ἀν-
τικαθιστῶμεν τοὺς μεταβλητοὺς προτασιακοὺς τύπους, καθὼς καὶ τὰ ἐλεύθερα με-
ταβλητὰ ἀντικείμενα τοῦ τύπου: $Q \Rightarrow (\forall x)p(x)$, ἀντιστοίχως μέ (τυχόντας) στα-
θεροὺς προτασιακοὺς τύπους ἀναφερομένους εἰς τὸ M καὶ μέ (τυχόντα) σταθερὰ
ἀντικείμενα τοῦ M . Σημειωτέον ὅτι εἰς μίαν τοιαύτην ἀντικατάστασιν δέν ἀντι-
καθιστῶμεν τὸ x μέ ἓν σταθερόν ἀντικείμενον τοῦ M , διότι ὁ τύπος: $Q \Rightarrow (\forall x)P(x)$
δέν περιέχει ἐλευθέρας ἐμφανίσεις τοῦ x (διατύ;). Διακρίνομεν, τώρα, δύο πε-
ριπτώσεις:

1ον. Ἐστω ὅτι διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως αὐτῆς ὁ τύπος Q λαμβάνει τιμὴν ἀλη-
θείας y . Τότε, δι' αὐτῆς ὁ τύπος: $Q \Rightarrow (\forall x)P(x)$ λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α
(διατύ;)

2ον. Ἐστω ὅτι διὰ τῆς ἐν λόγω ἀντικαταστάσεως ὁ τύπος Q λαμβάνει τιμὴν ἀλη-
θείας α . Τότε, τὸ αὐτὸ θά συμβῇ καὶ ἐάν ἐπεκτείνωμεν τὴν ἀντικατάστασιν αὐ-
τὴν καὶ εἰς τὸ x , δίδοντες εἰς αὐτὸ μίαν (τυχοῦσαν) τιμὴν ἐκ τοῦ M , διότι αἱ
λαμβανόμεναι τιμαὶ ἀληθείας ὑπὸ τῆς Q δέν ἐξαρτῶνται ἐκ τῆς μεταβλητῆς x . Ἐ-

πειδή, όμως, διὰ τῆς τελευταίας ἀντικαταστάσεως ὁ τύπος $Q \Rightarrow P(x)$ λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α - διότι, ἐξ ὑποθέσεως: $\vdash Q \Rightarrow P(x)$ - ἔπεται ὅτι, διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως αὐτῆς, ὁ τύπος $P(x)$ λαμβάνει, ἐπίσης, τιμὴν ἀληθείας α. Ἐπειδὴ αὐτὸ συμβαίνει ἐπισυνάπτοντες εἰς τὴν ἀρχικὴν ἀντικατάστασιν μίαν οὐρανὴν τιμὴν τοῦ x (ἐκ τοῦ M), ἔπεται ὅτι ὁ τύπος: $(\forall x)P(x)$ λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α διὰ τῆς ἀρχικῆς ἀντικαταστάσεως. Ἐπομένως, δι' αὐτῆς καὶ ὁ τύπος: $Q \Rightarrow (\forall x)P(x)$ λαμβάνει, ἐπίσης, τιμὴν ἀληθείας α.

Ἐξ αὐτῶν συμπεραίνομεν ὅτι: $\vdash Q \Rightarrow (\forall x)P(x)$.

β) Ἐστω ὅτι: $\vdash P(x) \Rightarrow Q$. Ἐργαζόμενοι ἀναλόγως εὐρίσκωμεν ὅτι:

$$\vdash (\exists x)P(x) \Rightarrow Q.$$

Πρότασις IV. $\ll \vdash (\forall x)P(x)$, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν: $\vdash P(x) \gg$.

Πράγματι. α) Ἐστω ὅτι: $\vdash (\forall x)P(x)$. Δι' ἐφαρμογῆς τῆς ἀνωτέρω προτάσεως I, ἔχομεν: $\vdash (\forall x)P(x) \Rightarrow P(x)$. Ἐξ αὐτῆς καὶ ἐπειδὴ: $\vdash (\forall x)P(x)$, βάσει (τῆς ἐπεκτάσεως) τοῦ κανόνος modus ponens, ἔπεται ὅτι: $\vdash P(x)$.

β) Ἐστω ὅτι: $\vdash P(x)$. Θέτοντες εἰς τὴν ταυτολογίαν:

$$\vdash q \Rightarrow (p \Rightarrow q) \quad (\S 3.4, \text{παράδ. } 1)$$

ὅπου q τό $P(x)$ καὶ ὅπου p τό $p \vee \bar{p}$ λαμβάνομεν:

$$\vdash P(x) \Rightarrow (p \vee \bar{p} \Rightarrow P(x)).$$

Ἐξ αὐτῆς καὶ ἐπειδὴ $\vdash P(x)$, βάσει τοῦ κανόνος modus ponens, ἔχομεν:

$$\vdash p \vee \bar{p} \Rightarrow P(x).$$

Ἐξ αὐτῆς, βάσει τῆς ἀνωτέρω προτάσεως III, ἔχομεν:

$$\vdash p \vee \bar{p} \Rightarrow (\forall x)P(x). \quad (\text{διὰ τῆς } \bar{p}).$$

Ἐξ αὐτῆς καὶ ἐπειδὴ: $\vdash p \vee \bar{p}$, βάσει τοῦ κανόνος modus ponens, ἔχομεν:

$$\vdash (\forall x)P(x).$$

Πρότασις V. $\ll \text{Ἐάν } \vdash P(x)$, τότε: $\vdash (\exists x)P(x) \gg$.

Πράγματι. Ἐστω ὅτι: $\vdash P(x)$. Ἐξ αὐτῆς καὶ ἐπειδὴ:

$$\vdash P(x) \Rightarrow (\exists x)P(x). \quad (\text{πρότ. I})$$

βάσει τοῦ κανόνος modus ponens, ἔπεται ὅτι: $\vdash (\exists x)P(x)$.

Πρότασις VI. $\ll \alpha) \vdash P(x) \wedge Q(x)$ ἐάν, καὶ μόνον ἐάν:

$$\vdash (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x).$$

$$\beta) \text{Ἐάν } \vdash P(x) \wedge Q(x), \text{ τότε: } \vdash (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) \gg.$$

Πράγματι: α) Ἐστω ὅτι: $\vdash P(x) \wedge Q(x)$. Τότε:

$$\vdash P(x) \quad \text{καὶ} \quad \vdash Q(x). \quad (\text{Κ.Συζ.})$$

Ἐξ αὐτῶν ἔπεται, ἀντιστοίχως, ὅτι:

$$\vdash (\forall x)P(x) \quad \text{καὶ} \quad \vdash (\forall x)Q(x) \quad (\text{Προτ. IV})$$

καὶ συνεπῶς:

$$\vdash (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x). \quad (\text{Κ.Συζ.})$$

Ἐστω, τώρα, ὅτι: $\vdash (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$. Τότε:

$$\vdash (\forall x)P(x) \quad \text{καὶ} \quad \vdash (\forall x)Q(x). \quad (\text{Κ.Συζ.})$$

Ἐξ αὐτῶν ἔπεται, ἀντιστοίχως, ὅτι:

$$\vdash P(x) \quad \text{καὶ} \quad \vdash Q(x) \quad (\text{πρότ. IV})$$

καὶ συνεπῶς:

$$\vdash P(x) \wedge Q(x). \quad (\text{Κ.Συζ.})$$

β) Ἐστω, πάλιν, ὅτι: $\vdash P(x) \wedge Q(x)$. Τότε:

$$\vdash P(x) \quad \text{καὶ} \quad \vdash Q(x).$$

Ἐξ αὐτῶν ἔπεται, ἀντιστοίχως, ὅτι:

$$\vdash (\exists x)P(x) \quad \text{καὶ} \quad \vdash (\exists x)Q(x) \quad (\text{πρότ. V})$$

καὶ συνεπῶς:

$$\vdash (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x).$$

Πρότασις VII. << Ἐάν $\vdash P(x) \Rightarrow Q(x)$, τότε:

$$\text{α)} \vdash (\forall x)P(x) \Rightarrow (\forall x)Q(x)$$

$$\text{β)} \vdash (\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x)$$

$$\text{γ)} \vdash (\exists x)P(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x) \gg.$$

Πράγματι. Ἐστω ὅτι:

$$\vdash P(x) \Rightarrow Q(x). \quad (1)$$

α) Ἐκ τῆς (1) καὶ ἐπελδή:

$$\vdash (\forall x)P(x) \Rightarrow P(x) \quad (\text{πρότ. I})$$

ἔπεται ὅτι:

$$\vdash (\forall x)P(x) \Rightarrow Q(x)$$

καὶ συνεπῶς:

$$\vdash (\forall x)P(x) \Rightarrow (\forall x)Q(x). \quad (\text{πρότ. III})$$

β) Ἐκ τῆς προηγουμένης:

$$\vdash (\forall x)P(x) \Rightarrow (\forall x)Q(x)$$

καὶ ἐπελδή:

$$\vdash (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x), \quad (\text{πρότ. II})$$

ἔπεται ὅτι:

$$\vdash (\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x).$$

γ) Ἐκ τῆς (1) καὶ ἐπελδή:

$$\vdash Q(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x) \quad (\text{πρότ. I})$$

ἔπεται ὅτι:

$$\vdash P(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x)$$

καὶ συνεπῶς:

$$\vdash (\exists x)P(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x). \quad (\text{πρότ. III})$$

Πρότασις VIII. << Ἐάν $P(x) \equiv Q(x)$, τότε:

$$\text{III} \quad (\forall x)P(x) \equiv (\forall x)Q(x) \quad \text{καὶ} \quad (\exists x)P(x) \equiv (\exists x)Q(x) \gg.$$

Πράγματι. Ἐστω ὅτι: $P(x) \equiv Q(x)$. Τότε:

$$\vdash P(x) \Rightarrow Q(x) \quad \text{καὶ} \quad \vdash Q(x) \Rightarrow P(x). \quad (1)$$

α) Ἐκ τῶν (1) ἔπεται, ἀντιστοίχως, ὅτι:

$$\vdash (\forall x)P(x) \Rightarrow (\forall x)Q(x) \quad \text{καί} \quad \vdash (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)P(x) \quad (\text{προτ. VII})$$

καί συνεπώς:

$$\vdash (\forall x)P(x) \Leftrightarrow (\forall x)Q(x), \text{ ήτοι: } (\forall x)P(x) \equiv (\forall x)Q(x).$$

β) Όμοίως, ἐκ τῶν (1) ἔπεται, ἀντιστοίχως, ὅτι:

$$\vdash (\exists x)P(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x) \quad \text{καί} \quad \vdash (\exists x)Q(x) \Rightarrow (\exists x)P(x) \quad (\text{προτ. VII})$$

καί συνεπώς:

$$\vdash (\exists x)P(x) \Leftrightarrow (\exists x)Q(x), \text{ ήτοι: } (\exists x)P(x) \equiv (\exists x)Q(x).$$

7.4. Ποσοδεικτικοί νόμοι ἀρνήσεως.

Πρότασις. «Οἰουδήποτε ὄντος τοῦ τύπου $P(x)$, ἰσχύουν αἱ ἐξῆς ἰ-

σοδυναμίες:

$$\alpha) \quad \overline{(\forall x)P(x)} \equiv (\exists x)\overline{P(x)}$$

$$\beta) \quad (\forall x)P(x) \equiv \overline{(\exists x)\overline{P(x)}}$$

$$\gamma) \quad \overline{(\exists x)P(x)} \equiv (\forall x)\overline{P(x)}$$

$$\delta) \quad (\exists x)P(x) \equiv \overline{(\forall x)\overline{P(x)}} \gg .$$

Πράγματι. α) Ἐχομεν:

$$\vdash \overline{P(x)} \Rightarrow (\exists x)\overline{P(x)} \quad (\S 7.3, \text{ προτ. I})$$

καί συνεπώς:

$$\vdash \overline{(\exists x)\overline{P(x)}} \Rightarrow \overline{\overline{P(x)}}. \quad (\text{διατύ;})$$

Ἐξ αὐτῆς καί ἐπειδὴ:

$$\vdash \overline{\overline{P(x)}} \Rightarrow P(x),$$

ἔπεται ὅτι:

$$\vdash \overline{(\exists x)\overline{P(x)}} \Rightarrow P(x). \quad (\text{διατύ;})$$

Ἐξ αὐτῆς, ἔπεται ὅτι:

$$\vdash \overline{(\exists x)\overline{P(x)}} \Rightarrow (\forall x)P(x) \quad (\S 7.3, \text{ προτ. III})$$

καί συνεπώς:

$$\vdash \overline{(\forall x)P(x)} \Rightarrow (\exists x)\overline{P(x)}. \quad (\text{διατύ;}) \quad (1)$$

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν:

$$\vdash (\forall x)P(x) \Rightarrow P(x) \quad (\S 7.3, \text{ προτ. I})$$

καί συνεπώς:

$$\vdash \overline{P(x)} \Rightarrow \overline{(\forall x)P(x)}.$$

Ἐξ αὐτῆς, ἔπεται ὅτι:

$$\vdash (\exists x)\overline{P(x)} \Rightarrow \overline{(\forall x)P(x)}. \quad (\S 7.3, \text{ προτ. III}) \quad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καί (2) ἔπεται, εὐκόλως, ὅτι:

$$\vdash \overline{(\forall x)P(x)} \Leftrightarrow (\exists x)\overline{P(x)},$$

δηλαδή:

$$\overline{(\forall x)P(x)} \equiv (\exists x)\overline{P(x)}.$$

β) Ἐχομεν, βάσει καί τῆς προηγουμένης ἰσοδυναμίας:

$$(\forall x)P(x) \equiv \overline{(\exists x)\overline{P(x)}} \equiv \overline{(\exists x)\overline{P(x)}}.$$

γ) Έχομεν, βάσει καί της προηγούμενης ισοδυναμίας:

$$\overline{(\exists x)P(x)} \equiv \overline{(\exists x)\overline{\overline{P(x)}}} \equiv (\forall x)\overline{P(x)}.$$

δ) Έχομεν:

$$(\exists x)P(x) \equiv \overline{(\forall x)\overline{P(x)}} \equiv \overline{(\forall x)\overline{P(x)}}.$$

— Τῇ βοηθείᾳ καί τῶν ἀποδειχθεῖσων ισοδυναμιῶν, αἱ ὁποῖαι λέγονται καί «ποσοδεικτικοί νόμοι ἀρνήσεως», δυνάμεθα δοθέντος ἑνός τύπου, περιέχοντος καί τόν σύνδεσμον: —, νά εὗρωμεν ἕνα ἰσοδύναμον τύπον, εἰς τόν ὁποῖον τό σύμβολον τῆς ἀρνήσεως νά ἐμφανίζεται μόνον εἰς τούς στοιχειώδεις τοῦ τύπου (ἐάν, βεβαίως δέν ἐξαλείφεται).

Παράδειγμα 1. Έχομεν:

$$\begin{aligned} \overline{(\forall x)[p(x) \Rightarrow q(x)]} &\equiv (\exists x)\overline{p(x) \Rightarrow q(x)} \\ &\equiv (\exists x)\overline{p(x) \vee \overline{q(x)}} \\ &\equiv (\exists x)[\overline{p(x)} \wedge \overline{\overline{q(x)}}] \\ &\equiv (\exists x)[p(x) \wedge \overline{q(x)}]. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2. Έχομεν:

$$\begin{aligned} \overline{(\exists x)[p(x) \Rightarrow (\forall x)q(x)]} &\equiv (\forall x)\overline{p(x) \Rightarrow (\forall x)q(x)} \\ &\equiv (\forall x)\overline{p(x) \vee (\forall x)\overline{q(x)}} \\ &\equiv (\forall x)[\overline{p(x)} \wedge \overline{(\forall x)\overline{q(x)}}] \\ &\equiv (\forall x)[p(x) \wedge (\exists x)\overline{q(x)}]. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3. Έχομεν:

$$\begin{aligned} \overline{(\exists x)(\forall y)p(x,y)} &\equiv (\exists x)\overline{[(\forall y)p(x,y)]} \\ &\equiv (\forall x)\overline{(\forall y)p(x,y)} \\ &\equiv (\forall x)(\exists y)\overline{p(x,y)}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 4. Έχομεν:

$$\begin{aligned} \overline{(\exists y)(\exists x)(\forall z)p(x,y,z)} &\equiv (\forall y)\overline{(\exists x)(\forall z)p(x,y,z)} \\ &\equiv (\forall y)(\forall x)\overline{(\forall z)p(x,y,z)} \\ &\equiv (\forall y)(\forall x)(\exists z)\overline{p(x,y,z)}. \end{aligned}$$

— Έστω ἕνας προτασιακός τύπος $p(x)$. Θεωροῦμεν τὰς προτάσεις:

$$(\forall x)p(x), \quad (\exists x)p(x), \quad (\forall x)\overline{p(x)} \quad \text{καί} \quad (\exists x)\overline{p(x)}.$$

Έκ τῶν προτάσεων αὐτῶν:

1) Αἱ: $(\forall x)p(x)$ καί $(\exists x)\overline{p(x)}$, καθώς καί αἱ: $(\exists x)p(x)$ καί $(\forall x)\overline{p(x)}$, εἶναι «ἀντιφατικά» (δηλαδή, ἔχουν ἀντιθέτους τιμάς

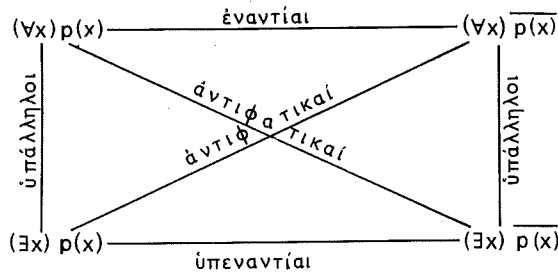
άληθείας).

2) Αί: $(\forall x)p(x)$ και $(\forall x)\overline{p(x)}$ είναι «έναντιαι» (δηλαδή, δύνανται νά είναι άμφοτεραι ψευδεΐς, αλλά δέν δύνανται νά είναι άμφοτεραι άληθεΐς).

3) Αί: $(\exists x)p(x)$ και $(\exists x)\overline{p(x)}$ είναι «ύπεναντίαι» (δηλαδή, δύνανται νά είναι άμφοτεραι άληθεΐς, αλλά δέν δύνανται νά είναι άμφοτεραι ψευδεΐς).

4) Αί: $(\forall x)p(x)$ και $(\exists x)p(x)$, καθώς και αι: $(\forall x)\overline{p(x)}$ και $(\exists x)\overline{p(x)}$, είναι «ύπάλληλοι».

Τό έπόμενον σχήμα, καλούμενον και **λογικόν τετράγωνον**, δεικνύει τάς μεταξύ των τεσσάρων αύτών προτάσεων ύφισταμένες σχέσεις.



7.5. Άλλοι ποσοδεικτικοί νόμοι.

Πρότασις Ι. «Οίωvδρήποτε δvτων των τύπων $P(x)$ και $Q(x)$:

- α) $(\forall x) [P(x) \wedge Q(x)] \equiv (\forall x) P(x) \wedge (\forall x) Q(x)$
- β) $\vdash (\forall x) P(x) \vee (\forall x) Q(x) \Rightarrow (\forall x) [P(x) \vee Q(x)]$
- γ) $(\exists x) [P(x) \vee Q(x)] \equiv (\exists x) P(x) \vee (\exists x) Q(x)$
- δ) $\vdash (\exists x) [P(x) \wedge Q(x)] \Rightarrow (\exists x) P(x) \wedge (\exists x) Q(x) \gg$.

Πράγματι. α) Έχομεν:

$$\vdash P(x) \wedge Q(x) \Rightarrow P(x)$$

και συνεπώς:

$$\vdash (\forall x) [P(x) \wedge Q(x)] \Rightarrow (\forall x) P(x). \quad (\S 7.3, \text{πρωτ. VII})$$

Όμοίως εύρίσκομεν ότι:

$$\vdash (\forall x) [P(x) \wedge Q(x)] \Rightarrow (\forall x) Q(x).$$

Έξ αύτης και της προηγούμενης έπεται ότι:

$$\vdash (\forall x) [P(x) \wedge Q(x)] \Rightarrow (\forall x) P(x) \wedge (\forall x) Q(x). \quad (\text{διατύ;}) \quad (1)$$

Έξ άλλου, έχομεν:

$$\vdash (\forall x) P(x) \Rightarrow P(x) \quad \text{και} \quad \vdash (\forall x) Q(x) \Rightarrow Q(x). \quad (\S 7.3, \text{πρωτ. I})$$

Έξ αύτων εύρίσκομεν ότι:

$$\vdash (\forall x) P(x) \wedge (\forall x) Q(x) \Rightarrow P(x) \wedge Q(x)$$

καί, βάσει της προτ. III της § 7.3, έπεται ότι:

$$\vdash (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)[P(x) \wedge Q(x)]. \quad (2)$$

Έκ τών (1) καί (2) συμπεραίνομεν ότι:

$$\vdash (\forall x)[P(x) \wedge Q(x)] \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x).$$

β) Έχομεν, βάσει της προτ. I της § 7.3:

$$\vdash (\forall x)P(x) \Rightarrow P(x) \text{ καί } \vdash (\forall x)Q(x) \Rightarrow Q(x).$$

Έξ αούτων έπεται ότι:

$$\vdash (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \Rightarrow P(x) \vee Q(x). \quad (\text{δυστύ;})$$

Έξ αούτης, βάσει της προτ. III της § 7.3, έπεται ότι:

$$\vdash (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)[P(x) \vee Q(x)].$$

γ) Έχομεν, βάσει καί της πρώτης ίσοδυναμίας:

$$\begin{aligned} (\exists x)[P(x) \vee Q(x)] &\equiv \overline{\overline{(\exists x)[P(x) \vee Q(x)]}} \\ &\equiv \overline{(\forall x)\overline{P(x) \vee Q(x)}} & (\S 7.4) \\ &\equiv \overline{(\forall x)[\overline{P(x)} \wedge \overline{Q(x)}]} \\ &\equiv \overline{(\forall x)\overline{P(x)} \wedge (\forall x)\overline{Q(x)}} \\ &\equiv \overline{(\forall x)\overline{P(x)}} \vee \overline{(\forall x)\overline{Q(x)}} \\ &\equiv (\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x). & (\S 7.4) \end{aligned}$$

δ) Έχομεν, βάσει της προτ. I της § 7.3:

$$\vdash P(x) \Rightarrow (\exists x)P(x) \text{ καί } \vdash Q(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x)$$

καί συνεπώς:

$$\vdash P(x) \wedge Q(x) \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x).$$

Έξ αούτης, βάσει της προτ. III της § 7.3, έπεται ότι:

$$\vdash (\exists x)[P(x) \wedge Q(x)] \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x).$$

Πρόταση II. << Οίλωνδήποτε όντων τών τύπων $P(x)$ καί $Q(x)$:

- $$\begin{aligned} \text{α)} &\vdash (\forall x)[P(x) \Rightarrow Q(x)] \Rightarrow [(\forall x)P(x) \Rightarrow (\forall x)Q(x)] \\ \text{β)} &\vdash (\forall x)[P(x) \Rightarrow Q(x)] \Rightarrow [(\exists x)P(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x)] \\ \text{γ)} &\vdash (\forall x)[P(x) \Leftrightarrow Q(x)] \Rightarrow [(\forall x)P(x) \Leftrightarrow (\forall x)Q(x)] \\ \text{δ)} &\vdash (\forall x)[P(x) \Leftrightarrow Q(x)] \Rightarrow [(\exists x)P(x) \Leftrightarrow (\exists x)Q(x)] \gg. \end{aligned}$$

Πράγματι. α) Έχομεν:

$$\begin{aligned} (\forall x)[P(x) \Rightarrow Q(x)] &\Rightarrow [(\forall x)P(x) \Rightarrow (\forall x)Q(x)] \\ &\equiv (\forall x)[\overline{P(x)} \vee Q(x)] \Rightarrow \overline{(\forall x)\overline{P(x)} \vee (\forall x)Q(x)} \\ &\equiv (\forall x)\overline{[\overline{P(x)} \vee Q(x)]} \vee \overline{(\forall x)\overline{P(x)} \vee (\forall x)Q(x)} \\ &\equiv (\exists x)[P(x) \wedge \overline{Q(x)}] \vee (\exists x)\overline{P(x)} \vee (\forall x)Q(x) \\ &\equiv (\exists x)[(P(x) \wedge \overline{Q(x)}) \vee \overline{P(x)}] \vee (\forall x)Q(x) & (\text{πρωτ. I, γ}) \\ &\equiv (\exists x)[\overline{P(x)} \vee \overline{Q(x)}] \vee (\forall x)Q(x) & (\S 3.12, 12\alpha) \\ &\equiv (\exists x)\overline{P(x)} \vee (\exists x)\overline{Q(x)} \vee (\forall x)Q(x) & (\text{πρωτ. I, γ}) \end{aligned}$$

$$\equiv (\exists x)\overline{P(x)} \vee (\forall x)Q(x) \vee (\forall x)Q(x). \quad (\S 7.4, \text{ προτ.}, \alpha)$$

Ἐπειδή, τώρα, ὁ τελευταῖος τύπος εἶναι ταυτολογία (διαιτύ;), ἔπεται ὅτι καὶ ὁ πρῶτος εἶναι ταυτολογία (διαιτύ;).

β) Ἐχομεν:

$$\begin{aligned} (\forall x)[P(x) \Rightarrow Q(x)] &\Rightarrow [(\exists x)P(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x)] \\ &\equiv (\exists x)[P(x) \wedge \overline{Q(x)}] \vee (\forall x)\overline{P(x)} \vee (\exists x)Q(x) \quad (\text{ὡς καὶ προηγουμέν.}) \\ &\equiv (\exists x)[(P(x) \wedge \overline{Q(x)}) \vee Q(x)] \vee (\forall x)\overline{P(x)} \quad (\text{προτ. I, γ}) \\ &\equiv (\exists x)[P(x) \vee Q(x)] \vee (\forall x)\overline{P(x)} \quad (\S 3.12, .12 \alpha) \\ &\equiv (\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \vee (\forall x)\overline{P(x)} \quad (\text{προτ. I, γ}) \\ &\equiv (\exists x)Q(x) \vee (\exists x)P(x) \vee (\exists x)\overline{P(x)}. \quad (\S 7.4, \text{ προτ.}, \gamma) \end{aligned}$$

Ἐπειδή, πάλιν, ὁ τελευταῖος τύπος εἶναι ταυτολογία, ἔπεται ὅτι καὶ ὁ πρῶτος εἶναι ταυτολογία.

γ) Βάσει τῆς πρώτης ταυτολογίας, ἔχομεν:

$$\begin{aligned} &\vdash (\forall x)[P(x) \Rightarrow Q(x)] \Rightarrow [(\forall x)P(x) \Rightarrow (\forall x)Q(x)] \\ \text{καὶ} &\vdash (\forall x)[Q(x) \Rightarrow P(x)] \Rightarrow [(\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)P(x)]. \end{aligned}$$

Ἐξ αὐτῶν ἔπεται ὅτι:

$$\begin{aligned} &\vdash (\forall x)[P(x) \Rightarrow Q(x)] \wedge (\forall x)[Q(x) \Rightarrow P(x)] \Rightarrow \\ &\Rightarrow [(\forall x)P(x) \Rightarrow (\forall x)Q(x)] \wedge [(\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)P(x)] \quad (\text{διαιτύ;}) \end{aligned}$$

καί, βάσει καὶ τῆς προηγουμένης προτάσεως:

$$\begin{aligned} &\vdash (\forall x)[(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (Q(x) \Rightarrow P(x))] \Rightarrow \\ &\Rightarrow [(\forall x)P(x) \Leftrightarrow (\forall x)Q(x)]. \end{aligned}$$

Συνεπῶς:

$$\vdash (\forall x)[P(x) \Leftrightarrow Q(x)] \Rightarrow [(\forall x)P(x) \Leftrightarrow (\forall x)Q(x)].$$

δ) Ἐργαζόμεθα ὡς καὶ προηγουμένως, χρησιμοποιοῦντες τὴν δευτέραν ταυτολογίαν.

Πρότασις III. «Οἷωνδήποτε ὄντων τῶν τύπων $P(x)$ καὶ $Q(x)$:

- $$\begin{aligned} \text{||| } \alpha) &\vdash (\forall x)[P(x) \vee Q(x)] \Rightarrow (\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \\ \text{||| } \beta) &\vdash (\forall x)[P(x) \Rightarrow Q(x)] \wedge (\forall x)P(x) \Rightarrow (\forall x)Q(x) \\ \text{||| } \gamma) &\vdash (\forall x)[P(x) \Rightarrow Q(x)] \wedge (\exists x)P(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x) \gg. \end{aligned}$$

Πράγματι. α) Ἀρκεῖ νά δεύξωμεν ὅτι:

$$\vdash (\forall x)[\overline{P(x)} \Rightarrow Q(x)] \Rightarrow [(\forall x)\overline{P(x)} \Rightarrow (\exists x)Q(x)] \quad (\text{διαιτύ;})$$

ἢ, ὅτι:

$$\vdash (\forall x)[\overline{P(x)} \Rightarrow Q(x)] \Rightarrow [(\exists x)\overline{P(x)} \Rightarrow (\exists x)Q(x)], \quad (\text{διαιτύ;})$$

ἥτις εἶναι ἀληθής, βάσει τῆς δευτέρας ταυτολογίας τῆς προηγουμένης προτάσεως II.

β) Συμπεραίνεται εὐκόλως διὰ χρησιμοποίησεως τῆς ταυτολογίας:

$$\vdash [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow r)$$

καὶ τῆς πρώτης ταυτολογίας τῆς προηγουμένης προτάσεως II (πῶς;).

γ) Ἐργαζόμεθα ὡς καὶ προηγουμένως, χρησιμοποιοῦντες τὴν δευτέραν ταυ-

τολογίας της προηγούμενης προτάσεως II.

Πρότασις IV. «Οίωνδήποτε όντων των τύπων $P(x)$ και $Q(x)$:

- ||| α) $(\exists x) [P(x) \Rightarrow Q(x)] \equiv (\forall x) P(x) \Rightarrow (\exists x) Q(x)$
 ||| β) $\vdash [(\exists x) P(x) \Rightarrow (\exists x) Q(x)] \Rightarrow (\exists x) [P(x) \Rightarrow Q(x)]$
 ||| γ) $\vdash [(\exists x) P(x) \Rightarrow (\forall x) Q(x)] \Rightarrow (\forall x) [P(x) \Rightarrow Q(x)] \gg.$

Πράγματι. α) "Εχομεν:

$$\begin{aligned} (\exists x) [P(x) \Rightarrow Q(x)] &\equiv (\exists x) [\overline{P(x)} \vee Q(x)] \\ &\equiv (\exists x) \overline{P(x)} \vee (\exists x) Q(x) && (\text{πρωτ. I, } \gamma) \\ &\equiv (\forall x) \overline{P(x)} \vee (\exists x) Q(x) && (\text{διατύ;}) \\ &\equiv (\forall x) P(x) \Rightarrow (\exists x) Q(x). \end{aligned}$$

β) 'Αρκεί νά δείξωμεν ότι:

$$\vdash (\exists x) [P(x) \Rightarrow Q(x)] \Rightarrow [(\exists x) P(x) \Rightarrow (\exists x) Q(x)] \quad (\text{διατύ;})$$

ή, ότι:

$$\vdash (\forall x) [P(x) \wedge \overline{Q(x)}] \Rightarrow (\exists x) P(x) \wedge (\forall x) \overline{Q(x)} \quad (\text{διατύ;})$$

ή, ότι:

$$\vdash (\forall x) P(x) \wedge (\forall x) \overline{Q(x)} \Rightarrow (\exists x) P(x) \wedge (\forall x) \overline{Q(x)} \quad (\text{διατύ;})$$

ήτις είναι αληθής, διότι:

$$\vdash (\forall x) P(x) \Rightarrow (\exists x) P(x). \quad (\S 7.3, \text{πρωτ. II})$$

γ) 'Αρκεί νά δείξωμεν ότι:

$$\vdash (\forall x) [P(x) \Rightarrow Q(x)] \Rightarrow [(\exists x) P(x) \Rightarrow (\forall x) Q(x)]$$

ή, ότι:

$$\vdash (\exists x) [P(x) \wedge \overline{Q(x)}] \Rightarrow [(\exists x) P(x) \wedge (\exists x) \overline{Q(x)}],$$

ήτις είναι αληθής (πρωτ. I, δ).

Πρότασις V. «'Εάν P και $Q(x)$ είναι δύο τύποι, έξ ών ό P δέν περιέχει έλευθέρας έμφανίσεις του x , τότε:

- ||| α) $(\forall x) [P \wedge Q(x)] \equiv P \wedge (\forall x) Q(x)$
 ||| β) $(\forall x) [P \vee Q(x)] \equiv P \vee (\forall x) Q(x)$
 ||| γ) $(\exists x) [P \wedge Q(x)] \equiv P \wedge (\exists x) Q(x)$
 ||| δ) $(\exists x) [P \vee Q(x)] \equiv P \vee (\exists x) Q(x) \gg.$

Πράγματι. α) 'Εργαζόμεθα όπως και διά τήν πρώτην ύσοδυναμίαν της προτάσεως I.

β) "Εχομεν:

$$\vdash (\forall x) [P \vee Q(x)] \wedge \overline{P} \Rightarrow (\forall x) [P \vee Q(x)]$$

και έπειδή:

$$\vdash (\forall x) [P \vee Q(x)] \Rightarrow P \vee Q(x) \quad (\S 7.3, \text{πρωτ. I})$$

συμπεραίνομεν ότι:

$$\vdash (\forall x) [P \vee Q(x)] \wedge \overline{P} \Rightarrow P \vee Q(x).$$

'Εξ αύτης και έπειδή:

$$\vdash (\forall x) [P \vee Q(x)] \wedge \bar{P} \Rightarrow \bar{P},$$

έπεται ότι:

$$\vdash (\forall x) [P \vee Q(x)] \wedge \bar{P} \Rightarrow [P \vee Q(x)] \wedge \bar{P}.$$

Έξ αὐτῆς καὶ ἐπειδὴ:

$$\vdash [P \vee Q(x)] \wedge \bar{P} \Rightarrow Q(x) \quad (\text{διατύ;})$$

έπεται ότι:

$$\vdash (\forall x) [P \vee Q(x)] \wedge \bar{P} \Rightarrow Q(x).$$

Έξ αὐτῆς, βάσει τῆς προτ. III τῆς § 7.3, έπεται ότι:

$$\vdash (\forall x) [P \vee Q(x)] \wedge \bar{P} \Rightarrow (\forall x) Q(x).$$

Συνεπῶς:

$$\vdash (\forall x) [P \vee Q(x)] \Rightarrow [\bar{P} \Rightarrow (\forall x) Q(x)] \quad (\text{διατύ;})$$

καὶ ἄρα:

$$\vdash (\forall x) [P \vee Q(x)] \Rightarrow P \vee (\forall x) Q(x). \quad (\text{διατύ;}) (1)$$

Έξ ἄλλου ἔχομεν:

$$\vdash (\forall x) Q(x) \Rightarrow Q(x) \quad (§ 7.3, \text{ προτ. I})$$

καὶ συνεπῶς:

$$\vdash P \vee (\forall x) Q(x) \Rightarrow P \vee Q(x). \quad (\text{διατύ;})$$

Έξ αὐτῆς, βάσει τῆς προτ. III τῆς § 7.3, έπεται ότι:

$$\vdash P \vee (\forall x) Q(x) \Rightarrow (\forall x) [P \vee Q(x)]. \quad (2)$$

Έκ τῶν (1) καὶ (2) συμπεραίνομεν ότι:

$$\vdash (\forall x) [P \vee Q(x)] \Leftrightarrow P \vee (\forall x) Q(x).$$

γ) Έχομεν, βάσει καὶ τῆς προηγουμένης ἰσοδυναμίας:

$$\begin{aligned} (\exists x) [P \wedge Q(x)] &\equiv (\exists x) [\overline{P \wedge Q(x)}] \\ &\equiv (\forall x) [\overline{P \wedge Q(x)}] \\ &\equiv (\forall x) [\overline{P \vee \bar{Q}(x)}] \\ &\equiv \overline{P \vee (\forall x) \bar{Q}(x)} \\ &\equiv P \wedge (\exists x) Q(x). \end{aligned}$$

δ) Έργαζόμεθα ἀναλόγως πρὸς τὴν προηγουμένην.

Πρότασις VI. << Έάν P καὶ $Q(x)$ εἶναι δύο τύποι, ἐξ ὧν ὁ P δέν περιέχει ἐλευθέρως ἐμφανίσεις τοῦ x , τότε:

α) $(\forall x) [P \Rightarrow Q(x)] \equiv P \Rightarrow (\forall x) Q(x)$

β) $(\forall x) [Q(x) \Rightarrow P] \equiv (\exists x) Q(x) \Rightarrow P$

γ) $(\exists x) [P \Rightarrow Q(x)] \equiv P \Rightarrow (\exists x) Q(x)$

δ) $(\exists x) [Q(x) \Rightarrow P] \equiv (\forall x) Q(x) \Rightarrow P$

ε) $\vdash (\forall x) [Q(x) \Leftrightarrow P] \Rightarrow [(\forall x) Q(x) \Leftrightarrow P]$

στ) $\vdash [(\exists x) Q(x) \Leftrightarrow P] \Rightarrow (\exists x) [Q(x) \Leftrightarrow P] \gg .$

Πράγματι. α) Έχομεν:

$$\begin{aligned}
 (\forall x)[P \Rightarrow Q(x)] &\equiv (\forall x)[\overline{P} \vee Q(x)] \\
 &\equiv \overline{P} \vee (\forall x)Q(x) && (\text{πρωτ. V, } \beta) \\
 &\equiv P \Rightarrow (\forall x)Q(x).
 \end{aligned}$$

β) "Έχομεν:

$$\begin{aligned}
 (\forall x)[Q(x) \Rightarrow P] &\equiv (\forall x)[\overline{Q(x)} \vee P] \\
 &\equiv (\forall x)\overline{Q(x)} \vee P && (\text{πρωτ. V, } \beta) \\
 &\equiv \overline{(\exists x)Q(x)} \vee P && (\S 7.4, \text{πρωτ.}, \gamma) \\
 &\equiv (\exists x)Q(x) \Rightarrow P.
 \end{aligned}$$

γ) "Έχομεν:

$$\begin{aligned}
 (\exists x)[P \Rightarrow Q(x)] &\equiv (\exists x)[\overline{P} \vee Q(x)] \\
 &\equiv \overline{P} \vee (\exists x)Q(x) && (\text{πρωτ. V, } \delta) \\
 &\equiv P \Rightarrow (\exists x)Q(x).
 \end{aligned}$$

δ) "Έχομεν:

$$\begin{aligned}
 (\exists x)[Q(x) \Rightarrow P] &\equiv (\exists x)[\overline{Q(x)} \vee P] \\
 &\equiv (\exists x)\overline{Q(x)} \vee P && (\text{πρωτ. V, } \delta) \\
 &\equiv \overline{(\forall x)Q(x)} \vee P && (\S 7.4, \text{πρωτ.}, \alpha) \\
 &\equiv (\forall x)Q(x) \Rightarrow P.
 \end{aligned}$$

ε) Έκ τῶν δύο πρώτων ἰσοδυναμιῶν, ἔχομεν:

$$\vdash (\forall x)[Q(x) \Rightarrow P] \Rightarrow [(\exists x)Q(x) \Rightarrow P] \quad (1)$$

$$\vdash (\forall x)[P \Rightarrow Q(x)] \Rightarrow [P \Rightarrow (\forall x)Q(x)]. \quad (2)$$

Θέτοντες εἰς τὴν ταυτολογίαν:

$$\vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$$

ὅπου p τό $(\forall x)Q(x)$, ὅπου q τό $(\exists x)Q(x)$ καὶ ὅπου r τό P , λαμβάνομεν:

$$\begin{aligned}
 \vdash [(\forall x)Q(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x)] &\Rightarrow \\
 &\Rightarrow [((\exists x)Q(x) \Rightarrow P) \Rightarrow ((\forall x)Q(x) \Rightarrow P)]
 \end{aligned}$$

καὶ ἐπειδὴ:

$$\vdash (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x) \quad (\S 7.3, \text{πρωτ. II})$$

ἔπεται ὅτι:

$$\vdash [(\exists x)Q(x) \Rightarrow P] \Rightarrow [(\forall x)Q(x) \Rightarrow P]. \quad (3)$$

Έκ τῶν (1) καὶ (3) ἔπεται ὅτι:

$$\vdash (\forall x)[Q(x) \Rightarrow P] \Rightarrow [(\forall x)Q(x) \Rightarrow P]. \quad (4)$$

Έκ τῶν (2) καὶ (4), ἐργαζόμενοι ὡς καὶ διὰ τὴν πρότασιν II, γ, εὐρύνσκο-
μεν εὐκόλως τὴν ζητούμενην ταυτολογίαν.

στ) Λόγῳ τῆς προηγουμένης ταυτολογίας, ἔχομεν:

$$\vdash (\forall x)[\overline{Q(x)} \Leftrightarrow P] \Rightarrow [(\forall x)\overline{Q(x)} \Leftrightarrow P]$$

καὶ συνεπῶς:

$$\vdash \overline{[(\forall x)\overline{Q(x)} \Leftrightarrow P]} \Rightarrow \overline{(\forall x)[\overline{Q(x)} \Leftrightarrow P]}. \quad (\text{διατύ;})$$

Έξ αὐτῆς ἔπεται ὅτι:

$$\vdash \overline{[(\forall x)\overline{Q(x)} \Leftrightarrow P]} \Rightarrow (\exists x)\overline{[\overline{Q(x)} \Leftrightarrow P]} \quad (\text{διατύ;})$$

καὶ συνεπῶς:

$$\vdash [(\exists x)Q(x) \Leftrightarrow P] \Rightarrow (\exists x)[Q(x) \Leftrightarrow P]. \quad (\text{διατύ;})$$

Πρότασις VII. <<Οιουδήποτε δντος του τύπου $P(x, y)$:

$$\alpha) (\forall x)(\forall y)P(x, y) \equiv (\forall y)(\forall x)P(x, y)$$

$$\beta) (\exists x)(\exists y)P(x, y) \equiv (\exists y)(\exists x)P(x, y)$$

$$\gamma) \vdash (\exists x)(\forall y)P(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x, y)$$

$$\delta) \vdash (\exists y)(\forall x)P(x, y) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x, y) \gg.$$

Πράγματι. α) "Έχομεν:

$$\vdash (\forall y)P(x, y) \Rightarrow P(x, y) \quad (\S 7.3, \text{ προτ. I})$$

καί συνεπώς:

$$\vdash (\forall x)(\forall y)P(x, y) \Rightarrow (\forall x)P(x, y). \quad (\S 7.3, \text{ προτ. VII})$$

'Εξ αὐτῆς ἔπεται ὅτι:

$$\vdash (\forall x)(\forall y)P(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\forall x)P(x, y). \quad (\S 7.3, \text{ προτ. III}) (1)$$

'Ανολόγως εὐρίσκομεν ὅτι:

$$\vdash (\forall y)(\forall x)P(x, y) \Rightarrow (\forall x)(\forall y)P(x, y). \quad (2)$$

'Εκ τῶν (1) καί (2) ἔπεται ὅτι:

$$\vdash (\forall x)(\forall y)P(x, y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)P(x, y),$$

δηλαδή:

$$(\forall x)(\forall y)P(x, y) \equiv (\forall y)(\forall x)P(x, y).$$

β) "Έχομεν, λόγῳ τῆς προηγουμένης ἰσοδυναμίας:

$$(\forall x)(\forall y)\overline{P(x, y)} \equiv (\forall y)(\forall x)\overline{P(x, y)}$$

καί συνεπώς:

$$\overline{(\forall x)(\forall y)\overline{P(x, y)}} \equiv \overline{(\forall y)(\forall x)\overline{P(x, y)}}. \quad (\text{διατύ;})$$

'Εξ αὐτῆς ἔχομεν:

$$(\exists x)\overline{(\forall y)\overline{P(x, y)}} \equiv (\exists y)\overline{(\forall x)\overline{P(x, y)}}$$

καί συνεπώς:

$$(\exists x)(\exists y)P(x, y) \equiv (\exists y)(\exists x)P(x, y).$$

γ) "Έχομεν:

$$\vdash (\forall y)P(x, y) \Rightarrow P(x, y) \quad (\S 7.3, \text{ προτ. I})$$

$$\text{καί} \quad \vdash P(x, y) \Rightarrow (\exists x)P(x, y). \quad (\S 7.3, \text{ προτ. I})$$

'Εξ αὐτῶν ἔπεται ὅτι:

$$\vdash (\forall y)P(x, y) \Rightarrow (\exists x)P(x, y).$$

'Εξ αὐτῆς, ἔπεται ὅτι:

$$\vdash (\forall y)P(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x, y) \quad (\S 7.3, \text{ προτ. III})$$

καί συνεπώς:

$$\vdash (\exists x)(\forall y)P(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x, y). \quad (\S 7.3, \text{ προτ. III})$$

δ) Προκύπτει εὐκόλως ἐκ τῆς προηγουμένης. (πῶς;)

— Σημειοῦμεν ὅτι ἕκαστος ἐκ τῶν ἐξῆς δύο τύπων:

$$(\forall x)(\exists y)P(x, y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)P(x, y)$$

$$\text{καί} \quad (\forall y)(\exists x)P(x, y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)P(x, y)$$

δέν είναι ταυτολογία (§ 7.2, παράδ. 2).

7.6. Συγκεντρωτικός πίναξ τῶν ποσοδεικτικῶν νόμων τῶν δύο προηγουμένων παραγράφων.

Οἷουδήποτε ὄντος τοῦ τύπου $P(x)$:

$$\alpha) \overline{(\forall x)P(x)} \equiv (\exists x)\overline{P(x)}$$

$$\beta) (\forall x)P(x) \equiv \overline{(\exists x)\overline{P(x)}}$$

$$\gamma) \overline{(\exists x)P(x)} \equiv (\forall x)\overline{P(x)}$$

$$\delta) (\exists x)P(x) \equiv \overline{(\forall x)\overline{P(x)}}$$

— Οἷωνδήποτε ὄντων τῶν τύπων $P(x)$ καί $Q(x)$:

I.

$$\alpha) (\forall x) [P(x) \wedge Q(x)] \equiv (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$$

$$\beta) \vdash (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x) [P(x) \vee Q(x)]$$

$$\gamma) (\exists x) [P(x) \vee Q(x)] \equiv (\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$$

$$\delta) \vdash (\exists x) [P(x) \wedge Q(x)] \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$$

II.

$$\alpha) \vdash (\forall x) [P(x) \Rightarrow Q(x)] \Rightarrow [(\forall x)P(x) \Rightarrow (\forall x)Q(x)]$$

$$\beta) \vdash (\forall x) [P(x) \Rightarrow Q(x)] \Rightarrow [(\exists x)P(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x)]$$

$$\gamma) \vdash (\forall x) [P(x) \Leftrightarrow Q(x)] \Rightarrow [(\forall x)P(x) \Leftrightarrow (\forall x)Q(x)]$$

$$\delta) \vdash (\forall x) [P(x) \Leftrightarrow Q(x)] \Rightarrow [(\exists x)P(x) \Leftrightarrow (\exists x)Q(x)]$$

III.

$$\alpha) \vdash (\forall x) [P(x) \vee Q(x)] \Rightarrow (\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$$

$$\beta) \vdash (\forall x) [P(x) \Rightarrow Q(x)] \wedge (\forall x)P(x) \Rightarrow (\forall x)Q(x)$$

$$\gamma) \vdash (\forall x) [P(x) \Rightarrow Q(x)] \wedge (\exists x)P(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x)$$

IV.

$$\alpha) (\exists x) [P(x) \Rightarrow Q(x)] \equiv (\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x)$$

$$\beta) \vdash [(\exists x)P(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x)] \Rightarrow (\exists x) [P(x) \Rightarrow Q(x)]$$

$$\gamma) \vdash [(\exists x)P(x) \Rightarrow (\forall x)Q(x)] \Rightarrow (\forall x) [P(x) \Rightarrow Q(x)]$$

— Ἐάν P καί $Q(x)$ εἶναι δύο τύποι, ἐξ ὧν ὁ P δέν περιέχει ἐλευθέρως ἐμφανίσεις τοῦ x , τότε:

V.

$$\alpha) (\forall x) [P \wedge Q(x)] \equiv P \wedge (\forall x)Q(x)$$

$$\beta) (\forall x) [P \vee Q(x)] \equiv P \vee (\forall x)Q(x)$$

$$\gamma) (\exists x) [P \wedge Q(x)] \equiv P \wedge (\exists x)Q(x)$$

$$\delta) (\exists x) [P \vee Q(x)] \equiv P \vee (\exists x)Q(x)$$

VI.

$$\alpha) (\forall x) [P \Rightarrow Q(x)] \equiv P \Rightarrow (\forall x)Q(x)$$

$$\beta) (\forall x) [Q(x) \Rightarrow P] \equiv (\exists x)Q(x) \Rightarrow P$$

- $\gamma) (\exists x) [P \Rightarrow Q(x)] \equiv P \Rightarrow (\exists x) Q(x)$
 $\delta) (\exists x) [Q(x) \Rightarrow P] \equiv (\forall x) Q(x) \Rightarrow P$
 $\epsilon) \vdash (\forall x) [Q(x) \Leftrightarrow P] \Rightarrow [(\forall x) Q(x) \Leftrightarrow P]$
 $\sigma\tau) \vdash [(\exists x) Q(x) \Leftrightarrow P] \Rightarrow (\exists x) [Q(x) \Leftrightarrow P]$
 — Οἷουδήποτε ὄντος τοῦ τύπου $P(x, y)$:

VII.

- $\alpha) (\forall x) (\forall y) P(x, y) \equiv (\forall y) (\forall x) P(x, y)$
 $\beta) (\exists x) (\exists y) P(x, y) \equiv (\exists y) (\exists x) P(x, y)$
 $\gamma) \vdash (\exists x) (\forall y) P(x, y) \Rightarrow (\forall y) (\exists x) P(x, y)$
 $\delta) \vdash (\exists y) (\forall x) P(x, y) \Rightarrow (\forall x) (\exists y) P(x, y)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

83. Νά δειχθῇ ὅτι ἕκαστος ἐκ τῶν ἐξῆς δύο τύπων δέν εἶναι ταυτολογία:

- 1) $(\exists x) [p \Rightarrow q(x)] \wedge p.$ 2) $(\forall x) [p(x) \Leftrightarrow q] \vee p(y).$

84. Νά δειχθῇ ὅτι ὁ τύπος:

$$(\forall y) [p(y) \vee (\forall x) (p(x) \Rightarrow q)]$$

δέν εἶναι ταυτολογία.

85. Δείξατε ὅτι ὁ τύπος:

$$(\exists x) p(x) \wedge (\exists x) q(x) \Rightarrow (\exists x) [p(x) \wedge q(x)]$$

δέν εἶναι ταυτολογία.

86. Ἐξετάσατε ἐάν ἕκαστος ἐκ τῶν κάτωθι τύπων εἶναι ταυτολογία ἢ ὄχι:

- 1) $(\forall x) [p(x) \vee q(x)] \Rightarrow (\forall x) p(x) \vee (\forall x) q(x)$
- 2) $[(\forall x) p(x) \Rightarrow (\forall x) q(x)] \Rightarrow (\forall x) [p(x) \Rightarrow q(x)]$
- 3) $[(\exists x) p(x) \Rightarrow (\exists x) q(x)] \Rightarrow (\forall x) [p(x) \Rightarrow q(x)]$
- 4) $[(\forall x) p(x) \Leftrightarrow (\forall x) q(x)] \Rightarrow (\forall x) [p(x) \Leftrightarrow q(x)]$
- 5) $[(\exists x) p(x) \Leftrightarrow (\exists x) q(x)] \Rightarrow (\forall x) [p(x) \Leftrightarrow q(x)]$
- 6) $(\forall x) p(x) \vee (\exists x) q(x) \Rightarrow (\forall x) [p(x) \vee q(x)]$
- 7) $(\exists x) [p(x) \Rightarrow q(x)] \Rightarrow [(\exists x) p(x) \Rightarrow (\exists x) q(x)]$
- 8) $(\forall x) [p(x) \Rightarrow q(x)] \Rightarrow [(\exists x) p(x) \Rightarrow (\forall x) q(x)]$

87. Νά δειχθῇ ὅτι:

$$\vdash (\forall x) Q(x) \wedge (\exists x) P(x) \Rightarrow Q(x) \wedge (\exists x) P(x).$$

88. Δείξατε ὅτι:

$$\alpha) \vdash (\forall x) \overline{P(x)} \Rightarrow \overline{(\forall x) P(x)}. \quad \parallel \quad \beta) \vdash \overline{(\exists x) P(x)} \Rightarrow (\exists x) \overline{P(x)}.$$

89. Δείξατε ὅτι:

- $\alpha) \vdash (\forall x) P(x) \Rightarrow (\forall x) [Q(x) \vee (P(x) \wedge \overline{Q(x)})].$
 $\beta) \vdash (\exists x) P(x) \Rightarrow (\exists x) [Q(x) \vee (P(x) \wedge \overline{Q(x)})].$

90. Νά δειχθῇ ὅτι:

- α) $\vdash (\forall x) [\overline{P(x)} \Rightarrow Q(x)] \wedge (\forall x) [\overline{Q(x)} \Rightarrow R(x)] \Rightarrow (\forall x) [\overline{P(x)} \Rightarrow R(x)]$.
 β) $\vdash (\forall x) [\overline{P(x)} \Leftrightarrow Q(x)] \wedge (\forall x) [\overline{Q(x)} \Leftrightarrow R(x)] \Rightarrow (\forall x) [\overline{P(x)} \Leftrightarrow R(x)]$.

91. 'Αποδείξτε ότι:

- 1) $\overline{(\exists x) [\overline{p(x)} \wedge q(x)]} \equiv (\forall x) [\overline{p(x)} \Rightarrow \overline{q(x)}]$.
- 2) $\overline{(\exists x) [\overline{p(x)} \Rightarrow q(x)]} \equiv (\forall x) [\overline{p(x)} \vee q(x)]$.
- 3) $\overline{(\forall x) [\overline{p(x)} \Leftrightarrow q(x)]} \equiv (\exists x) [\overline{p(x)} \Leftrightarrow q(x)]$.

92. Δι' ἑκαστον ἐκ τῶν κάτωθι τύπων νά εὑρεθῇ ἓνας ἄλλος ἰσοδύναμος τύπος, εἰς τόν ὁποῖον τό σύμβολον τῆς ἀρνήσεως νά ἐμφανίζεται μόνον εἰς τοὺς στοιχειώδεις τοῦ τύπου:

- 1) $\overline{(\forall x)[(\overline{P(x)} \vee (\exists y)\overline{q(x,y)}) \wedge (\forall y)r(y)]}$.
- 2) $\overline{[(\exists x)p(x) \Rightarrow (\forall x)q(x,y)] \vee (\forall x)\overline{p(x)}}$.

93. Σχηματίσατε τήν ἀρνησιν ἐκάστου ἐκ τῶν κάτωθι τύπων καί περιορίσατε τό σύμβολον τῆς ἀρνήσεως εἰς τοὺς στοιχειώδεις τύπους:

- | | |
|--|--|
| 1) $(\forall x)p(x) \wedge (\exists y)q(y)$ | 5) $(\forall x)(\exists y) [\overline{p(x,y)} \Rightarrow q(x)]$ |
| 2) $(\exists x)p(x) \vee (\forall y)q(y)$ | 6) $(\exists x)(\exists y) [\overline{p(x)} \wedge q(y)]$ |
| 3) $(\forall x)(\exists y)(\forall z)p(x,y,z)$ | 7) $(\forall x)(\forall y) [\overline{p(x,y)} \Rightarrow q(z)]$ |
| 4) $(\exists x)(\forall y) [\overline{p(x)} \vee \overline{q(x)}]$ | 8) $(\forall x) [\overline{p(x,y)} \Rightarrow \overline{q(z)}] \Rightarrow (\exists z)q(z)$ |

94. "Εστώσαν $P(x,y)$ καί $Q(x,y)$ δύο τύποι, τοὺς ὁποίους συμβολίζομεν, συντόμως, P καί Q , ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι:

- α) $\vdash (\forall x)(\forall y) (P \Rightarrow Q) \wedge (\forall x)(\forall y) P \Rightarrow (\forall x)(\forall y) Q$.
- β) $\vdash (\forall x)(\forall y) P \Rightarrow [(\exists x)(\forall y) Q \Rightarrow (\exists x)(\forall y) (P \wedge Q)]$.
- γ) $\vdash (\forall x)(\forall y) P \Rightarrow [(\forall x)(\exists y) Q \Rightarrow (\forall x)(\exists y) (P \wedge Q)]$.
- δ) $\vdash (\forall x)(\forall y) P \Rightarrow [(\exists x)(\exists y) Q \Rightarrow (\exists x)(\exists y) (P \wedge Q)]$.

95. Δείξατε ὅτι:

- 1) $\vdash (\forall x)(\forall y) P(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x) P(x,y)$, 2) $\vdash (\exists y)(\forall x) P(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\exists y) P(x,y)$.

96. Δείξατε ὅτι:

- α) $\vdash (\forall x)(\forall y) [\overline{P(x,y)} \vee Q(x,y)] \Rightarrow (\forall x)(\forall y) P(x,y) \vee (\exists x)(\exists y) Q(x,y)$
- β) $\vdash (\forall x)(\forall y) [\overline{P(x,y)} \vee Q(x,y)] \Rightarrow (\exists x)(\forall y) P(x,y) \vee (\exists x)(\exists y) Q(x,y)$
- γ) $\vdash (\forall x)(\forall y) [\overline{P(x,y)} \vee Q(x,y)] \Rightarrow (\exists x)(\forall y) P(x,y) \vee (\forall x)(\exists y) Q(x,y)$

97. "Εστώσαν $P(x)$ καί $Q(y)$ δύο τύποι, ἐξ ὧν ὁ $P(x)$ δέν περιέχει ἐλευθέρως ἐμφανίσεις τοῦ y καί ὁ $Q(y)$ δέν περιέχει ἐλευθέρως ἐμφανίσεις τοῦ x . Δείξατε ὅτι:

- 1) $(\exists x)(\forall y) [\overline{P(x)} \wedge Q(y)] \equiv (\exists x) P(x) \wedge (\forall y) Q(y)$
- 2) $(\exists x)(\forall y) [\overline{P(x)} \wedge Q(y)] \equiv (\forall y)(\exists x) [\overline{P(x)} \wedge Q(y)]$
- 3) $(\exists x)(\forall y) [\overline{P(x)} \vee Q(y)] \equiv (\exists x) P(x) \vee (\forall y) Q(y)$
- 4) $(\exists x)(\forall y) [\overline{P(x)} \vee Q(y)] \equiv (\forall y)(\exists x) [\overline{P(x)} \vee Q(y)]$
- 5) $(\exists x)(\forall y) [\overline{P(x)} \Rightarrow Q(y)] \equiv (\forall x) P(x) \Rightarrow (\forall y) Q(y)$
- 6) $(\exists x)(\forall y) [\overline{P(x)} \Rightarrow Q(y)] \equiv (\forall y)(\exists x) [\overline{P(x)} \Rightarrow Q(y)]$

Κεφάλαιον 8

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΛΟΓΙΣΜΟΥ ΕΙΣ ΤΟΝ ΚΑΤΗΓΟΡΙΚΟΝ ΛΟΓΙΣΜΟΝ

8.1. Ἡ ἐννοια τοῦ διαλογισμοῦ εἰς τόν κατηγορικόν λογισμόν.

Ἡ ἐννοια τοῦ διαλογισμοῦ εἰς τόν κατηγορικόν λογισμόν εἶναι ἐπέκτασις τῆς ἐννοίας τοῦ διαλογισμοῦ (ἐπιχειρήματος) εἰς τόν προτασιακόν λογισμόν (§ 5.1). Ἀκριβέστερον, διαλογισμός εἰς τόν κατηγορικόν λογισμόν λέγεται μία ὁμάς τύπων (τοῦ κατηγοριοῦ λογισμοῦ), ἐκ τῶν ὁποίων ὁ ἕνας, καλούμενος «συμπέρασμα», ἀκολουθεῖ τούς ἄλλους, καλουμένους «ὑποθέσεις».

Ἐνας διαλογισμός εἰς τόν κατηγορικόν λογισμόν μέ ὑποθέσεις $P_1, P_2, \dots, P_n$ καί συμπέρασμα Q συμβολίζεται, ὅπως καί εἰς τόν προτασιακόν λογισμόν, μέ:

$$P_1, P_2, \dots, P_n \therefore Q$$

καί διαβάζεται, πάλιν:

$$\langle P_1, P_2, \dots, P_n \text{ ἀκολουθεῖ } Q \rangle.$$

— Κάθε διαλογισμός εἰς τόν κατηγορικόν λογισμόν, ἀποτελούμενος ἐκ δύο ὑποθέσεων καί τοῦ συμπεράσματος, λέγεται, πάλιν, καί «συλλογισμός».

— Εἰς τὰ ἐπόμενα, ὅταν λέγωμεν ἀπλῶς «διαλογισμός», θά ἐννοοῦμεν «διαλογισμός τοῦ κατηγοριοῦ λογισμοῦ». Ὅταν δέ πρόκειται περί διαλογισμοῦ τοῦ προτασιακοῦ λογισμοῦ, θά τονίζεται ἰδιαιτέρως.

8.2. Ἡ ἐννοια τοῦ ἰσχυροῦ διαλογισμοῦ εἰς τόν κατηγορικόν λογισμόν.

Ἐνας διαλογισμός μέ ὑποθέσεις $P_1, P_2, \dots, P_n$ καί συμπέρασμα Q λέγομεν ὅτι εἶναι «ἰσχυρός» (εἰς τόν κατηγορικόν λογισμόν) ἐάν, καί μόνον ἐάν, διὰ κάθε θεωρούμενον πεδίου M καί διὰ κάθε ἀντικατάστασιν τῶν μεταβλητῶν του προτασιακῶν τύ-

πων και των ελευθέρων μεταβλητών αντικειμένων του⁽¹⁾, αντιστοίχως μέ σταθερούς προτασιακούς τύπους, αναφερομένους είς τό Μ και μέ σταθερά αντικείμενα του Μ, τό συμπέρασμά του λαμβάνη τιμήν αληθείας α, εάν όλαι αι υποθέσεις του λαμβάνουν τιμήν αληθείας α. Είς τήν αντίθετον περίπτωσιν ο διαλογισμός λέγομεν ότι είναι «άνισχυρος» (μή ίσχυρός).

Ούτω, ή έννοια του ίσχυρου διαλογισμού είς τόν κατηγορικόν λογισμόν είναι επέκτασις της έννοίας του ίσχυρου διαλογισμού είς τόν προτασιακόν λογισμόν (§ 5.2).

Ένας ίσχυρός διαλογισμός: $P_1, P_2, \dots, P_n \therefore Q$ συμβολίζεται όπως και είς τόν προτασιακόν λογισμόν, μέ:

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$$

και διαβάζεται, πάλιν:

« $P_1, P_2, \dots, P_n$ παράγουν Q »

ή « $P_1, P_2, \dots, P_n$ ὁθεν (ή ἄρα) Q ».

— Είς τήν περίπτωσιν ὅπου: $P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$ λέγομεν ἀκόμη, ὅπως και είς τόν προτασιακόν λογισμόν, ότι ὁ τύπος Q είναι μία «ίσχυρά συνέπεια» τών $P_1, P_2, \dots, P_n$.

Είναι εύκολον νά ἴδωμεν ότι αι προτάσεις I, II και III της § 5.3 γενικεύονται είς τόν κατηγορικόν λογισμόν (ἐξακολουθοῦν ἰσχύουσai και είς τήν περίπτωσιν ὅπου τά ὑπεισερχόμενα γράμματα παριστοῦν τύπους του κατηγορικοῦ λογισμού). Εἰδικῶς, βάσει της γενικεύσεως της ἀνωτέρω προτάσεως III, διά νά δείξωμεν (είς τόν κατηγορικόν λογισμόν, ὡς και είς τόν προτασιακόν) ότι: « $P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$ », ἄρκει νά δείξωμεν ότι: « $\vdash P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \Rightarrow Q$ ».

Παράδειγμα 1. Ὁ διαλογισμός:

$$\begin{array}{|l} (\forall x) [P(x) \Rightarrow Q(x)], (\forall x) [Q(x) \Rightarrow R(x)] \therefore (\forall x) [P(x) \Rightarrow R(x)] \\ \hline \text{είναι ίσχυρός.} \end{array}$$

Βάσει τών προηγουμένων, ἄρκει νά δείξωμεν ὅτι:

$$\vdash (\forall x) [P(x) \Rightarrow Q(x)] \wedge (\forall x) [Q(x) \Rightarrow R(x)] \Rightarrow (\forall x) [P(x) \Rightarrow R(x)]. \quad (1)$$

Έχομεν:

$$\vdash [P(x) \Rightarrow Q(x)] \wedge [Q(x) \Rightarrow R(x)] \Rightarrow [P(x) \Rightarrow R(x)] \quad (\text{διατύ;})$$

και συνεπῶς:

$$\vdash (\forall x) [(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (Q(x) \Rightarrow R(x))] \Rightarrow (\forall x) [P(x) \Rightarrow R(x)]. \quad (\S 7.3, \text{πρωτ. VII})$$

Έξ αὐτῆς, βάσει της Ia της § 7.6, ἔπεται ή (1).

(1). Έννοοῦμεν, τούς μεταβλητούς προτασιακούς τύπους και τά ελεύθερα μεταβλητά αντικείμενα, πού ἐμφανίζονται είς τούς τύπους $P_1, P_2, \dots, P_n$ και Q (υποθέσεις και συμπέρασμα).

Παράδειγμα 2. 'Ο διαλογισμός:

$$\begin{array}{|l} (\forall x) [P(x) \Rightarrow Q(x)] , (\exists x) \overline{Q(x)} \therefore (\exists x) \overline{P(x)} \\ \hline \hline \hline \end{array}$$
 είναι ισχυρός.

Πρός τοῦτο, ἄρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι:

$$\vdash (\forall x) [P(x) \Rightarrow Q(x)] \wedge (\exists x) \overline{Q(x)} \Rightarrow (\exists x) \overline{P(x)}. \quad (1)$$

"Ἐχομεν:

$$\vdash [P(x) \Rightarrow Q(x)] \Rightarrow [\overline{Q(x)} \Rightarrow \overline{P(x)}] \quad (\text{διατύ;})$$

καὶ συνεπῶς:

$$\vdash (\forall x) [P(x) \Rightarrow Q(x)] \Rightarrow (\forall x) [\overline{Q(x)} \Rightarrow \overline{P(x)}]. \quad (\S 7.3, \text{προτ. VII})$$

'Εξ αὐτῆς καὶ ἐπευδῆ:

$$\vdash (\forall x) [\overline{Q(x)} \Rightarrow \overline{P(x)}] \Rightarrow [(\exists x) \overline{Q(x)} \Rightarrow (\exists x) \overline{P(x)}] \quad (\S 7.6, \text{II}\beta)$$

ἔπεται ὅτι:

$$\vdash (\forall x) [P(x) \Rightarrow Q(x)] \Rightarrow [(\exists x) \overline{Q(x)} \Rightarrow (\exists x) \overline{P(x)}],$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἔπεται ἡ (1) (διατύ;).

Παράδειγμα 3. 'Ο διαλογισμός:

$$\begin{array}{|l} (\forall x) [p(x) \Rightarrow q(x)] , (\exists x) [q(x) \wedge r(x)] \therefore (\forall x) [p(x) \Rightarrow r(x)] \\ \hline \hline \hline \end{array}$$
 δέν εἶναι ισχυρός.

θεωροῦμεν ὡς πεδῖον M τό σύνολον: $\{1, 2\}$. "Εστω, τώρα, ὅτι τό κατηγορημα:

$p()$ σημαίνει: «εἶναι μεγαλύτερον ἢ ἴσον τοῦ 1»

τό $q()$ σημαίνει: «εἶναι μικρότερον ἢ ἴσον τοῦ 2»

καὶ τό $r()$ σημαίνει: «εἶναι διάφορον τοῦ 1».

'Αντικαθιστῶντες εἰς τόν δοθέντα διαλογισμόν ἔχομεν:

1η ὑπόθεσις: $(\forall x) [(x \geq 1) \Rightarrow (x \leq 2)]$ (ἀληθής, διατύ;)

2α ὑπόθεσις: $(\exists x) [(x \leq 2) \wedge (x \neq 1)]$ (ἀληθής, διατύ;)

Συμπέρασμα: $(\forall x) [(x \geq 1) \Rightarrow (x \neq 1)]$ (ψευδής, διατύ;)

"Αρα, ὁ δοθείς διαλογισμός δέν εἶναι ισχυρός (διατύ;).

Σημείωσις. Διὰ νά δείξωμεν τήν μή ισχυρότητα τοῦ ἀνωτέρω διαλογισμοῦ, δυνάμεθα νά ἐργασθῶμεν καὶ ὡς ἐξῆς:

θεωροῦντες ὡς πεδῖον M ἓν σύνολον μέ δύο στοιχεῖα π.χ. τό $\{a, b\}$, ἔχομεν:

$$(\forall x) [p(x) \Rightarrow q(x)] \equiv [p(a) \Rightarrow q(a)] \wedge [p(b) \Rightarrow q(b)]$$

$$(\exists x) [q(x) \wedge r(x)] \equiv [q(a) \wedge r(a)] \vee [q(b) \wedge r(b)]$$

$$\text{καὶ} \quad (\forall x) [p(x) \Rightarrow r(x)] \equiv [p(a) \Rightarrow r(a)] \wedge [p(b) \Rightarrow r(b)].$$

'Αντιστοιχοῦντες, τώρα, εἰς τά: $p(a)$, $p(b)$, $q(a)$, $q(b)$ καὶ $r(b)$ τήν τιμήν ἀληθείας α καὶ εἰς τό $r(a)$ τήν τιμήν ἀληθείας γ , συμπεραίνομεν ὅτι ὁ δοθείς διαλογισμός δέν εἶναι ισχυρός (διατύ;).

8.3. Απόδειξις τῆς ἰσχυρότητος ἐνός διαλογισμοῦ

(εἰς τόν κατηγορικόν λογισμόν). Ποσοδεικτικοί
κανόνες συμπεράσματος.

Μετά τήν γενίκευσιν εἰς τόν κατηγορικόν λογισμόν τῶν προτάσεων I, II καί III τῆς § 5.3 εἶναι εὐκόλον νά γενικεύσωμεν (εἰς τόν κατηγορικόν λογισμόν) καί τās προτάσεις I, II, καί III τῆς § 5.5. Οὕτω, βάσει καί τῶν προτάσεων τῆς § 7.3, προκύπτει ὅτι:

Ἕνας διαλογισμός (εἰς τόν κατηγορικόν λογισμόν):

$$P_1, P_2, \dots, P_n \therefore Q \quad (1)$$

εἶναι ἰσχυρός, ἥτοι:

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$$

ἐάν δυνάμεθα νά κατασκευάσωμεν μίαν (πεπερασμένην) διαδοχήν τύπων:

$$E_1, E_2, \dots, E_k \quad (2)$$

ὁ τελευταῖος τῶν ὁποίων εἶναι ὁ Q καί τοιαύτην, ὥστε ἕκαστος τύπος (τῆς διαδοχῆς) E

Κανὼν υ: «εἶναι μία ὑπόθεσις (τοῦ διαλογισμοῦ)» ἥ

Κανὼν τ: «ὑπάρχουν προηγούμενοι τύποι (ἕνας ἢ περισσότεροι) εἰς τήν διαδοχήν, τῶν ὁποίων ἡ σύζευξις συνεπάγεται ταυτολογικῶς τόν E» ἥ

Κανὼν (εἰδικεύσεως τοῦ καθολικοῦ) ε.κ.: «ὑπάρχει προηγούμενος τύπος εἰς τήν διαδοχήν τῆς μορφῆς: $(\forall x)P(x)$ τοιοῦτος, ὥστε E εἶναι $P(y)$ μέ τήν συνθήκην ὅτι εἰς τόν $P(y)$ οὐδεμία ἐμφάνισις τοῦ y εἶναι φραγμένη» ἥ

Κανὼν (καθολικῆς γενικεύσεως) κ.γ.: «E εἶναι τῆς μορφῆς: $(\forall x)P(x)$, ὅπου $P(x)$ εἶναι ἕνας προηγούμενος τύπος εἰς τήν διαδοχήν μέ τήν συνθήκην ὅτι τό x δέν εἶναι μία μεταβλητή ἔχουσα ἐλευθέρας ἐμφανίσεις (μίαν ἢ περισσότερας) εἰς μίαν ἢ περισσότερας ὑποθέσεις».

Μία τοιαύτη διαδοχή: $E_1, E_2, \dots, E_k$ (ἐάν ὑπάρχη) λέγομεν, πάλιν, ὅτι εἶναι μία «παραγωγή» τοῦ Q ἐκ τῶν $P_1, P_2, \dots, P_n$ ἥ ὅτι εἶναι μία «ἄμεσος ἀπόδειξις» τῆς ἰσχυρότητος τοῦ διαλογισμοῦ (1) (εἰς τόν κατηγορικόν λογισμόν). Οἱ τύποι $E_1, E_2, \dots, E_k$ λέγονται, πάλιν, «ὅροι» τῆς παραγωγῆς αὐτῆς.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω τεσσάρων κανόνων, οἱ δύο πρῶτοι εἶναι οἱ ἀντίστοιχοι γνωστοί κανόνες συμπεράσματος υ καί τ τοῦ προτασιακοῦ λογισμοῦ (§ 5.5). Οἱ ἄλλοι δύο λέγονται καί **ποσοδεικτικοί κανόνες συμπεράσματος**. Εἰς τήν ἐπομένην παράγραφον θά ἴδωμεν καί δύο ἄλλους τοιούτους κανόνας.

— Ἡ γενίκευσις εἰς τόν κατηγορικόν λογισμόν τῆς προτάσεως τῆς § 5.9 εἶναι προφανής, ὅπως καί ὁ κανὼν υ.α. (ὕποθετικῆς ἀποδείξεως, § 5.9) (ἡ ἀπόδειξις διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς εἶναι ἐν εἴδους ὑποθετικῆς ἀποδείξεως, § 5.11).

Παράδειγμα 1. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\vdash (\forall x) [p(x) \Rightarrow q(x)]. (\forall x) [q(x) \Rightarrow r(x)] \vdash (\forall x) [p(x) \Rightarrow r(x)].$$

Ἀπόδειξις. Ἐχομεν:

- | | | |
|-----|---------------------------------------|----------------|
| (1) | $(\forall x) [p(x) \Rightarrow q(x)]$ | υ |
| (2) | $(\forall x) [q(x) \Rightarrow r(x)]$ | υ |
| (3) | $p(y) \Rightarrow q(y)$ | (1), ε.κ. |
| (4) | $q(y) \Rightarrow r(y)$ | (2), ε.κ. |
| (5) | $p(y) \Rightarrow r(y)$ | (3) καὶ (4), τ |
| (6) | $(\forall x) [p(x) \Rightarrow r(x)]$ | (5), κ.γ. |

Παράδειγμα 2. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\vdash (\forall x) [(\exists y) (q(x, y) \wedge s(y)) \Rightarrow (\exists y) (p(y) \wedge r(x, y))],$$

$$\vdash (\exists x) \overline{p(x)} \vdash (\forall x) (\forall y) [q(x, y) \Rightarrow \overline{s(y)}].$$

Ἀπόδειξις. Ἐχομεν:

- | | | |
|------|---|----------------|
| (1) | $(\forall x) [(\exists y) (q(x, y) \wedge s(y)) \Rightarrow (\exists y) (p(y) \wedge r(x, y))]$ | υ |
| (2) | $\overline{(\exists x) p(x)}$ | υ |
| (3) | $(\forall x) \overline{p(x)}$ | (2), τ |
| (4) | $\overline{p(y)}$ | (3), ε.κ. |
| (5) | $\overline{p(y)} \vee \overline{r(x, y)}$ | (4), τ |
| (6) | $(\forall y) [\overline{p(y)} \vee \overline{r(x, y)}]$ | (5), κ.γ. |
| (7) | $(\exists y) [\overline{p(y)} \wedge \overline{r(x, y)}]$ | (6), τ |
| (8) | $(\exists y) [q(x, y) \wedge s(y)] \Rightarrow (\exists y) [p(y) \wedge r(x, y)]$ | (1), ε.κ. |
| (9) | $(\exists y) [q(x, y) \wedge s(y)]$ | (7) καὶ (8), τ |
| (10) | $(\forall y) [\overline{q(x, y)} \vee \overline{s(y)}]$ | (9), τ |
| (11) | $(\forall y) [q(x, y) \Rightarrow \overline{s(y)}]$ | (10), τ |
| (12) | $(\forall x) (\forall y) [q(x, y) \Rightarrow \overline{s(y)}]$ | (11), κ.γ. |

Παράδειγμα 3. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\vdash (\forall x) [p(x) \vee s(x) \Rightarrow q(x) \wedge r(x)] \vdash (\forall x) [p(x) \Rightarrow q(x)].$$

Ἀπόδειξις. Ἐχομεν:

- | | | |
|-------|---|--------------------------|
| (1) | $(\forall x) [p(x) \vee s(x) \Rightarrow q(x) \wedge r(x)]$ | υ |
| → (2) | $p(y)$ | υ (ἐμπρόσθετος ὑπόθεσις) |
| (3) | $p(y) \vee s(y) \Rightarrow q(y) \wedge r(y)$ | (1), ε.κ. |
| (4) | $p(y) \vee s(y)$ | (2), τ |
| (5) | $q(y) \wedge r(y)$ | (3) καὶ (4), τ |
| (6) | $q(y)$ | (5), τ |
| (7) | $p(y) \Rightarrow q(y)$ | (2) - (6), υ.α. |

$$(8) \quad (\forall x) [p(x) \Rightarrow q(x)]$$

(7), κ.γ

8.4. Δύο άλλοι ποσοδεικτικοί κανόνες συμπεράσματος.

Είς τούς τέσσαρες κανόνες συμπεράσματος τῆς προηγούμενης παραγράφου δυνάμεθα νά προσθέσωμεν δύο ακόμη (ποσοδεικτικούς), τούς ἐξῆς:

Κανὼν (εἰδικεύσεως τοῦ ὑπαρξιακοῦ) ε.υ.: «ὑπάρχει προηγούμενος τύπος εἰς τὴν διαδοχὴν τῆς μορφῆς: $(\exists x)P(x)$ τοιοῦτος, ὥστε E εἶναι $P(y)$ μετὰ τὴν συνθήκην ὅτι τό γράμμα y δέν ἔχει χρησιμοποιηθῇ προηγούμενως εἰς τὴν παραγωγὴν».

Κανὼν (ὑπαρξιακῆς γενικεύσεως) υ.γ.: « E εἶναι τῆς μορφῆς: $(\exists x)P(x)$, ὅπου $P(x)$ εἶναι ἓνας προηγούμενος τύπος εἰς τὴν διαδοχὴν».

Ὁ (τελευταῖος) κανὼν υ.γ., ὅπως διευτυπώθη (χωρὶς περιορισμούς διὰ τὴν μεταβλητὴν x), ἰσχύει μόνον μετὰ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι οἱ ὑπαρξιακῶς ποσοδεικτούμενοι τύποι περιέχουν μίαν μόνον μεταβλητὴν. Εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν, διὰ νά ἰσχύῃ ὁ ἐν λόγῳ κανὼν, πρέπει νά τεθοῦν μερικοὶ περιορισμοί διὰ τὴν μεταβλητὴν x . Ἀλλὰ μετὰ τὴν τελευταίαν αὐτὴν περίπτωσιν δέν θά ἀσχοληθῶμεν ἐνταῦθα.

— Εἶναι προφανές ὅτι: ἐάν εἰς μίαν παραγωγὴν θέλωμεν νά ἐφαρμόσωμεν ἀμφοτέρους τούς κανόνες ε.υ. καὶ ε.κ. ὥς πρὸς ἓν καὶ τό αὐτό γράμμα y , τότε πρέπει νά προηγηθῇ ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ κανόνος ε.υ. (διαιτί;).

Παράδειγμα 1. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$||| (\forall x) [p(x) \Rightarrow q(x)], (\exists x) [p(x) \wedge r(x)] \vdash (\exists x) [q(x) \wedge r(x)].$$

Ἀπόδειξις. Ἔχομεν:

- | | | |
|-----|---------------------------------------|----------------|
| (1) | $(\forall x) [p(x) \Rightarrow q(x)]$ | υ |
| (2) | $(\exists x) [p(x) \wedge r(x)]$ | υ |
| (3) | $p(y) \wedge r(y)$ | (2), ε.υ. |
| (4) | $p(y) \Rightarrow q(y)$ | (1), ε.κ. |
| (5) | $q(y) \wedge r(y)$ | (3) καὶ (4), τ |
| (6) | $(\exists x) [q(x) \wedge r(x)]$ | (5), υ.γ. |

Παράδειγμα 2. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$||| (\forall x) [p(x) \Rightarrow (\forall y) (q(y) \Rightarrow r(x, y))],$$

$$||| (\forall x) [p(x) \Rightarrow (\forall z) (s(z) \Rightarrow \overline{r(x, z)})],$$

$$||| (\exists x) p(x) \vdash (\forall y) [q(y) \Rightarrow \overline{s(y)}].$$

Ἀπόδειξις. Ἔχομεν:

- | | | |
|-----|---|---|
| (1) | $(\forall x) [p(x) \Rightarrow (\forall y) (q(y) \Rightarrow r(x, y))]$ | υ |
|-----|---|---|

- | | | |
|------|--|-----------------|
| (2) | $(\forall x)[\overline{p(x)} \Rightarrow (\forall z)(s(z) \Rightarrow \overline{r(x,z)})]$ | υ |
| (3) | $(\exists x)p(x)$ | υ |
| (4) | $p(\alpha)$ | (3), ε.υ. |
| (5) | $p(\alpha) \Rightarrow (\forall y)(q(y) \Rightarrow r(\alpha,y))$ | (1), ε.κ. |
| (6) | $p(\alpha) \Rightarrow (\forall z)(s(z) \Rightarrow \overline{r(\alpha,z)})$ | (2), ε.κ. |
| (7) | $(\forall y)(q(y) \Rightarrow r(\alpha,y))$ | (4) και (5), τ |
| (8) | $(\forall z)(s(z) \Rightarrow \overline{r(\alpha,z)})$ | (4) και (6), τ |
| (9) | $q(y) \Rightarrow r(\alpha,y)$ | (7), ε.κ. |
| (10) | $s(y) \Rightarrow \overline{r(\alpha,y)}$ | (8), ε.κ. |
| (11) | $q(y) \Rightarrow \overline{s(y)}$ | (9) και (10), τ |
| (12) | $(\forall y)[q(y) \Rightarrow \overline{s(y)}]$ | (11), κ.γ. |

Παράδειγμα 3. Ζητείται νά εὑρεθῇ τό σφάλμα εἰς τήν κατωτέρω παραγωγήν, ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει ὅτι ὁ (προφανῶς ἀνίσχυρος) διαλογισμός:

$$(\exists x)p(x), (\exists x)\overline{p(x)} \therefore (\exists x)[p(x) \wedge \overline{p(x)}]$$

εἶναι ἰσχυρός:

- | | | |
|-----|--|----------------|
| (1) | $(\exists x)p(x)$ | υ |
| (2) | $(\exists x)\overline{p(x)}$ | υ |
| (3) | $p(y)$ | (1), ε.υ. |
| (4) | $\overline{p(y)}$ | (2), ε.υ. |
| (5) | $p(y) \wedge \overline{p(y)}$ | (3) και (4), τ |
| (6) | $(\exists x)[p(x) \wedge \overline{p(x)}]$ | (5), υ.γ. |

Τό σφάλμα εὐρίσκεται εἰς τήν γραμμήν (4) (διαιτύ;).

8.5. Ἐφαρμογαί.

Ἐκαστος ἐκ τῶν κάτωθι διαλογισμῶν νά τεθῇ ὑπό συμβολικὴν μορφήν καί ἀκολουθῶς νά εὑρεθῇ ἐάν εἶναι ἰσχυρός ἢ ὄχι (ἀνωθεν μιᾶς ὀριζοντίου γραμμῆς γράφομεν τὰς ὑποθέσεις: $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ τοῦ διαλογισμοῦ καί κάτωθεν αὐτῆς τό συμπέρασμά του: Σ).

1) $\ll Y_1 : \text{"Ὅλοι οἱ ἄνθρωποι εἶναι θνητοί."}$

$Y_2 : \text{"Ὁ Σωκράτης εἶναι ἄνθρωπος."}$

$\Sigma : \text{"Ὁ Σωκράτης εἶναι θνητός"} \gg$.

Συμβολίζοντες:

τό κατηγορήμα: «εἶναι ἄνθρωπος» μέ $A()$,

τό κατηγορήμα: «εἶναι θνητός» μέ $\theta()$

καί τό «Σωκράτης» μέ σ ,

ὁ δοθεὺς διαλογισμός, βάσει καὶ τῆς § 6.8, δύναται νά συμβολισθῇ ὡς ἑξῆς:

$$(\forall x)[A(x) \Rightarrow \theta(x)], A(\sigma) \therefore \theta(\sigma).$$

Ο διαλογισμός όμως ούτος είναι ισχυρός. Πράγματι:

- | | | |
|-----|--|----------------|
| (1) | $(\forall x) [A(x) \Rightarrow \theta(x)]$ | υ |
| (2) | $A(\sigma)$ | υ |
| (3) | $A(\sigma) \Rightarrow \theta(\sigma)$ | (1), ε.κ. |
| (4) | $\theta(\sigma)$ | (2) καὶ (3), τ |

"Αρα, ὁ δοθεὺς διαλογισμός είναι ισχυρός.

2) << Y_1 : Μερικοί μαθηταὶ εἶναι ἔξυπνοι.

Y_2 : Ὁ Πέτρος εἶναι μαθητής.

Σ : Ὁ Πέτρος εἶναι ἔξυπνος>>.

Συμβολίζοντες:

τό κατηγορήμα: «εἶναι μαθητής» μέ $M()$,

τό κατηγορήμα: «εἶναι ἔξυπνος» μέ $E()$

καὶ τό «Πέτρος» μέ π ,

ὁ δοθεὺς διαλογισμός δύναται νά συμβολισθῇ ὡς ἑξῆς:

$(\exists x) [M(x) \wedge E(x)]$, $M(\pi) \cdot E(\pi)$. (διατύ;)

Ὁ διαλογισμός, όμως, οὗτος δέν είναι ισχυρός (διατύ;). "Αρα, ὁ δοθεὺς διαλογισμός δέν είναι ισχυρός.

3) << Y_1 : Ὅλοι οἱ ἀκέραιοι εἶναι ρητοί.

Y_2 : Μερικοί πραγματικοί εἶναι ρητοί.

Σ : Ὅλοι οἱ ἀκέραιοι εἶναι πραγματικοί>>.

Συμβολίζοντες τό κατηγορήμα:

«εἶναι ἀκέραιος» μέ $A()$,

τό: «εἶναι ρητός» μέ $P()$

καὶ τό: «εἶναι πραγματικός» μέ $\Pi()$,

ὁ δοθεὺς διαλογισμός δύναται νά συμβολισθῇ ὡς ἑξῆς:

$(\forall x) [A(x) \Rightarrow P(x)]$, $(\exists x) [\Pi(x) \wedge P(x)] \cdot (\forall x) [A(x) \Rightarrow \Pi(x)]$. (διατύ;)

Ὁ διαλογισμός, όμως, οὗτος δέν είναι ισχυρός (§ 8.2, παραδ.3). "Αρα, ὁ δοθεὺς διαλογισμός δέν είναι ισχυρός.

4) << Y_1 : Ὅλα τὰ ὀρθογώνια εἶναι παραλληλόγραμμα.

Y_2 : Μερικά ὀρθογώνια εἶναι τετράγωνα.

Σ : Μερικά παραλληλόγραμμα εἶναι τετράγωνα>>.

Συμβολίζοντες τό κατηγορήμα:

«εἶναι ὀρθογώνιον» μέ $O()$,

τό: «εἶναι παραλληλόγραμμον» μέ $\Pi()$

καὶ τό: «εἶναι τετράγωνον» μέ $T()$,

ὁ δοθεὺς διαλογισμός δύναται νά συμβολισθῇ ὡς ἑξῆς:

$(\forall x)[O(x) \Rightarrow \Pi(x)], (\exists x)[O(x) \wedge T(x)] \therefore (\exists x)[\Pi(x) \wedge T(x)].$ (διατύ;)

Ο διαλογισμός, όμως ούτος είναι ισχυρός. Πράγματι:

- | | | |
|-----|--|----------------|
| (1) | $(\forall x)[O(x) \Rightarrow \Pi(x)]$ | υ |
| (2) | $(\exists x)[O(x) \wedge T(x)]$ | υ |
| (3) | $O(y) \wedge T(y)$ | (2), ε.υ. |
| (4) | $O(y) \Rightarrow \Pi(y)$ | (1), ε.κ. |
| (5) | $\Pi(y) \wedge T(y)$ | (3) καὶ (4), τ |
| (6) | $(\exists x)[\Pi(x) \wedge T(x)]$ | (5), υ.γ |

"Αρα, ὁ δοθεὺς διαλογισμός είναι ισχυρός.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

98. Βάσει τῆς μεταξὺ διαλογισμῶν καὶ ταυτολογιῶν ὑπαρχούσης σχέσεως, διαπιστώσατε ὅτι:

- 1) $(\forall x)[P(x) \Rightarrow Q(x)], (\forall x)P(x) \vdash (\forall x)Q(x).$
- 2) $(\forall x)[P(x) \Rightarrow Q(x)], (\exists x)[R(x) \wedge P(x)] \vdash (\exists x)Q(x).$
- 3) $(\forall x)[P(x) \vee \overline{Q(x)}], (\exists x)Q(x) \vdash (\exists x)P(x).$
- 4) $(\exists x)[P(x) \Rightarrow Q(x)], (\forall x)[P(x) \vee R(x)] \vdash (\exists x)[Q(x) \vee R(x)].$

99. Δείξατε ὅτι ἕκαστος ἐκ τῶν κάτωθι διαλογισμῶν είναι ἀνίσχυρος:

- 1) $(\forall x)[p(x) \Rightarrow q(x)], (\forall x)[r(x) \Rightarrow q(x)] \therefore (\forall x)[p(x) \Rightarrow r(x)].$
- 2) $(\exists x)[p(x) \wedge q(x)], (\exists x)[p(x) \wedge r(x)] \therefore (\exists x)[q(x) \wedge r(x)].$
- 3) $(\exists x)p(x) \therefore (\forall x)p(x).$
- 4) $(\exists x)[p(x) \wedge q(x)] \therefore (\forall x)p(x).$

100. Εἰς τὰς κάτωθι ἀποδείξεις, δικαιολογήσατε τὴν ἐμφάνισιν ἐκάστου ὅρου:

- 1) $(\forall x)[p(x) \Rightarrow q(x)] \wedge (\forall x)[r(x) \Rightarrow s(x)],$
 $(\forall x)[r(x) \vee p(x)] \vdash (\forall x)[q(x) \vee s(x)].$

- Ἀπόδειξις.**
- (1) $(\forall x)[p(x) \Rightarrow q(x)] \wedge (\forall x)[r(x) \Rightarrow s(x)]$
 - (2) $(\forall x)[r(x) \vee p(x)]$
 - (3) $(\forall x)[p(x) \Rightarrow q(x)]$
 - (4) $(\forall x)[r(x) \Rightarrow s(x)] \wedge (\forall x)[p(x) \Rightarrow q(x)]$
 - (5) $(\forall x)[r(x) \Rightarrow s(x)]$
 - (6) $r(y) \Rightarrow s(y)$
 - (7) $p(y) \Rightarrow q(y)$
 - (8) $r(y) \vee p(y)$
 - (9) $s(y) \vee q(y)$
 - (10) $q(y) \vee s(y)$
 - (11) $(\forall x)[q(x) \vee s(x)].$

- 2) $(\forall x)[p(x) \Rightarrow q(x) \vee r(x)],$

$$(\forall x) [r(x) \Rightarrow \overline{s(x)}] \vdash (\forall x) [p(x) \wedge s(x) \Rightarrow q(x)].$$

Απόδειξις.

- (1) $(\forall x) [p(x) \Rightarrow q(x) \wedge r(x)]$
- (2) $(\forall x) [r(x) \Rightarrow \overline{s(x)}]$
- (3) $p(y) \Rightarrow q(y) \vee r(y)$
- (4) $r(y) \Rightarrow \overline{s(y)}$
- (5) $p(y) \Rightarrow \overline{q(y)} \vee r(y)$
- (6) $p(y) \Rightarrow [\overline{q(y)} \Rightarrow r(y)]$
- (7) $p(y) \wedge \overline{q(y)} \Rightarrow r(y)$
- (8) $p(y) \wedge \overline{q(y)} \Rightarrow \overline{s(y)}$
- (9) $p(y) \Rightarrow [\overline{q(y)} \Rightarrow \overline{s(y)}]$
- (10) $p(y) \Rightarrow [s(y) \Rightarrow q(y)]$
- (11) $p(y) \wedge s(y) \Rightarrow q(y)$
- (12) $(\forall x) [p(x) \wedge s(x) \Rightarrow q(x)]$.

101. Αποδείξτε ότι:

- 1) $(\forall x) [p(x) \wedge \overline{q(x)} \Rightarrow r(x)]$,
 $(\forall x) [r(x) \Rightarrow q(x)] \vdash (\forall x) [p(x) \Rightarrow q(x)]$.
- 2) $(\forall x) [p(x) \Rightarrow q(x) \wedge r(x)]$,
 $(\forall x) [r(x) \Rightarrow s(x)] \vdash (\forall x) [r(x) \vee p(x) \Rightarrow s(x)]$.
- 3) $(\forall x) [p(x) \Rightarrow q(x)] \Rightarrow (\forall x) [q(x) \Rightarrow s(x)]$,
 $(\forall x) [p(x) \Rightarrow r(x)] \wedge (\forall x) [r(x) \Rightarrow q(x)] \vdash (\forall x) [p(x) \Rightarrow s(x)] \wedge (\forall x) [r(x) \Rightarrow s(x)]$.
- 4) $(\forall x) [p(x) \Rightarrow q(x)] \wedge (\forall x) [q(x) \Rightarrow r(x)]$
 $\vdash (\forall x) [p(x) \Rightarrow (s(x) \Rightarrow r(x))]$.
- 5) $(\forall x) [p(x) \wedge (q(x) \vee r(x)) \Leftrightarrow \overline{s(x)}] \vdash (\forall x) [p(x) \wedge r(x) \Rightarrow \overline{s(x)}]$.

102. Είς τας κάτωθι αποδείξεις δικαιολογήσατε τήν εμφάνισιν ἐκάστου ὅρου:

- 1) $(\forall x) [p(x) \Rightarrow q(x)]$, $(\exists x)p(x)$, $(\forall x) [\overline{r(x)} \Rightarrow \overline{q(x)}] \vdash (\exists x)r(x)$.

Απόδειξις.

- (1) $(\forall x) [p(x) \Rightarrow q(x)]$
- (2) $(\exists x)p(x)$
- (3) $(\forall x) [\overline{r(x)} \Rightarrow \overline{q(x)}]$
- (4) $p(y)$
- (5) $p(y) \Rightarrow q(y)$
- (6) $\overline{r(y)} \Rightarrow \overline{q(y)}$
- (7) $q(y) \Rightarrow r(y)$
- (8) $p(y) \Rightarrow r(y)$
- (9) $r(y)$
- (10) $(\exists x)r(x)$.

- 2) $(\forall x) [p(x) \Rightarrow q(x)]$, $(\exists x) [\overline{q(x)} \wedge r(x)]$,
 $(\forall x) [s(x) \Rightarrow \overline{r(x)}] \vdash (\exists x) [s(x) \vee p(x)]$.

- Απόδειξις.**
- (1) $(\forall x) [p(x) \Rightarrow q(x)]$
 - (2) $(\exists x) [\overline{q(x)} \wedge r(x)]$
 - (3) $(\forall x) [\overline{s(x)} \Rightarrow \overline{r(x)}]$
 - (4) $\overline{q(y)} \wedge r(y)$
 - (5) $p(y) \Rightarrow q(y)$
 - (6) $s(y) \Rightarrow \overline{r(y)}$
 - (7) $\overline{q(y)}$
 - (8) $r(y) \wedge \overline{q(y)}$
 - (9) $r(y)$
 - (10) $\overline{p(y)}$
 - (11) $\overline{r(y)}$
 - (12) $\overline{s(y)}$
 - (13) $\overline{s(y)} \wedge \overline{p(y)}$
 - (14) $\overline{s(y)} \vee \overline{p(y)}$
 - (15) $(\exists x) [\overline{s(x)} \vee \overline{p(x)}]$.

103. Νά εὐρεθοῦν τὰ σφάλματα εἰς τὰς κατωτέρω (ἐσφαλμένas)

ἀποδείξεις:

1) $(\exists x)p(x), (\exists x)q(x) \therefore (\exists x)[p(x) \wedge q(x)]$.

- Απόδειξις.**
- | | |
|-------------------------------------|----------------|
| (1) $(\exists x)p(x)$ | υ |
| (2) $(\exists x)q(x)$ | υ |
| (3) $p(y)$ | (1), ε.υ. |
| (4) $q(y)$ | (2), ε.υ. |
| (5) $p(y) \wedge q(y)$ | (3) καὶ (4), τ |
| (6) $(\exists x)[p(x) \wedge q(x)]$ | (5), υ.γ. |

2) $(\exists x)p(x) \therefore (\forall x)p(x)$.

- Απόδειξις.**
- | | |
|-----------------------|-----------|
| (1) $(\exists x)p(x)$ | υ |
| (2) $p(y)$ | (1), ε.υ. |
| (3) $(\forall x)p(x)$ | (2), κ.γ. |

104. Ἀποδείξατε ὅτι:

- 1) $(\forall x) [p(x) \Rightarrow q(x)] \wedge (\exists x) [p(x) \wedge r(x)] \vdash (\exists x) [q(x) \wedge r(x)]$.
- 2) $(\exists x) [p(x) \wedge \overline{q(x)}], (\forall x) [p(x) \wedge \overline{r(x)} \vee \overline{s(x)} \Rightarrow q(x)]$
 $\vdash (\exists x) [r(x) \vee (s(x) \wedge p(x))]$.
- 3) $(\forall x) [p(x) \wedge q(x) \Rightarrow \overline{r(x)}], (\exists x) [p(x) \wedge r(x)],$
 $(\forall x) [p(x) \wedge \overline{q(x)} \Rightarrow s(x)] \vdash (\exists x) [p(x) \wedge s(x)]$.
- 4) $(\forall x) [p(x) \wedge q(x) \Leftrightarrow \overline{r(x)}], (\exists x) [r(x) \wedge q(x)] \vdash (\exists x) [s(x) \vee \overline{p(x)}]$.
- 5) $(\forall x) [p(x) \wedge q(x) \Rightarrow r(x)], (\forall x) [r(x) \Rightarrow \overline{q(x)}],$
 $(\exists x)p(x) \vdash (\exists x)\overline{q(x)}$.

105. Ἀποδείξατε ὅτι:

- 1) $(\forall x) [p(x) \Rightarrow q(x)] \Rightarrow (\forall x) [r(x) \Rightarrow q(x)], (\forall x) [s(x) \Rightarrow r(x)],$
 $(\forall x) [s(x) \Rightarrow q(x)] \vdash (\exists x) [p(x) \wedge \overline{q(x)}].$
- 2) $(\exists x) [\overline{p(x)} \wedge q(x)], (\forall x) [p(x) \vee r(x) \Rightarrow s(x)] \vdash (\forall x) [q(x) \Rightarrow s(x)].$

106. 'Αποδείξτε ότι:

- $(\forall x) (\forall y) [p(x) \vee q(y) \Rightarrow (r(x,y) \Leftrightarrow r(y,x))],$
 $(\forall x) [p(x) \wedge s(x) \Rightarrow (\forall y) (q(y) \wedge s(y) \Rightarrow r(x,y))],$
 $(\exists x) p(x) \wedge (\exists y) q(y) \vdash (\forall y) [q(y) \wedge s(y) \Rightarrow (\forall x) (p(x) \wedge s(x) \Rightarrow r(x,y))].$

107. "Εκαστος ἐκ τῶν κάτωθι διαλογισμῶν νά τεθῇ ὑπό συμβολικὴν μορφήν καὶ ἀκολούθως νά εὐρεθῇ ἐάν εἶναι ἰσχυρὸς ἢ ὄχι:

- 1) Y_1 : Κάθε ρητός ἀριθμὸς εἶναι πραγματικὸς.

Y_2 : Ὑπάρχει ἓνας ρητὸς ἀριθμὸς.

Σ : Ὑπάρχει ἓνας πραγματικὸς ἀριθμὸς.

- 2) Y_1 : Ὅλοι οἱ ρητοὶ ἀριθμοὶ εἶναι πραγματικοί.

Y_2 : Μερικοὶ ρητοὶ εἶναι ἀκέραιοι.

Σ : Μερικοὶ πραγματικοὶ εἶναι ἀκέραιοι.

- 3) Y_1 : Μερικοὶ ρητοὶ εἶναι ἀκέραιοι.

Y_2 : Ὁ $\frac{1}{2}$ εἶναι ρητὸς.

Σ : Ὁ $\frac{1}{2}$ εἶναι ἀκέραιος.

- 4) Y_1 : Μερικοὶ Κύπριοι εἶναι Ἑλληνες.

Y_2 : Μερικοὶ Κύπριοι εἶναι πλούσιοι.

Σ : Μερικοὶ Ἑλληνες εἶναι πλούσιοι.

- 5) Y_1 : Ὅλα τὰ τρίγωνα εἶναι ἐπίπεδα σχήματα.

Y_2 : Μερικὰ τρίγωνα εἶναι ὀρθογώνια.

Σ : Μερικὰ ἐπίπεδα σχήματα εἶναι ὀρθογώνια.

- 6) Y_1 : Ὅλοι οἱ Σικελοὶ εἶναι Ἰταλοί.

Y_2 : Ὅλοι οἱ Ἰταλοὶ εἶναι Λατῖνοι.

Σ : Μερικοὶ Λατῖνοι εἶναι Σικελοί.

- 7) Y_1 : Ὅλοι οἱ ἄνθρωποι εἶναι ζῶα.

Y_2 : Ὅλοι οἱ ἄνθρωποι εἶναι θνητοί.

Σ : Ὅλα τὰ ζῶα εἶναι θνητά.

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟΝ

ΠΡΟΣΘΗΚΑΙ

Κεφάλαιον 9

ΕΥΡΕΣΙΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΣ ΕΚ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΟΣ ΤΙΜΩΝ ΑΛΗΘΕΙΑΣ

9.1. Εύρεσις παραστάσεως ἐκ τοῦ πίνακος τιμῶν ἀληθείας.

Εἰς τὴν § 2.3 εἶδομεν ὅτι, δοθείσης μιᾶς (προτασιακῆς) παραστάσεως δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὸν πίνακα τιμῶν ἀληθείας αὐτῆς. Εἰς τὴν παροῦσαν παράγραφον θὰ ἐξετάσωμεν τὸ ἀντίστροφον πρόβλημα, δηλ. θὰ ζητήσωμεν νὰ εὕρωμεν μίαν (προτασιακὴν) παράστασιν, ἥτις νὰ ἔχῃ ἓνα δεδομένον πίνακα τιμῶν ἀληθείας.

— Ἐστω, κατ'ἀρχὴν, ὅτι ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν μίαν παράστασιν $P(p,q)$, δύο μεταβλητῶν p καὶ q , ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ἓνα δεδομένον πίνακα τιμῶν ἀληθείας. Διακρίνωμεν δύο περιπτώσεις:

α) Ἐστω ὅτι ἡ τελευταία στήλη τοῦ δοθέντος πίνακος περιέχει μόνον τὸ γ , δηλ. ὅτι εἶναι ὁ παραπλεύρως. Τότε, εἶναι προφανές ὅτι ὡς ζητουμένην παράστασιν $P(p,q)$ δυνάμεθα νὰ λάβωμεν μίαν οἰανδήποτε αὐτοαντίφασιν δύο μεταβλητῶν p καὶ q , π.χ. τὴν:

$$(p \wedge q) \wedge (\overline{p} \wedge \overline{q}).$$

p	q	$P(p,q)$
α	α	γ
α	γ	γ
γ	α	γ
γ	γ	γ

β) Ἐστω ὅτι ἡ τελευταία στήλη τοῦ δοθέντος πίνακος περιέχει ἓνα ἢ περισσότερα α . Χάριν εὐκολίας, ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι π.χ. ὁ παραπλεύρως. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ παράστασις: $p \wedge q$ λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α , μόνον διὰ τὸν συνδυασμὸν τῶν τιμῶν ἀληθείας (τῶν

p	q	$P(p,q)$
α	α	α
α	γ	γ
γ	α	α
γ	γ	γ

p καὶ q) τῆς πρώτης γραμμῆς τοῦ δοθέντος πίνακος. Ἐπίσης, ἡ παράστασις $p \wedge \overline{q}$ λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α μόνον διὰ τὸν συνδυασμὸν τῶν τιμῶν ἀληθείας τῆς δευτέρας γραμμῆς, ἡ $\overline{p} \wedge q$ λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α μόνον δι' ἐκεῖνον τῆς τρίτης γραμμῆς καὶ ἡ $\overline{p} \wedge \overline{q}$ λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α μόνον δι' ἐκεῖνον τῆς τελευταίας γραμμῆς. Γράφομεν τώρα ἐκάστην ἐξ αὐτῶν τῶν παραστάσεων εἰς τὴν γραμμὴν τοῦ

δοθέντος πίνακος, εἰς τὴν ὁποίαν λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α (δηλ. τὴν $p \wedge q$ εἰς τὴν πρώτην γραμμὴν, τὴν $p \wedge \bar{q}$ εἰς τὴν δευτέραν κ.ο.κ.): Οὕτω, ἔχομεν τὸν παραπλεύρως πίνανκα. Εἶναι φανερόν τὴν ὅτι ἡ διάζευξις τῶν παραστάσεων τῆς τελευταίας στήλης τοῦ πίνακος

p	q	$P(p,q)$
α	α	α
α	γ	γ
γ	α	α
γ	γ	γ

αὐτοῦ, τῶν εὐρίσκομένων εἰς τὰ γραμμάς, εἰς τὰς ὁποίας ἡ ζητούμενη παράστασις $P(p,q)$ λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α , δηλ. ἡ παράστασις: $(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge q)$, εἶναι μία ζητούμενη παράστασις $P(p,q)$ (διατί;).

Σημείωσις I. Ἐάν ἡ τελευταία στήλη τοῦ δοθέντος πίνακος περιέχῃ μόνον τὸ α , τότε προφανῶς ὡς ζητούμενην παράστασιν $P(p,q)$ δυνάμεθα νὰ λάβωμεν μίαν οἰανδήποτε ταυτολογίαν δύο μεταβλητῶν p καὶ q , π.χ. τὴν: $(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$.

— Εἶναι φανερόν ὅτι ἡ ἀνωτέρω μέθοδος δύναται νὰ ἐπεκταθῇ ἀναλόγως καὶ εἰς τὰς περιπτώσεις, κατὰ τὰς ὁποίας ζητοῦμεν νὰ εὗρωμεν μίαν παράστασιν P τριῶν, τεσσάρων κ.λ.π. μεταβλητῶν, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ἓνα δεδομένον πίνανκα τιμῶν ἀληθείας.

Ἔστω π.χ. ὅτι ζητοῦμεν νὰ εὗρωμεν μίαν παράστασιν $P(p,q,r)$, τριῶν μεταβλητῶν p, q καὶ r , ἡ ὁποία ἔχει ὡς πίνανκα τιμῶν ἀληθείας, τὸν παραπλεύρως. Σκεπτόμενοι ὡς ἀνωτέρω, θεωροῦμεν τὸν κάτωθι (δεξιὰ) πίνανκα.

p	q	r	$P(p,q,r)$
α	α	α	α
α	α	γ	α
α	γ	α	γ
α	γ	γ	γ
γ	α	α	γ
γ	α	γ	γ
γ	γ	α	γ
γ	γ	γ	α

Εὐρίσκομεν τὴν ὅτι ἡ διάζευξις τῶν παραστάσεων τῆς πρώτης, τῆς δευτέρας, καὶ τῆς τελευταίας γραμμῆς τοῦ πίνακος αὐτοῦ, δηλ. ἡ παράστασις:

p	q	r	$P(p,q,r)$
α	α	α	α
α	α	γ	α
α	γ	α	γ
α	γ	γ	γ
γ	α	α	γ
γ	α	γ	γ
γ	γ	α	γ
γ	γ	γ	α

$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \bar{r}) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{r})$, εἶναι μία ζητούμενη παράστασις $P(p,q,r)$ (διατί;).

Σημείωσις II. Ἀνωτέρω εὗρομεν μίαν μέθοδον, διὰ τῆς ὁποίας εὐρίσκομεν μίαν παράστασιν, ἥτις νὰ ἔχῃ ἓνα δεδομένον πίνανκα τιμῶν ἀ-

ληθείας . Εάν τώρα ζητούμεν όλες τās παραστάσεις, αί όποίαι έχουν ένα δεδο-
 μένον πίνακα τιμών αλήθείας, τότε έργαζόμεθα ως εξής: Εύρίσκομεν, ως ανωτέρω
 μίαν έξ αútων καί, ως είναι εύκολον νά ίδωμεν (§ 3.6, πρότασις I), αί ζητού-
 μεναι είναι όλαι αί παραστάσεις (καί μόνον αύταί), αί όποίαι είναι ίσοδύνα-
 μου μέ τήν εύρεθεύσαν (διατί;).

9.2. Μία ένδιαφέρουσα εφαρμογή.

« Ένα άνθρωπος συλλαμβάνεται αίχμάλωτος από μίαν φυλήν ά-
 γρίων καί τοποθετείται είς μίαν φυλακήν, ή όποία, έκτός από
 τήν πόρτα είσόδου, έχει και δύο άλλας πόρτας. Ο άρχηγός τών
 άγρίων του λέγει: «Θά έκλέξης διά νά φύγης μίαν από αύτάς
 τās δύο πόρτας. Η μία οδηγεί είς τήν έλευθερίαν καί ή άλλη
 είς βέβαιον θάνατον. Διά νά σέ βοηθήσω νά έκλέξης τήν πόρτα
 τής έλευθερίας, θά μείνουν μαζί σου δύο πολεμισταί μου, ένα-
 στος τών όποίων θά σοϋ άπαντά είς κάθε έρώτησιν, τήν όποίαν
 θά του υποβάλης, έκτός εκείνων είς τās όποίας αναμειγνύεται ο
 έτερος ⁽¹⁾. Πρέπει όμως νά σέ προειδοποιήσω ότι ο ένας έξ αυ-
 τών λέγει πάντοτε τήν αλήθειαν, ενώ ο άλλος πάντοτε ψέματα». .
 Αφού έφυγεν ο άρχηγός, ο αίχμάλωτος υπέβαλεν μίαν μόνον έ-
 ρώτησιν είς τόν ένα έκ τών δύο πολεμιστών καί άκολούθως εξέ-
 λεξεν τήν πόρτα τής έλευθερίας. Ποίαν έρώτησιν είναι δυνατόν
 νά υπέβαλεν ο αίχμάλωτος;>>

θέτομεν:

p: « Η πρώτη πόρτα οδηγεί είς τήν έλευθερίαν» καί

q: « Είσαι αύτός, ο όποιος λέγει πάντοτε τήν αλήθειαν» .

Είναι προφανές ότι ουδεμία έκ τών έρωτήσεων p; , q; , οδηγεί είς συμπερά-
 σμα. Θά άναζητήσωμεν λοιπόν μίαν έρώτησιν , ήτις νά περιέχη καί τό p καί τό
 q. Έξετάζομεν εάν είναι δυνατόν νά εύρωμεν μίαν παράστασιν P(p,q), ήτις είς
 τήν έρώτησιν: P(p,q); ή άπάντησις «ναί» νά σημαίνη ότι ή p λαμβάνει τιμήν
 αλήθείας α καί ή άπάντησις «όχι» νά σημαίνη ότι ή p λαμβάνει τιμήν αλή-
 θείας y , άνεξαρτήτως από τόν έρω-
 τηθέντα πολεμιστήν, δηλ. άνεξαρτή-
 τως τής τιμής αλήθείας τήν όποίαν
 λαμβάνει ή q (παραπλεύρως πίναξ).

Παρατηρούμεν ότι, εάν είς

p	q	Απάντησις	P(p,q)
α	α	ναί	
α	y	ναί	
y	α	όχι	
y	y	όχι	

(1) Οϋτω, αποκλείεται π.χ. ή έρώτησις: «Εάν έρωτούσα τόν άλλον, ποία πόρτα
 οδηγεί είς τήν έλευθερίαν, τί θά άπαντούσε;>>.

τήν ἐρώτησιν $P(p,q)$; ἡ ἀπάντησις εἶναι «ναί» καὶ 1) ὁ ἐρωτηθεὺς εἶναι ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος λέγει τὴν ἀλήθειαν, δηλ. ἡ q λαμβάνη τιμὴν ἀληθείας α , τότε ἡ $P(p,q)$ ὀφείλει νὰ λαμβάνη τιμὴν ἀληθείας α , 2) ὁ ἐρωτηθεὺς εἶναι ὁ ψεύτης, δηλ. ἡ q λαμβάνη τιμὴν ἀληθείας y , τότε ἡ $P(p,q)$, ὀφείλει νὰ λαμβάνη τιμὴν ἀληθείας y . Ἐπίσης, ἐάν ἡ ἀπάντησις εἶναι «ὄχι» καὶ 1) ὁ ἐρωτηθεὺς εἶναι ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος λέγει τὴν ἀλήθειαν, δηλ. ἡ q λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α , τότε ἡ $P(p,q)$ ὀφείλει νὰ λαμβάνη τιμὴν ἀληθείας y , 2) ὁ ἐρωτηθεὺς εἶναι ὁ ψεύτης, δηλ. ἡ q λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας y , τότε ἡ $P(p,q)$ ὀφείλει νὰ λαμβάνη τιμὴν ἀληθείας α . Συμπληρώνοντες λοιπὸν τὸν προηγούμενον πύνακα, ἔχομεν τὸν παραπλεύρως.

p	q	Ἀπάντησις	$P(p,q)$
α	α	ναί	α
α	y	ναί	y
y	α	ὄχι	y
y	y	ὄχι	α

Οὕτω, ἔχομεν εὖρει τὸν πύνακα τιμῶν ἀληθείας τῆς ζητουμένης παραστάσεως $P(p,q)$. Ἐργαζόμενοι τώρα ὅπως καὶ εἰς τὴν προηγούμενὴν παράγραφον, εὐρίσκομεν ὅτι:

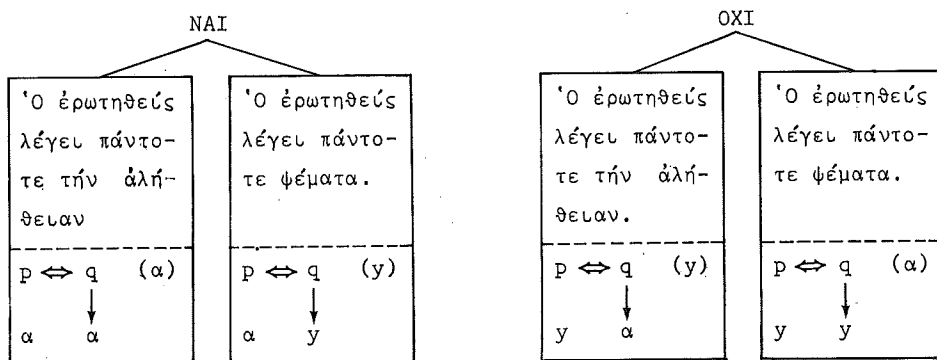
$$P(p,q) \equiv (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) \equiv p \leftrightarrow q \quad (\S 3,4).$$

Ἄρα, ἡ μοναδικὴ ἐρώτησις, δύναται νὰ εἶναι:

«Ἡ πρώτη πόρτα ὁδηγεῖ εἰς τὴν ἐλευθερίαν ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, εἴσαι αὐτός, ὁ ὁποῖος λέγει πάντοτε τὴν ἀλήθειαν;»

Ἀνεξαρτήτως λοιπὸν ἀπὸ τὸν ἐρωτηθέντα πολεμιστὴν, ἐάν ἡ ἀπάντησις εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐρώτησιν ᾗτο «ναί», τότε ὁ αὐχμάλωτος ἐξέλεξε τὴν πρώτην πόρταν καὶ ἐάν ᾗτο «ὄχι», τὴν δευτέραν.

Σημείωσις. Κατωτέρω δίδομεν μίαν «σχηματικὴν» ἐξηγήσιν, διατὶ ὁ αὐχμάλωτος, μετὰ τὴν ἀπάντησιν τὴν ὁποῖαν ἐπῆρεν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐρώτησιν, ἀντελήφθη πόαν πόρταν ἔπρεπε νὰ ἐκλέξη:



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

108. Νὰ εὐρεθῇ μία παράστασις $P(p,q)$, δύο μεταβλητῶν p καὶ

q , έχουσα ως πίνακα τιμών αληθείας, τόν πρώτον έκ τών κάτωθι δύο πινάκων.

p	q	$P(p, q)$
α	α	γ
α	γ	γ
γ	α	α
γ	γ	α

p	q	r	$P(p, q, r)$
α	α	α	γ
α	α	γ	α
α	γ	α	α
α	γ	γ	γ
γ	α	α	γ
γ	α	γ	α
γ	γ	α	γ
γ	γ	γ	γ

109. Νά εὐρεθῇ μία παράστασις $P(p, q, r)$, τριῶν μεταβλητῶν p , q καί r , έχουσα ως πίνακα τιμών αληθείας τόν δεύτερον έκ τών ἀνωτέρω δύο πινάκων.

110. Κατασκευάσατε τόν πίνακα τιμών αληθείας τῆς παραστάσεως: $(p \vee \bar{q} \vee r) \wedge (q \vee r)$. Ἀκολουθῶς, τῇ βοηθείᾳ τοῦ κατασκευασθένος πίνακος, θέσατε τήν δοθεῖσαν παράστασιν ὑπό τήν πλήρη κανονικήν διαζευκτικήν της μορφήν.

111. Ἕνας κομπιούτερ (computer) ἀπαντᾷ εἰς ὅλας τās ἐρωτήσεις μέ ἓνα «ναί» ἢ μέ ἓνα «ὄχι». Δύναται ὅμως νά ρυθμισθῇ, ὥστε νά ἀπαντᾷ ἢ εἰς ὅλας τās ἐρωτήσεις ἀληθῶς ἢ εἰς ὅλας ψευδῶς. Ἕνας ἄνθρωπος, χωρίς νά γνωρίζῃ πῶς εἶναι ρυθμισμένος ὁ κομπιούτερ, θέλει νά μάθῃ ἐάν ὑπάρχῃ ζωὴ εἰς τόν Ἄρην. Ὑποβάλλει μίαν μόνον ἐρώτησιν εἰς τόν κομπιούτερ καί ἡ ἀπορία του ἐπιλύεται. Ποίαν ἐρώτησιν εἶναι δυνατόν νά ὑπέβαλεν εἰς τόν κομπιούτερ;

112. Εἰς ἓνα τέστ, ἓνας μαθητῆς πρέπει νά ἀπαντήσῃ εἰς πέντε ἐρωτήσεις μέ ἓνα «ναί» ἢ μέ ἓνα «ὄχι». Γνωρίζει τήν ἀπάντησιν μόνον τῆς δευτέρας ἐρωτήσεως καί ἀκόμη τὰ ἑξῆς:

1) Αἱ ἐρωτήσεις, εἰς τās ὁποίας ἡ ἀπάντησις εἶναι «ναί» εἶναι περισσότεραι ἀπό ἐκείνας, εἰς τās ὁποίας ἡ ἀπάντησις εἶναι «ὄχι».

2) Δέν ὑπάρχουν τρεῖς ἐρωτήσεις κατὰ σειρὰν, αἱ ὁποῖαι νά ἔχουν τήν ἰδίαν ἀπάντησιν.

3) Ἡ πρώτη καί ἡ τελευταία ἐρωτήσεις ἔχουν ἀνιθέτους ἀπαντήσεις.

Βάσει αὐτῶν, ὁ μαθητῆς ἔδωκεν τās σωστάς ἀπαντήσεις καί εἰς τās πέντε ἐρωτήσεις. Ποία εἶναι ἡ ἀπάντησις εἰς τήν δευτέραν ἐρώτησιν; Ποῖαι εἶναι αἱ ἀπαντήσεις εἰς τās πέντε ἐρωτήσεις;



Κεφάλαιον 10

ΑΛΓΕΒΡΑ ΔΙΑΚΟΠΤΩΝ

10.1. Προκαταρκτικά.

Ἡ Μαθηματική Λογική, ὅχι μόνον ἀποτελεῖ τό ἀπαραίτητον μέσον διὰ τήν αὐστηράν ἀντιμετώπισιν τῶν συγχρόνων μαθηματικῶν (στοιχειωδῶν καί ἀνωτέρων), ἀλλά δύναται νά εὕρῃ καί λίαν σημαντικὰς ἐφαρμογὰς εἰς τήν πρακτικήν. Εἰς τό παρόν κεφάλαιον θά ἴδωμεν μίαν τοιαύτην ἐφαρμογήν εἰς τοὺς διακόπτας ἐνός κυκλώματος (ἤλεκτρικοῦ, ὑδραυλικοῦ, ὀδικοῦ κ.λ.π.)

10.2. Διακόπται ἐνός κυκλώματος καί προτασιακαί μεταβληταί.

Εἰς ἓνα κύκλωμα, π.χ. ἤλεκτρικοῦ ρεύματος ⁽¹⁾, ἓνας διακόπτης τοῦ δύναται νά εἶναι:

- { κλειστός (διέρχεται ρεῦμα, σχ. 10.2.-1) ἢ
- { ἀνοικτός (δέν διέρχεται ρεῦμα, σχ. 10.2.-2).



Διακόπτης κλειστός

Σχ. 10.2 - 1



Διακόπτης ἀνοικτός

Σχ. 10.2 - 2

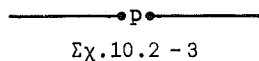
Εἰς ἕκαστον διακόπτην ἐνός κυκλώματος ἀντιστοιχοῦμεν μίαν προτασιακὴν μεταβλητὴν (§ 2.1), ἡ ὁποία λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας:

- { α, ἐάν ὁ διακόπτης εἶναι κλειστός (σχ. 10.2 - 1) καί
- { γ, ἐάν ὁ διακόπτης εἶναι ἀνοικτός (σχ. 10.2 - 2).

Τὰς προτασιακάς μεταβλητάς, τὰς ὁποίας ἀντιστοιχοῦμεν εἰς τοὺς διακόπτας ἐνός κυκλώματος, θά τὰς καλοῦμεν καί **προτασιακὰς μεταβλητάς τοῦ κυκλώματος** ἢ καί ἀπλούστερον, **μεταβλητάς τοῦ κυκλώματος**.

(1) Εἰς τὰ ἐπόμενα ὅταν λέγωμεν: «κύκλωμα» θά ἐννοοῦμεν: «ἤλεκτρικόν κύκλωμα», ἐκτός ἐάν ρητῶς δηλοῦται ἄλλο τι. Βεβαίως, τὰ ὅσα θά ἀναπτύξωμεν εἰς τήν συνέχειαν, δύνανται νά ἐφαρμοσθοῦν καί εἰς ἄλλου εἶδους κυκλώματα, ὅπως π.χ. ὑδραυλικά, ὀδικὰ κ.λ.π.

— Ένα διακόπτην ενός κυκλώματος, εἰς τὸν ὁποῖον ἔχομεν ἀντιστοιχίσει (κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον) μίαν μεταβλητὴν p , θὰ τὸν συμβολίζωμεν ὡς εἰς τὸ σχῆμα 10.2 - 3.



10.3. Προτασιακὴ παράστασις κυκλώματος. Εἴδη κυκλωμάτων.

Ἐν κύκλωμα δύναται νὰ εἶναι :

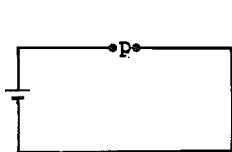
- { κλειστόν (διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος) ἢ
- { ἀνοικτόν (δέν διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος).

Βεβαίως, τοῦτο ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰς τιμὰς ἀληθείας, τὰς ὁποίας λαμβάνουν αἱ μεταβληταὶ τοῦ κυκλώματος.

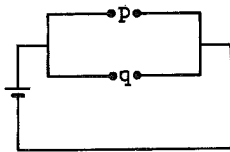
Ὡς θὰ ἴδωμεν εἰς τὴν παροῦσαν παράγραφον, δοθέντος ἑνὸς κυκλώματος δυνάμεθα νὰ εὗρωμεν μίαν (προτασιακὴν) παράστασιν, ἢ ὁποία νὰ λαμβάνη τιμὴν ἀληθείας α ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, τὸ δοθέν κύκλωμα εἶναι κλειστόν. Μία τοιαύτη (προτασιακὴ) παράστασις λέγεται καὶ **προτασιακὴ παράστασις τοῦ δοθέντος κυκλώματος** ἢ καὶ ἀπλούστερον, **παράστασις τοῦ δοθέντος κυκλώματος**.

Προκειμένου τώρα νὰ διευκολυνθῶμεν εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν προηγουμένων παραστάσεων, χωρίζομεν τὰ κυκλώματα εἰς τρία εἴδη: εἰς τὰ **βασικά**, εἰς τὰ **σειροπαράλληλα** καὶ εἰς τὰ **γεφυρωτά**.

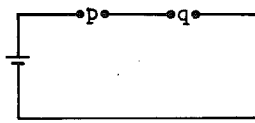
1) Βασικά κυκλώματα. Τὰ κάτωθι κυκλώματα τῶν σχημάτων 10.3 - 1, 10.3 - 2, 10.3 - 3 καθὼς (καὶ γενικώτερον) καὶ ἐκεῖνα τῶν σχημάτων 10.3 - 4 καὶ 10.3 - 5, θὰ τὰ καλοῦμεν **βασικά κυκλώματα**.



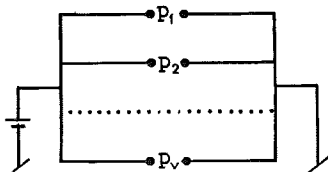
Σχ.10.3 - 1



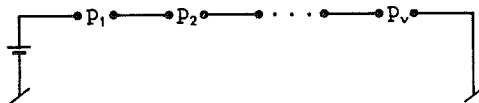
Σχ.10.3 - 2



Σχ.10.3 - 3



Σχ. 10.3 - 4



Σχ. 10.3 - 5

α) Τὸ κύκλωμα τοῦ σχ. 10.3 - 1 ἔχει ἓνα μόνον διακόπτην καὶ εἶναι τὸ ἀπλούστερον εἶδος κυκλώματος. Τὸ κύκλωμα αὐτὸ εἶναι κλειστόν ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, ἡ μεταβλητὴ τοῦ p λαμβάνη τιμὴν ἀληθείας α (δηλ. ὁ διακόπτης τοῦ εἶναι κλειστός). Οὕτω:

● Μία παράστασις τοῦ κυκλώματος τοῦ σχ. 10.3 - 1, εἶναι: p .

β) Τό κύκλωμα τοῦ σχ. 10.3 - 2 ἔχει δύο διακόπτες, ὡς λέγομεν, **ἐν παραλλήλῳ**. Τό κύκλωμα αὐτό εἶναι κλειστόν ἐάν, καί μόνον ἐάν, μία τουλάχιστον ἐκ τῶν μεταβλητῶν του p καί q λαμβάνη τιμὴν ἀληθείας α , δηλ. ἐάν, καί μόνον ἐάν, ἡ προτασιακὴ παράστασις: $p \vee q$ λαμβάνη τιμὴν ἀληθείας α . Οὕτω:

● Μία παράστασις τοῦ κυκλώματος τοῦ σχ. 10.3 - 2, εἶναι: $p \vee q$.

γ) Τό κύκλωμα τοῦ σχ. 10.3 - 3 ἔχει δύο διακόπτες, ὡς λέγομεν, **ἐν σειρᾷ**. Τό κύκλωμα αὐτό εἶναι κλειστόν ἐάν, καί μόνον ἐάν, ἐκάστη ἐκ τῶν μεταβλητῶν του p καί q λαμβάνη τιμὴν ἀληθείας α , δηλ. ἐάν, καί μόνον ἐάν, ἡ προτασιακὴ παράστασις: $p \wedge q$ λαμβάνη τιμὴν ἀληθείας α . Οὕτω:

● Μία παράστασις τοῦ κυκλώματος τοῦ σχ. 10.3 - 3, εἶναι: $p \wedge q$.

δ) Τό κύκλωμα τοῦ σχ. 10.3 - 4 ἔχει **n τό πλήθος διακόπτες ἐν παραλλήλῳ**. Εὐρίσκομεν εὐκόλως ὅτι:

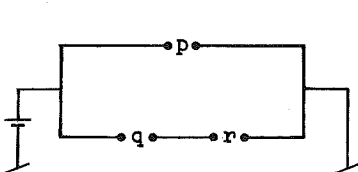
● Μία παράστασις τοῦ κυκλώματος τοῦ σχ. 10.3 - 4, εἶναι: $p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n$.

ε) Τό κύκλωμα τοῦ σχ. 10.3 - 5 ἔχει **n τό πλήθος διακόπτες ἐν σειρᾷ**. Εὐρίσκομεν εὐκόλως ὅτι:

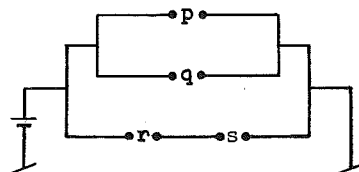
● Μία παράστασις τοῦ κυκλώματος τοῦ σχ. 10.3 - 5, εἶναι: $p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n$.

2) Σειροπαράλληλα κυκλώματα. Ἐάν εἰς ἓνα βασικόν κύκλωμα ἀντικαταστήσωμεν ἓνα τουλάχιστον διακόπτην του μέ δύο ἢ περισσοτέρους ἄλλους ἐν σειρᾷ ἢ ἐν παραλλήλῳ, τότε προκύπτει ἓν ἄλλο (πολυπλοκώτερον) κύκλωμα. Ἐάν εἰς τό οὕτω προκύπτον κύκλωμα ἐπαναλάβωμεν τό ἴδιο, τότε θά προκύψῃ ἓν ἄλλο κύκλωμα (πολυπλοκώτερον τοῦ προηγουμένου) κ.ο.κ. Κάθε κύκλωμα, τό ὅποῖον προκύπτει κατ'αὐτόν τόν τρόπον, θά τό καλοῦμεν **σειροπαράλληλον κύκλωμα**.

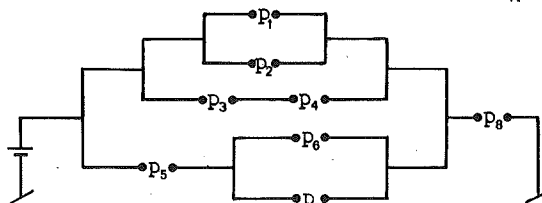
Π.χ. τά κάτωθι κυκλώματα τῶν σχ. 10.3 - 6, 10.3 - 7 καί 10.3 - 8, εἶναι σειροπαράλληλα κυκλώματα:



Σχ. 10.3 - 6



Σχ. 10.3 - 7



Σχ. 10.3 - 8

Συμφωνούμεν τώρα ότι είς τὰ σειροπαράλληλα κυκλώματα περιλαμβάνονται καί τὰ βασικά κυκλώματα, τὰ ὁποῖα λέγονται καί **στοιχειώδη σειροπαράλληλα κυκλώματα**.

— Διά νά εὐρωμεν μίαν παράστασιν ἐνός σειροπαράλληλου κυκλώματος, ἀρχίζομεν ἀπό τὰ τμήματα αὐτοῦ, τὰ ὁποῖα ἔχουν τήν μορφήν τῶν βασικῶν κυκλωμάτων, συνδέοντες ἀκολουθῶς τάς ἐπὶ μέρους εὐρισκομένας παραστάσεις μέ ἓνα ἐκ τῶν συνδέσμων $\vee$ ἢ $\wedge$, ἀναλόγως τῆς περιπτώσεως.

Οὕτω εὐρίσκομεν εὐκόλως ὅτι:

● Μία παράστασις τοῦ κυκλώματος τοῦ σχ. 10.3 - 6, εἶναι: $p \vee (q \wedge r)$.

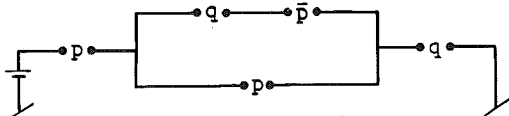
● Μία παράστασις τοῦ κυκλώματος τοῦ σχ. 10.3 - 7, εἶναι:

$$(p \vee q) \vee (r \wedge s).$$

● Μία παράστασις τοῦ κυκλώματος τοῦ σχ. 10.3 - 8, εἶναι:

$$[(p_1 \vee p_2) \vee (p_3 \wedge p_4)] \vee (p_5 \wedge (p_6 \vee p_7)) \wedge p_8.$$

Σημείωσις I. Εἰς ἓν κύκλωμα εἶναι δυνατόν δύο ἢ περισσότεροι διακόπται του νά μήν εἶναι ἀνεξάρτητοι μεταξύ των. Ἀκριβέστερον, εἶναι δυνατόν δύο διακόπται του νά εἶναι τοιοῦτοι, ὥστε: ὅταν ὁ ἓνας ἐξ αὐτῶν εἶναι κλειστός, τότε ὁ ἄλλος νά εἶναι ἀνοικτός. Εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν, ἀντιστοιχοῦμεν εἰς τόν ἓνα ἐξ αὐτῶν π.χ τό p καί εἰς τόν ἄλλον τό $\bar{p}$.



Σχ. 10.3 - 9

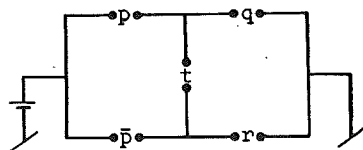
Ἐπίσης, εἶναι δυνατόν δύο

ἢ περισσότεροι διακόπται του νά ἀνοίγουν καί νά κλείνουν ταυτοχρόνως. Τότε, εἰς τοὺς διακόπτας αὐτοὺς ἀντιστοιχοῦμεν τήν ἰδίαν μεταβλητήν.

Οὕτω, π.χ. εἰς τό κύκλωμα τοῦ σχ. 10.3 - 9 ἡ ἐμφάνισις π.χ. τοῦ p εἰς δύο διακόπτας του, σημαίνει ὅτι οἱ διακόπται αὐτοῦ ἀνοίγουν καί κλείνουν ταυτοχρόνως. Ἐπίσης, ἡ ἐμφάνισις τοῦ $\bar{p}$, σημαίνει ὅτι ὁ ἀντίστοιχος διακόπτης εἶναι ἀνοικτός, ὅταν οἱ διακόπται, εἰς τοὺς ὁποῖους ἔχομεν ἀντιστοιχίσει τό p , εἶναι κλειστοί καί ἀντιστρόφως. Μία παράστασις τοῦ κυκλώματος τοῦ σχ. 10.3 - 9, εἶναι: $p \wedge [(q \wedge \bar{p}) \vee p] \wedge q$.

3) Γεφυρωτά κυκλώματα. Κάθε κύκλωμα, τό ὁποῖον δέν εἶναι σειροπαράλληλον (ἐπομένως, οὔτε καί βασικόν), θά τό καλοῦμεν **γεφυρωτόν κύκλωμα**.

Π.χ. τό κύκλωμα τοῦ σχ. 10.3 - 10 εἶναι ἓν γεφυρωτόν κύκλωμα.



Σχ. 10.3 - 10

— Διά νά εὐρωμεν μίαν παράστασιν ἑ-

νός γεφυρωτοῦ κυκλώματος, εὐρίσκομεν κατ' ἀρχήν ὅλους τοὺς δυνατούς « δρόμους » διὰ μέσου τοῦ κυκλώματος. Κατόπιν, δι' ἕκαστον δρόμον ἰδιαιτέρως, σχηματίζομεν τήν συζευκτικήν παράστασιν τῶν

μεταβλητών, αἱ ὁποῖαι περιέχονται εἰς αὐτόν. Τέλος, σχηματίζομεν τήν διαζευκτικὴν παράστασιν τῶν οὕτως εὐρισκομένων παραστάσεων. Ἡ τελευταία αὕτη παράστασις, εἶναι προφανῶς μία παράστασις τοῦ ὑπ' ὄψιν κυκλώματος.

Ἐστω π.χ. ὅτι ζητοῦμεν μίαν παράστασιν τοῦ κυκλώματος τοῦ σχ. 10.3 - 10. Οἱ δυνατοὶ δρόμοι διὰ μέσου τοῦ κυκλώματος αὐτοῦ, εἶναι οἱ ἑξῆς τέσσαρες:

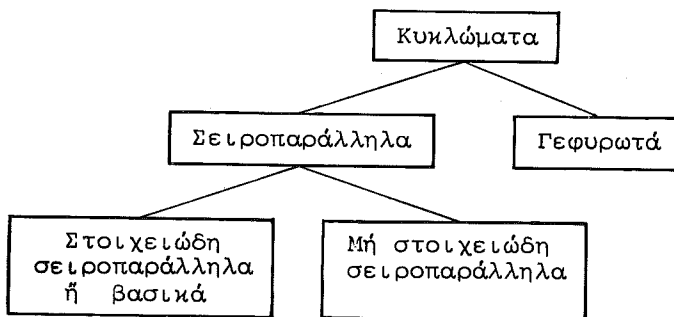
$$p \rightarrow q^{(1)}, p \rightarrow t \rightarrow r, \bar{p} \rightarrow r, \bar{p} \rightarrow t \rightarrow q.$$

Ἡ συζευκτικὴ παράστασις τῶν μεταβλητῶν, αἱ ὁποῖαι περιέχονται εἰς τὸν πρῶτον δρόμον εἶναι: $p \wedge q$, εἰς τὸν δεύτερον εἶναι: $p \wedge t \wedge r$, εἰς τὸν τρίτον εἶναι: $\bar{p} \wedge r$ καὶ εἰς τὸν τέταρτον εἶναι: $\bar{p} \wedge t \wedge q$. Ἡ διαζευκτικὴ παράστασις αὐτῶν, εἶναι:

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge t \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge t \wedge q).$$

Ἡ τελευταία αὕτη παράστασις, εἶναι μία παράστασις τοῦ κυκλώματος τοῦ σχ. 10.3 - 10.

Βάσει τῶν προηγουμένων, ἔχομεν τὸ κάτωθι διάγραμμα:



Σημείωσις II. Εἶναι προφανές ὅτι, ἐάν P εἶναι μία παράστασις ἑνὸς κυκλώματος, τότε καὶ κάθε ἄλλη παράστασις ἰσοδύναμος τῆς P (§ 3.7), εἶναι ἐπίσης μία παράστασις τοῦ ἐν λόγω κυκλώματος.

Ἐπίσης, εἶναι προφανές ὅτι, δύο παραστάσεις τοῦ ἰδίου κυκλώματος εἶναι ἰσοδύναμοι μεταξὺ τῶν (διατί;).

Σημείωσις III. Εἶναι προφανές ὅτι, ἐάν μία παράστασις ἑνὸς κυκλώματος:

α) Εἶναι ταυτολογία (§ 2.4), τότε τὸ κύκλωμα εἶναι πάντοτε κλειστόν (ἀνεξαρτήτως τῶν τιμῶν ἀληθείας, τὰς ὁποίας λαμβάνουν αἱ μεταβληταὶ του, διατί;)

β) Εἶναι αὐτοαντίφασις (§ 2.4), τότε τὸ κύκλωμα εἶναι πάντοτε ἀνοικτόν (ἀνεξαρτήτως τῶν τιμῶν ἀληθείας, τὰς ὁποίας λαμβάνουν αἱ μεταβληταὶ του, διατί;)

(1) Ἐννοοῦμεν τὸν δρόμον, ἀκολουθοῦντες τοὺς διακόπτες, εἰς τοὺς ὁποίους ἔχομεν ἀντιστοιχίσει τὰς μεταβλητάς p καὶ q .

γ) Είναι σχετική (§ 2.4), τότε, δι'άλλας τιμές αληθείας των μεταβλητών του είναι κλειστόν καί δι'άλλας είναι άνοικτόν (διατύ;).

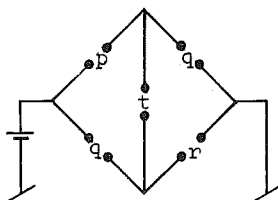
10.4. Κυκλώματα λογικῶς ίσοδύναμα.

Όρισμός. Δύο κυκλώματα λέγομεν ὅτι είναι **λογικῶς ίσοδύναμα** ἢ ἀπλῶς **ίσοδύναμα** ἐάν, καί μόνον ἐάν, είναι ἀμφότερα κλειστά ἢ ἀμφότερα ἀνοικτά, διά κάθε συνδυασμόν τῶν τιμῶν ἀληθείας τῶν μεταβλητῶν των.

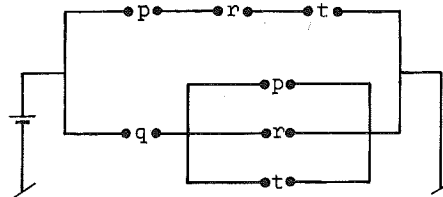
Εὐρίσκομεν εὐκόλως ὅτι:

« Δύο κυκλώματα είναι ίσοδύναμα ἐάν, καί μόνον ἐάν, μία παράστασις τοῦ ἐνός είναι (λογικῶς) ίσοδύναμος μέ μίαν παράστασιν τοῦ ἄλλου (§ 3.7) ». (Απόδειξις;)

Π.χ. τά κυκλώματα τῶν σχ. 10.4 - 1 καί 10.4 - 2 είναι ίσοδύναμα (σημειώσατε ὅτι τό πρῶτον είναι γεφυρωτόν καί τό δεύτερον είναι σειροπαράλληλον).



Σχ. 10.4 - 1



Σχ. 10.4 - 2

Πράγματι, ὡς εὐρίσκομεν εὐκόλως, μία παράστασις τοῦ πρῶτου, είναι:

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge t \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge t \wedge r) \quad \overline{\text{op}} \quad P$$

καί μία παράστασις τοῦ δεύτερου, είναι:

$$(p \wedge r \wedge t) \vee [q \wedge (p \vee r \vee t)] \quad \overline{\text{op}} \quad Q.$$

"Εχομεν:

$$\begin{aligned} P &\equiv (p \wedge t \wedge r) \vee [(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge t)] \\ &\equiv (p \wedge t \wedge r) \vee [q \wedge (p \vee r \vee t)] \equiv Q. \end{aligned}$$

"Αρα, τά ἀνωτέρω δύο κυκλώματα είναι ίσοδύναμα.

10.5. Κύκλωμα προτασιακῆς παραστάσεως.

Εἰς τήν παροῦσαν παράγραφον θά ἴδωμεν ὅτι, δοθείσης μιᾶς (προτασιακῆς) παραστάσεως δυνάμεθα νά κατασκευάσωμεν ἓν κύκλωμα, τό ὁποῖον νά ἔχη ὡς παράστασιν τήν δοθεῖσαν, δηλ. τό ὁποῖον νά είναι κλειστόν ἐάν, καί μόνον ἐάν, ἡ δοθεῖσα (προτασιακή) παράστασις λαμβάνη τιμήν ἀληθείας α (§ 10.3). "Εν τοιοῦτον κύκλωμα λέγεται καί **κύκλωμα τῆς δοθείσης παραστάσεως**.

Εἶναι προφανές ὅτι, ἐάν μίαν δοθεῖσαν παράστασιν τήν μετασχηματίσωμεν εἰς ἄλλην ίσοδύναμον πρὸς αὐτήν καί κατασκευάσωμεν ἓν κύκλωμα τῆς τελευταίας αὐτῆς παραστάσεως, τότε τό κύκλωμα αὐτό

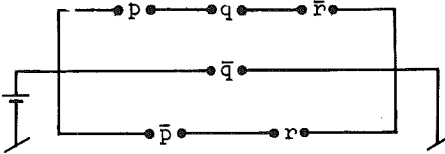
είναι καί ἓν κύκλωμα τῆς ἀρχικῆς παραστάσεως (διατί;).

— Κατ'ἀρχήν, εἶναι προφανές ὅτι τὰ βασικά κυκλώματα τῶν σχ. 10.3-1, 10.3-2, 10.3-3, 10.3-4 καί 10.3-5 (§ 10.3), εἶναι κατά σειράν, ἓν κύκλωμα ἀντιστοιχῶς ἐκάστης ἐκ τῶν παραστάσεων:

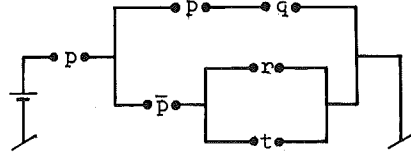
$$p, p \vee q, p \wedge q, p \vee p_2 \vee \dots \vee p_n \text{ καί } p \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n.$$

— Ἐχοντες ὑπ'ὄψιν τὰ ἀνωτέρω κυκλώματα τῶν προηγουμένων παραστάσεων, δυνάμεθα εὐκόλως νά κατασκευάσωμεν ἓν σειροπαράλληλον κύκλωμα μιᾶς δοθείσης παραστάσεως, ἥτις περιέχει ἀποκλειστικῶς καί μόνον τὰς πράξεις: $\vee$, $\wedge$, $-$ καί τῆς τελευταίας ἔμφαν- νοζιμένης μόνον εἰς τὰς μεταβλητάς της (ἐάν ἐμφανίζεται).

Π.χ. ἓν κύκλωμα τῆς παραστάσεως: $(p \wedge q \wedge \bar{r}) \vee \bar{q} \vee (\bar{p} \wedge r)$ εἶναι ἐκεῖνο τοῦ σχ. 10.5-1 (ὁ τρόπος κατασκευῆς του εἶναι προφανές). Ἐπίσης, ἓν κύκλωμα τῆς παραστάσεως: $p \wedge [(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge (r \vee t))]$, εἶναι ἐκεῖνο τοῦ σχ. 10.5-2 (ὁ τρό-



Σχ. 10.5-1



Σχ. 10.5-2

πος κατασκευῆς του εἶναι προφανές).

● Τά ὡς ἀνωτέρω κατασκευαζόμενα κυκλώματα (ἀπ'εὐθείας ἐκ τῶν δοθεῖσων παραστάσεων), λέγονται καί **ἀρχικά κυκλώματα** τῶν ἀντιστοιχῶν παραστάσεων.

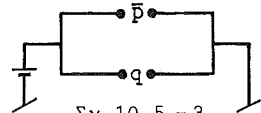
— Δεδομένου τώρα ὅτι, δοθείσης μιᾶς παραστάσεως δυνάμεθα πάντοτε, τῇ βοήθειᾳ τῶν τύπων ἀντικαταστάσεως (§ 3.14) καί τῶν τύπων ἀρνήσεως (§ 3.15) τῶν λογικῶν πράξεων, νά εὖρωμεν μίαν ἰσοδύναμον πρός αὐτήν παράστασιν, ἥτις νά περιέχῃ ἀποκλειστικῶς καί μόνον τὰς πράξεις: $\vee$, $\wedge$, $-$ καί τῆς τελευταίας ἔμφανιζομένης μόνον εἰς τὰς μεταβλητάς της (ἐάν ἐμφανίζεται), ἔπεται ὅτι δυνάμεθα πάντοτε νά κατασκευάσωμεν ἓν σειροπαράλληλον κύκλωμα μιᾶς οἰασδήποτε δοθείσης παραστάσεως.

Παράδειγμα 1. «Νά κατασκευασθῇ ἓν κύκλωμα τῆς παραστάσεως:



$$p \Rightarrow q \gg.$$

Ἐχομεν: $p \Rightarrow q \equiv \bar{p} \vee q$ (§ 3.14). Ἄρα, ἓν κύκλωμα τῆς δοθείσης παραστάσεως: $p \Rightarrow q$, εἶναι ἐκεῖνο τοῦ σχ. 10.5-3



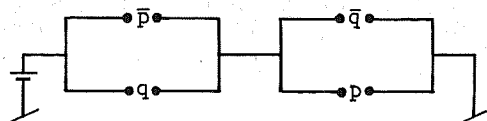
Σχ.10.5-3

Παράδειγμα 2. «Νά κατασκευασθῇ ἓν κύκλωμα τῆς παραστάσεως:

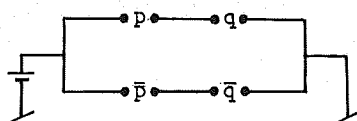


$$p \Leftrightarrow q \gg.$$

Ἐχομεν: $p \Leftrightarrow q \equiv (\bar{p} \vee q) \wedge (q \vee \bar{p})$ (§ 3.14). Ἄρα, ἓν κύκλωμα τῆς παρα-



Σχ. 10.5 - 4



Σχ. 10.5 - 5

στάσεως: $p \Leftrightarrow q$, είναι εκείνο του σχ. 10.5 - 4.

● Σημειούμεν ότι, έπειδή καί $p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$ (§ 3.14), έν άλλο κύκλωμα τής παραστάσεως: $p \Leftrightarrow q$, είναι εκείνο του σχ. 10.5 - 5 (βεβαίως, τά δύο προηγούμενα κυκλώματα είναι ίσοδύναμα, διατί;).

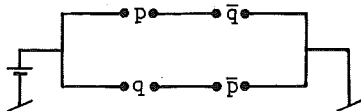
Παράδειγμα 3. << Νά κατασκευασθῇ έν κύκλωμα τής παραστάσεως:



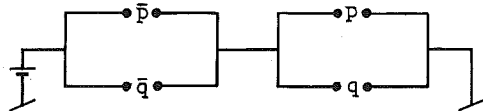
$$p \vee q \gg .$$

Βάσει του νόμου 33 τής § 2.5 και των τύπων των παραγράφων 3.14 καί 3.15 έχομεν:

$$p \vee q \equiv \overline{p \Leftrightarrow q} \equiv (\overline{p \vee q}) \wedge (\overline{q \vee p}) \equiv (\overline{p \vee q}) \vee (\overline{q \vee p}) \equiv (p \wedge \bar{q}) \vee (q \wedge \bar{p}).$$



Σχ. 10.5 - 6



Σχ. 10.5 - 7

"Αρα, έν κύκλωμα τής παραστάσεως: $p \vee q$, είναι εκείνο του σχ. 10.5 - 6.

● Σημειούμεν ότι, έπειδή έχομεν ακόμη:

$$p \vee q \equiv \overline{p \Leftrightarrow q} \equiv (\overline{p \wedge q}) \vee (\overline{\bar{p} \wedge \bar{q}}) \equiv (\overline{p \wedge q}) \wedge (\overline{\bar{p} \wedge \bar{q}}) \equiv (\bar{p} \vee \bar{q}) \wedge (p \vee q),$$

έν άλλο κύκλωμα τής παραστάσεως: $p \vee q$, είναι εκείνο του σχ. 10.5 - 7 (τί συμπεραίνετε δια τά δύο προηγούμενα κυκλώματα;).

Παράδειγμα 4. << Νά κατασκευασθῇ έν κύκλωμα τής παραστάσεως:

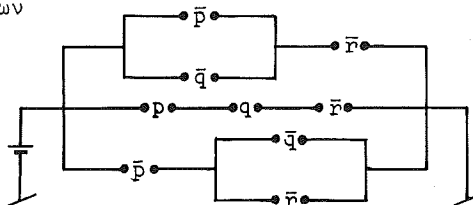


$$P \equiv \overline{p} \wedge (\bar{p} \wedge \bar{q} \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q \wedge r) \gg .$$

Βάσει καί των τύπων των παραγράφων

3.14 καί 3.15, έχομεν:

$$\begin{aligned} P &\equiv (\overline{p \wedge q} \vee r) \Rightarrow [p \wedge (q \wedge r)] \vee [\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{r}] \\ &\equiv (p \wedge q) \vee r \Rightarrow (p \wedge q \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{r}) \\ &\equiv (\overline{p \wedge q}) \vee r \vee [(p \wedge q \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge (\bar{q} \vee \bar{r}))] \\ &\equiv (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{r}) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee [\bar{p} \wedge (\bar{q} \vee \bar{r})] \\ &\equiv [(\bar{p} \vee \bar{q}) \wedge \bar{r}] \vee (p \wedge q \wedge r) \vee [\bar{p} \wedge (\bar{q} \vee \bar{r})]. \end{aligned}$$



Σχ. 10.5 - 8

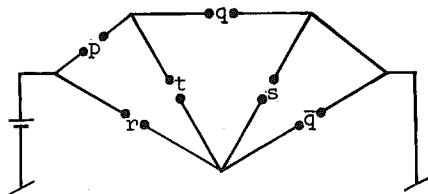
"Αρα, έν κύκλωμα τής παραστάσεως P είναι εκείνο του σχ. 10.5 - 8.

10.6. Ένδιαφέρουσα παρατήρησις.

Δοθέντος ενός γεφυρωτού κυκλώματος, δυνάμεθα πάντοτε νά κατασκευάσωμεν έν ίσοδύναμόν του σειροπαράλληλον κύκλωμα. Πρός τοῦ

το, εϋρίσκομεν μίαν παράστασιν τοῦ δοθέντος γεφυρωτοῦ κυκλώματος καὶ ἀκολούθως κατασκευάζομεν ἓν σειροπαράλληλον κύκλωμα αὐτῆς. Εἶναι προφανές ὅτι, τὸ κατασκευασθὲν σειροπαράλληλον κύκλωμα εἶναι ἰσοδύναμον τοῦ δοθέντος γεφυρωτοῦ (διατί;).

Παράδειγμα. « Δίδεται τὸ παραπλευρῶς γεφυρωτὸν κύκλωμα (σχ. 10.6-1). Νά κατασκευασθῇ ἓν ἰσοδύναμὸν τοῦ σειροπαράλληλου κύκλωμα ».



Σχ. 10.6-1

Εϋρίσκομεν κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 10.3,3)

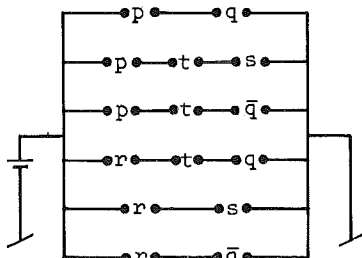
μίαν παράστασιν τοῦ δοθέντος γεφυρωτοῦ κυκλώματος. Οἱ δυνατοὶ δρόμοι διὰ μέσου αὐτοῦ, εἶναι οἱ ἑξῆς:

$$p \rightarrow q, p \rightarrow t \rightarrow s, p \rightarrow t \rightarrow \bar{q}, r \rightarrow t \rightarrow q, r \rightarrow s, r \rightarrow \bar{q} \quad (\text{διατί;}).$$

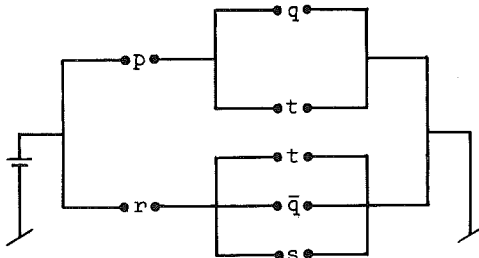
"Αρα, μία παράστασις τοῦ δοθέντος γεφυρωτοῦ κυκλώματος, εἶναι:

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge t \wedge s) \vee (p \wedge t \wedge \bar{q}) \vee (r \wedge t \wedge q) \vee (r \wedge s) \vee (r \wedge \bar{q}) \overset{\text{op}}{=} P. \quad (1)$$

"Εν σειροπαράλληλῳ κύκλωμα τῆς P εἶναι ἐκεῖνο τοῦ σχ. 10.6-2.



Σχ. 10.6-2



Σχ. 10.6-3

"Αρα, τὸ σειροπαράλληλον κύκλωμα τοῦ σχ. 10.6-2 εἶναι ἰσοδύναμον τοῦ δοθέντος γεφυρωτοῦ.

● Σημειοῦμεν ὅτι, ἐκ τῆς (1) ἔχομεν:

$$P \equiv [p \wedge (q \vee (t \wedge s) \vee (t \wedge \bar{q}))] \vee [r \wedge ((t \wedge q) \vee s \vee \bar{q})]$$

καὶ ἐπειδὴ:

$$q \vee (t \wedge \bar{q}) \equiv (q \vee t) \wedge (q \vee \bar{q}) \equiv q \vee t \quad \text{καὶ} \quad (t \wedge q) \vee \bar{q} \equiv (t \vee \bar{q}) \wedge (q \vee \bar{q}) \equiv t \vee \bar{q},$$

ἔχομεν:

$$P \equiv [p \wedge ((q \vee t) \vee (t \wedge s))] \vee [r \wedge ((t \vee \bar{q}) \vee s)]$$

καὶ ἐπειδὴ: $t \vee (t \wedge s) \equiv t$ (§ 3.12, 11α), ἔχομεν:

$$P \equiv [p \wedge (q \vee t)] \vee [r \wedge (t \vee \bar{q} \vee s)].$$

"Οθεν, ἓν ἄλλο σειροπαράλληλον κύκλωμα τῆς P εἶναι ἐκεῖνο τοῦ σχ. 10.6-3.

"Αρα, ἓν ἄλλο σειροπαράλληλον κύκλωμα ἰσοδύναμον τοῦ δοθέντος γεφυρωτοῦ, εἶναι ἐκεῖνο τοῦ σχ. 10.6-3 (τί συμπεραίνετε διὰ τὰ δύο προηγούμενα κυκλώματα;).

10.7. Άπλοποιήσις κυκλώματος.

Άπλοποιήσις ενός κυκλώματος λέγεται ή κατασκευή ενός άλλου ίσοδύναμου κυκλώματος μέ όλιγωτέρους διακόπτας.

● Διά νά άπλοποιήσωμεν έν δοθέν κύκλωμα (ένάν είναι δυνατόν νά άπλοποιηθή), έργαζόμεθα ώς έξής:

α) Εύρίσκομεν μίαν παράστασιν, έστω P , τοϋ δοθέντος κυκλώματος (§ 10.3). Ή P προφανώς περιέχει άποκλειστικώς καί μόνον τάς πράξεις: $\vee$, $\wedge$, $-$ καί μάλιστα ή τελευταία έμφανίζεται μόνον είς τάς μεταβλητάς της (ένάν έμφανίζεται).

β) Άπλοποιούμεν (ένάν είναι δυνατόν) τήν παράστασιν P (§ 3.11). Δηλ. μετασχηματίζομεν (ένάν είναι δυνατόν) τήν P είς άλλην ίσοδύναμον, έστω P' , ήτις νά περιέχη όλιγωτέρας έμφανίσεις τών μεταβλητών ή ένάν είναι δυνατόν καί όλιγωτέρας μεταβλητάς (καί ή όποία καί πάλιν νά περιέχη άποκλειστικώς καί μόνον τάς πράξεις: $\vee$, $\wedge$, $-$ καί τής τελευταίας έμφανιζομένης μόνον είς τάς μεταβλητάς της, ένάν έμφανίζεται).

γ) Κατασκευάζομεν τό άρχικόν κύκλωμα τής παραστάσεως P' (§10.5).

Έάν ή άνωτέρω άναφερομένη άπλοποίησης τής P είναι δυνατή, τότε τό οϋτως κατασκευαζόμενον κύκλωμα είναι ίσοδύναμον τοϋ δοθέντος καί περιέχει καί όλιγωτέρους διακόπτας.

Παράδειγμα. << Νά άπλοποιηθή τό παραπλεύρως κύκλωμα (σχ. 10.7 - 1) >> .

Εύρίσκομεν εύκόλως ότι μιά παράστασις τοϋ κυκλώματος αϋτοϋ είναι:

$$[(p \vee q) \wedge (r \vee \bar{p})] \vee [q \wedge (\bar{q} \vee \bar{r})] \equiv P.$$

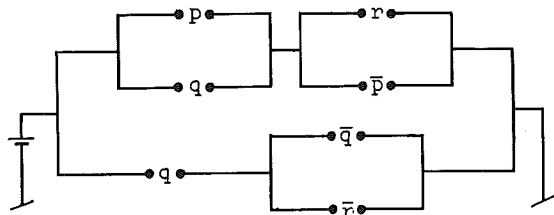
Έχομεν:

$$P \equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge \bar{p}) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge \bar{p}) \vee (q \wedge \bar{q}) \vee (q \wedge \bar{r})$$

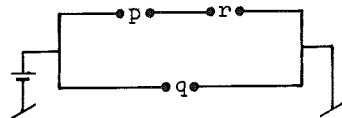
$$\equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge \bar{p}) \vee (q \wedge \bar{r}) \equiv (p \wedge r) \vee [q \wedge (r \vee \bar{p} \vee \bar{r})]$$

καί έπειδή: $q \wedge (r \vee \bar{p} \vee \bar{r}) \equiv q \wedge [\bar{p} \vee (r \vee \bar{r})] \equiv q \wedge (\bar{p} \vee A) \equiv q \wedge A \equiv q$ (§ 3.12),

έχομεν: $P \equiv (p \wedge r) \vee q$. "Άρα τό ζητούμενον κύκλωμα είναι έκείνον τοϋ σχ. 10.7 - 2 (τό κύκλωμα αϋτό είναι ίσοδύναμον τοϋ δοθέντος καί περιέχει όλιγωτέρους διακόπτας).



Σχ. 10.7 - 1



Σχ.10.7 - 2

10.8. Κατασκευή κυκλώματος με δεδομένης ιδιότητας.

Μία γενική μέθοδος κατασκευής ενός κυκλώματος, τό όποϊον νά περιέχη ένα ώρισμένον άριθμόν άνεξαρτήτων διακοπτών καί τό όποϊον νά πληροΐ μερικάς δεδομένας ιδιότητας, εΐναι ή έξής:

α) Άντιστοιχοΰμεν εΐς τούς διακόπτες προτασιακάς μεταβλητάς: $p, q, r, \dots$

β) Εϋρίσκομεν μίαν προτασιακήν παράστασιν τοϋ ζητουμένου κυκλώματος, άφοϋ προηγουμένως βάσει τών δεδομένων ιδιοτήτων, κατασκευάσωμεν τόν πίνακα τιμών άληθείας αύτής (§ 9.1).

γ) Κατασκευάζομεν έν κύκλωμα τής εϋρεθείσης προτασιακής παραστάσεως, τό όποϊον θά εΐναι καί έν ζητούμενον κύκλωμα.

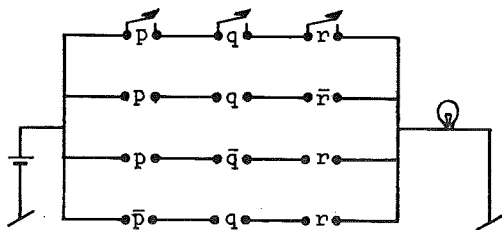
Έάν άναζητοΰμεν τό άπλούστερον δυνατόν κύκλωμα μέ τάς δεδομένας ιδιότητας, τότε άπλοποιοΰμεν ώς εΐς τήν §10.7 τήν εϋρεθείσαν προτασιακήν παράστασιν καί άκολούθως κατασκευάζομεν τό άρχικόν κύκλωμα αύτής.

Παράδειγμα 1. «Εΐς μίαν τριμελή εταιρίαν, έκαστον μέλος ψηφίζει μέ ένα «ναί» ή μέ ένα «όχι» καί αι άποφάσεις λαμβάνονται κατά πλειοψηφίαν. Ζητεΐται νά κατασκευασθῇ έν ήλεκτρικόν κύκλωμα, περιέχον ένα λαμπτήρα καί τρία άνεξάρτητα μπουτόν (διακόπτες), ένα δι' έκαστον μέλος, εΐς τρόπον ώστε: εάν, έκαστον μέλος πιέζη τό μπουτόν του (δηλ. κλείνη τόν διακόπτην του) μόνον όταν ψηφίζη «ναί», τότε ο λαμπτήρας νά άνάβη μόνον εΐς περίπτωσιν πλειοψηφίας».

Εϋς τό μπουτόν (διακόπτην) τοϋ πρώτου μέλους άντιστοιχοΰμεν τήν (προτασιακήν) μεταβλητήν p , τοϋ δευτέρου μέλους τήν q καί τοϋ τρίτου μέλους τήν r .

Άναζητοΰμεν τώρα μίαν (προτασιακήν) παράστασιν $P(p,q,r)$, τριών μεταβλητών p, q καί r , ήτις νά λαμβάνη τιμήν άληθείας α , μόνον εάν δύο ή τρεΐς έκ τών μεταβλητών p, q καί r λαμβάνουν τιμήν άληθείας α . Οϋτω, ο πίναξ τιμών

p	q	r	$P(p,q,r)$
α	α	α	α
α	α	y	α
α	y	α	α
α	y	y	y
y	α	α	α
y	α	y	y
y	y	α	y
y	y	y	y



Σχ. 10.8 - 1

άληθείας τής ζητουμένης παραστάσεως όφείλει νά εΐναι ο άνωτέρω (άριστερά).

Κατά τὰ γνωστά ἐκ τῆς § 9.1, εὐρίσκομεν ὅτι:

$$P(p, q, r) \equiv (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \bar{r}) \vee (p \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge r). \quad (1)$$

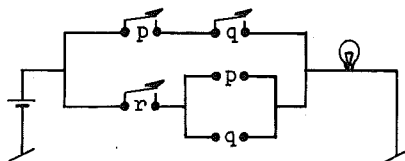
Ἐν κύκλωμα τῆς παραστάσεως αὐτῆς εἶναι ἐκεῖνο τοῦ σχ. 10.8 - 1. Τοῦτο εἶναι καὶ ἓν ζητούμενον κύκλωμα.

● Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἓν ἀπλούστερον κύκλωμα, ἀπλοποιώντας τὴν παράστασιν (1). Πράγματι, ἐκ τῆς (1), ἔχομεν:

$$P(p, q, r) \equiv [(p \wedge q) \wedge (r \vee \bar{r})] \vee [\bar{r} \wedge (p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q)]$$

καὶ ἐπειδὴ: $(p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q) \equiv (p \vee \bar{p}) \wedge (p \vee q) \wedge (\bar{q} \vee \bar{p}) \wedge (\bar{q} \vee q) \equiv (p \vee q) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q})$, ἔχομεν:

$$\begin{aligned} P(p, q, r) &\equiv (p \wedge q) \vee [\bar{r} \wedge (p \vee q) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q})] \\ &\equiv [(p \wedge q) \vee (\bar{r} \wedge (p \vee q))] \wedge [(p \wedge q) \vee (\bar{p} \vee \bar{q})] \\ &\equiv [(p \wedge q) \vee (\bar{r} \wedge (p \vee q))] \wedge [(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})] \\ &\equiv (p \wedge q) \vee [\bar{r} \wedge (p \vee q)]. \end{aligned}$$



Σχ. 10.8 - 2

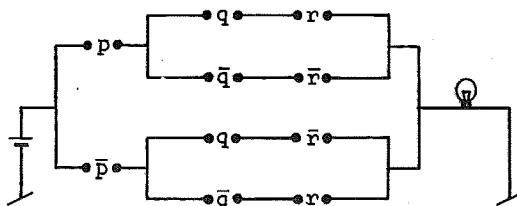
Τὸ ἀρχικόν κύκλωμα τῆς τελευταίας παραστάσεως εἶναι ἐκεῖνο τοῦ σχ. 10.8 - 2. Καὶ τὸ κύκλωμα αὐτό πληροῦ τὰς δεδομένης ἰδιότητος καὶ εἶναι ἀπλούστερον τοῦ προηγουμένου (τὰ δύο προηγούμενα κύκλωματα εἶναι προφανῶς ἰσοδύναμα).

Παράδειγμα 2. «Εἰς ἓν δωμάτιον θέλομεν νὰ ἐγκαταστήσωμεν ἓν ἡλεκτρικόν κύκλωμα, περιέχον ἓνα λαμπτήρα καὶ τρεῖς ἀνεξαρτήτους διακόπτας, εἰς τρόπον ὥστε ὁ λαμπτήρ νὰ ἀνάβῃ καὶ νὰ σβήνῃ ἀπὸ οἷονδήποτε ἐκ τῶν τριῶν αὐτῶν διακοπτῶν. Ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ ἓν τοιοῦτον κύκλωμα».

Εἰς τὸν πρῶτον διακόπτην ἀντιστοιχοῦμεν τὴν (προτασιακὴν) μεταβλητὴν p , εἰς τὸ δεύτερον τὴν q καὶ εἰς τὸν τρίτον τὴν r .

Ἀναζητοῦμεν τώρα μὴν (προτασιακὴν) παράστασιν $P(p, q, r)$, τριῶν μεταβλητῶν p, q καὶ r , τῆς ὁποίας ἡ λαμβανομένη τιμὴ ἀληθείας νὰ ἀλλάξῃ, ὅταν ἀλλάξῃ ἡ λαμβανομένη τιμὴ ἀληθείας μιᾶς ἐκ τῶν μεταβλητῶν p, q, r . Οὕτω, ὁ πύναξ τιμῶν ἀληθείας τῆς ζητουμένης παραστάσεως ὀφείλει νὰ εἶναι ὁ κατωτέρω:

p	q	r	$P(p, q, r)$
α	α	α	α
α	α	γ	γ
α	γ	α	γ
α	γ	γ	α
γ	α	α	γ
γ	α	γ	α
γ	γ	α	α
γ	γ	γ	γ



Σχ. 10.8 - 3

Κατά τὰ γνωστά ἐκ τῆς § 9.1, εὐρίσκομεν ὅτι:

$$P(p, q, r) \equiv (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \bar{q} \wedge \bar{r}) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge \bar{r}) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r) \\ \equiv [\bar{p} \wedge ((q \wedge r) \vee (\bar{q} \wedge \bar{r}))] \vee [\bar{p} \wedge ((q \wedge \bar{r}) \vee (\bar{q} \wedge r))].$$

Έν κύκλωμα της παραστάσεως αὐτῆς εἶναι ἐκεῖνο τοῦ σχ. 10.8-3. Τοῦτο εἶναι καὶ ἓν ζητούμενον κύκλωμα.

Παράδειγμα 3. «Νά κατασκευασθῇ ἓν ἡλεκτρικόν κύκλωμα, τό ὁποῖον νά δίδῃ τό πρόσημον τοῦ γινομένου τριῶν πραγματικῶν μὴ μηδενικῶν ἀριθμῶν».

Τό ζητούμενον κύκλωμα πρέπει νά περιέχῃ ἓνα λαμπτήρα καὶ τρεῖς ἀνεξαρτήτους διακόπτας (ἓνα δι' ἕκαστον ἀριθμόν).

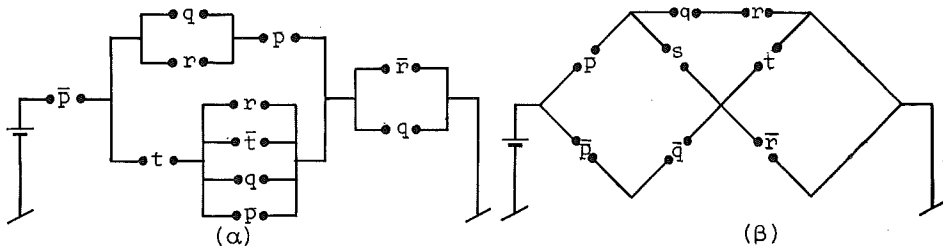
Εἰς τόν πρῶτον διακόπτην ἀντιστοιχοῦμεν τήν (προτασιακὴν) μεταβλητὴν p , εἰς τόν δεύτερον τήν q καὶ εἰς τόν τρίτον τήν r .

Θεωροῦμεν τρεῖς πραγματικούς μὴ μηδενικούς ἀριθμούς k, λ, μ καὶ συμφωνοῦμεν ὅτι, ἡ p (ἀντιστοίχως, ἡ q , ἡ r) λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α , ἐάν τό πρόσημον τοῦ k (ἀντιστοίχως, τοῦ λ , τοῦ μ) εἶναι τό $+$ καὶ λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας γ , ἐάν τό πρόσημον τοῦ k (ἀντιστοίχως, τοῦ λ , τοῦ μ) εἶναι τό $-$. Ἀναζητοῦμεν τώρα μίαν προτασιακὴν παράστασιν $P(p, q, r)$, τριῶν μεταβλητῶν p, q καὶ r , ἥτις νά λαμβάνῃ τιμὴν ἀληθείας ἀμόνον ὅταν καὶ αἱ τρεῖς μεταβληταὶ p, q καὶ r λαμβάνουν τιμὴν ἀληθείας α ἢ ἡ μίαν ἐξ αὐτῶν λαμβάνῃ τιμὴν ἀληθείας α καὶ αἱ δύο ἄλλαι γ . Οὕτω, ὁ πύναξ τιμῶν ἀληθείας τῆς ζητουμένης παραστάσεως ὀφείλει νά εἶναι ἐκεῖνος τοῦ προηγουμένου παραδείγματος. Προχωροῦντες ὅπως ἐκεῖ φθάνομεν εἰς τό κύκλωμα τοῦ σχ. 10.8-3, τό ὁποῖον εἶναι καὶ ἓν ζητούμενον κύκλωμα. Εἶναι προφανές ὅτι:

Ὁ λαμπτήρ τοῦ κυκλώματος αὐτοῦ (σχ. 10.8-3) ἀνάβει ὅταν τό πρόσημον τοῦ γινομένου $k\lambda\mu$ εἶναι τό $+$ καὶ δέν ἀνάβει ὅταν εἶναι τό $-$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

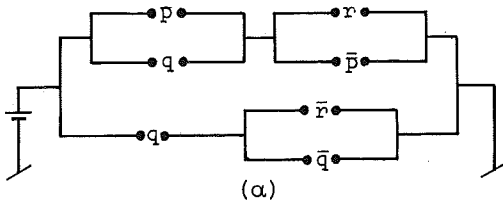
113. Νά εὐρεθῇ μία παράστασις ἐκάστου ἐκ τῶν κάτωθι κυκλωμάτων:



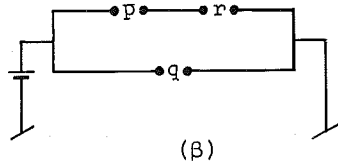
114. Νά κατασκευασθῇ ἓν κύκλωμα ἐκάστης ἐκ τῶν κάτωθι παραστάσεων:

- 1) $[p \wedge (p \vee q \vee \bar{r})] \vee (\bar{q} \wedge r).$
- 2) $[(p \vee r) \wedge (p \vee t)] \vee [\bar{p} \wedge q \wedge (r \vee \bar{t})].$
- 3) $[(\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge r)] \wedge (\bar{p} \wedge q \wedge \bar{r}).$
- 4) $(p \Leftrightarrow \bar{q} \wedge \bar{r}) \Rightarrow [\bar{p} \Rightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{r})].$

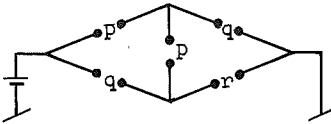
115. Νά αποδειχθῇ ὅτι, ἐκ τῶν κάτωθι κυκλωμάτων: 1) Τά (α) καί (β) εἶναι ἰσοδύναμα. 2) Τά (γ) καί (δ) εἶναι ἰσοδύναμα.



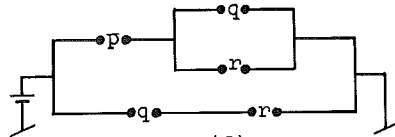
(α)



(β)



(γ)



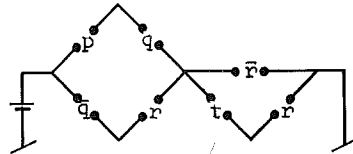
(δ)

116. Νά κατασκευασθῇ ἓν κύκλωμα τῆς παραστάσεως:

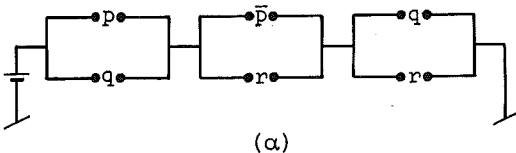
$$\overline{(p \Rightarrow \bar{q})} \Rightarrow [q \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)].$$

Ἀκολουθῶς, βάσει τοῦ κατασκευασθένος κυκλώματος, νά εὑρεθῇ ἡ τιμὴ ἀληθείας, τὴν ὁποίαν λαμβάνει ἡ παράστασις αὐτή, ὅταν αἱ p καὶ q λαμβάνουν τιμὴν ἀληθείας α καὶ ἡ r λαμβάνῃ τιμὴν ἀληθείας γ .

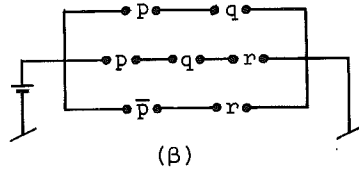
117. Δίδεται τὸ παραπλεύρως γεφυρωτὸν κύκλωμα. Νά κατασκευασθῇ ἓν ἰσοδύναμόν του σειροπαράλληλον κύκλωμα.



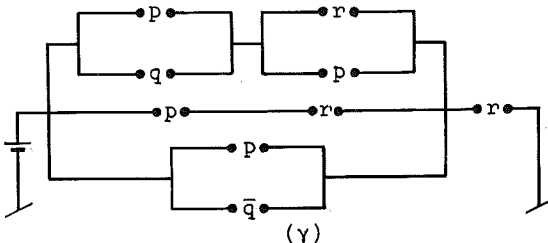
118. Νά ἀπλοποιηθῇ ἕκαστον ἐκ τῶν κάτωθι κυκλωμάτων:



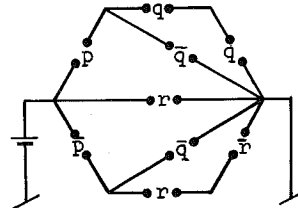
(α)



(β)



(γ)



(δ)

119. Ἐνα παιχνίδι μεταξύ δύο παικτῶν A καὶ B παίζεται ὡς ἑξῆς: « Ἀμέσως μετὰ ἀπὸ ἓνα δεδομένο σημά, ἕκαστος ἐκ τῶν δύο παικτῶν λέγει x ἢ y . Ἐάν ἀμφότεροι λέγουν x ἢ ἀμφότεροι λέγουν y , τότε κερδίζει ὁ A . Ἄλλως κερδίζει ὁ B ». Ζητεῖται νά κατασκευασθῇ ἓν ἠλεκτρικὸν κύκλωμα, περιέχον ἓνα λαμπτήρα καὶ δύο

ανεξαρτήτους διακόπτας, ένα δι'έκαστον παίκτην, εις τρόπον ὥστε: εάν ἕκαστος παίκτης, ἀντί νά λέγη x κλείνει τόν διακόπτην του καί ἀντί νά λέγη y τόν ἀνοίγει, τότε ὁ λαμπτήρας νά ἀνάβῃ μόνον ὅταν κερδίῃ ὁ A .

120. Εἰς μίαν πενταμελῆ ἐταιρίαν, ἕκαστον μέλος ψηφίζει μέ ἓνα «ναί» ἢ μέ ἓνα «ὄχι» καί αἱ ἀποφάσεις λαμβάνονται κατὰ πλειοψηφίαν. Δύο μέλη τῆς ἐταιρίας ἔχουν πάντοτε ἀντιθέτους ἀποφάσεις καί ὅταν ὁ ἓνας ἐξ αὐτῶν ψηφίῃ «ναί» ὁ ἄλλος ψηφίζει «ὄχι». Ζητεῖται νά κατασκευασθῇ ἓν ἡλεκτρικόν κύκλωμα, περιέχον ἓνα ἡλεκτρικόν κῶδωνα καί πέντε μπουτόν (διακόπτας), ἓνα δι' ἕκαστον μέλος, εις τρόπον ὥστε: εάν ἕκαστον μέλος πιέσῃ τό μπουτόν του (δηλ. κλείνῃ τόν διακόπτην του) μόνον ὅταν ψηφίῃ «ναί», τότε ὁ κῶδων νά κτυπᾷ μόνον εις περίπτωσιν πλειοψηφίας.

121. Τό διοικητικόν συμβούλιον μιᾶς ἐταιρίας εἶναι τετραμελές καί συνίσταται ἐκ τοῦ προέδρου, τοῦ ἀντιπροέδρου, τοῦ γραμματέως καί τοῦ ταμιά. Ἐκαστον μέλος ψηφίζει μέ ἓνα «ναί» ἢ μέ ἓνα «ὄχι» καί τό καταστατικόν τῆς ἐταιρίας ὁρίζει ὅτι, μία πρότασις γίνεται ἀποδεκτή ὅταν λαμβάνεται κατὰ πλειοψηφίαν ἢ ὅταν τήν ἀποδέχεται ὁ πρόεδρος καί ἓνα τουλάχιστον ἐκ τῶν τριῶν ἄλλων μελῶν. Ζητεῖται νά κατασκευασθῇ ἓν ἡλεκτρικόν κύκλωμα, περιέχον ἓνα λαμπτήρα καί τέσσαρα ἀνεξάρτητα μπουτόν (διακόπτας), ἓνα δι' ἕκαστον μέλος, εις τρόπον ὥστε: εάν ἕκαστον μέλος πιέσῃ τό μπουτόν του (δηλ. κλείνῃ τόν διακόπτην του) μόνον ὅταν ψηφίῃ «ναί», τότε ὁ λαμπτήρας νά ἀνάβῃ μόνον εις περίπτωσιν ἐγκύρου ἀποφάσεως.

122. Τό διοικητικόν συμβούλιον μιᾶς ἐταιρίας εἶναι πενταμελές καί συνίσταται ἐκ τοῦ προέδρου καί τεσσάρων ἄλλων μελῶν. Ἐκαστον μέλος ψηφίζει μέ ἓνα «ναί» ἢ μέ ἓνα «ὄχι» καί τό καταστατικόν τῆς ἐταιρίας ὁρίζει ὅτι, μία πρότασις γίνεται ἀποδεκτή μόνον ὅταν τήν ἀποδέχεται ὁ πρόεδρος καί δύο τουλάχιστον ἐκ τῶν ἄλλων μελῶν. Ζητεῖται νά κατασκευασθῇ ἓν ἡλεκτρικόν κύκλωμα, περιέχον ἓνα λαμπτήρα καί πέντε ἀνεξάρτητα μπουτόν (διακόπτας), ἓνα δι' ἕκαστον μέλος, εις τρόπον ὥστε: εάν ἕκαστον μέλος πιέσῃ τό μπουτόν του (δηλ. κλείνῃ τόν διακόπτην του) μόνον ὅταν ψηφίῃ «ναί», τότε ὁ λαμπτήρας νά ἀνάβῃ μόνον εις περίπτωσιν ἐγκύρου ἀποφάσεως.

123. Εἰς ἓν δωμάτιον θέλομεν νά ἐγκαταστήσωμεν ἓν ἡλεκτρικόν κύκλωμα, περιέχον ἓνα λαμπτήρα καί τέσσαρας ἀνεξαρτήτους διακόπτας, εις τρόπον ὥστε ὁ λαμπτήρ νά ἀνάβῃ καί νά σβῇ ἀπό

οἰονδήποτε ἐκ τῶν τεσσάρων αὐτῶν διακοπτῶν. Ἀποδείξτε ὅτι αὐτό συμβαίνει, ἐάν ὁ λαμπτήρ ἀνάβῃ ὅταν δύο ἢ τέσσαρες διακόπται εἶναι κλειστοί καί δέν ἀνάβῃ ὅταν ἕνας ἢ τρεῖς διακόπται εἶναι κλειστοί. Ἀκολούθως, κατασκευάσατε ἓν τοιοῦτον κύκλωμα.

124. Νά κατασκευασθῇ ἓν ἠλεκτρικόν κύκλωμα, τό ὁποῖον νά δίδῃ τό πρόσημον τοῦ γινομένου δύο πραγματικῶν μή μηδενικῶν ἀριθμῶν. Ἐπίσης, ἓν ἄλλο, τό ὁποῖον νά δίδῃ τό πρόσημον τοῦ γινομένου τεσσάρων πραγματικῶν μή μηδενικῶν ἀριθμῶν (βλέπε § 10.8, παραδ. 3).

125. Ἐκ τριῶν πακέτων, τό ἓν εἶναι πράσινο, τό ἄλλο λευκό καί τό τρίτο κόκκινο. Ἐξ αὐτῶν πρέπει νά πάρετε ἓν ἢ τό πολύ δύο. Ἐάν πάρετε τό λευκό, τότε θά πάρετε καί τό πράσινο. Ἐάν δέν πάρετε τό κόκκινο, τότε δέν θά πάρετε τό πράσινο. Ἐάν δέν πάρετε τό λευκό, τότε δέν θά πάρετε τό πράσινο. Πόσα καί ποῖα πακέτα πήρατε;

Λύσις. θέτομεν:

p : « πήρατε τό πράσινο ».

q : « πήρατε τό κόκκινο ».

r : « πήρατε τό λευκό ».

Οὕτω, βάσει τοῦ προβλήματος, ἔχομεν:

$$(1) \quad (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee p \vee q \vee r$$

$$(2) \quad \overline{p} \wedge q \wedge \overline{r} (\equiv \overline{p} \vee \overline{q} \vee \overline{r})$$

$$(3) \quad r \Rightarrow p (\equiv \overline{r} \vee p)$$

$$(4) \quad \overline{q} \Rightarrow \overline{p} (\equiv q \vee \overline{p})$$

$$(5) \quad \overline{r} \Rightarrow \overline{p} (\equiv r \vee \overline{p}).$$

Ἀναζητοῦμεν τώρα διὰ πόλους συνδυασμούς τῶν τιμῶν ἀληθείας τῶν p , q , r ἐκάστη ἐκ τῶν (1), (2), (3), (4) καί (5) λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α .

Ἐστω ὅτι δι' ἓν συνδυασμόν τῶν τιμῶν ἀληθείας τῶν p , q , r ἐκάστη ἐκ τῶν (1), (2), (3), (4) καί (5) λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α . Ἐπειδὴ ἡ (5) λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α , ἔπεται ὅτι μία τουλάχιστον ἐκ τῶν r καί $\overline{p}$ ὀφείλει νά λαμβάνῃ τιμὴν ἀληθείας α . Ἐστω ὅτι ἡ r λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α . Τότε, ἡ $\overline{r}$ λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας y καί ἐπειδὴ ἡ (3) λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α , ἔπεται ὅτι ἡ p λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α . Οὕτω, ἡ $\overline{p}$ λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας y καί ἐπειδὴ ἡ (4) λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α , ἔπεται ὅτι ἡ q λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α . Οὕτω, τότε, ἐκάστη ἐκ τῶν p , q , r λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α καὶ συνεπῶς ἡ (2) θά ἔπρεπε νά λαμβάνῃ τιμὴν ἀληθείας y , ἄτοπον. Ἄρα, ἡ r λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας y . Οὕτω, ἡ $\overline{p}$ λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α καί συνεπῶς ἡ p λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας y . Ἐπειδὴ ἐκάστη ἐκ τῶν p καί r λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας y καί ἡ (1) λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α , εὐρίσκομεν εὐκόλως ὅτι ἡ q ὀφείλει νά λαμβάνῃ τιμὴν ἀληθείας α . Ὥστε, τότε, ἡ p λαμβάνει

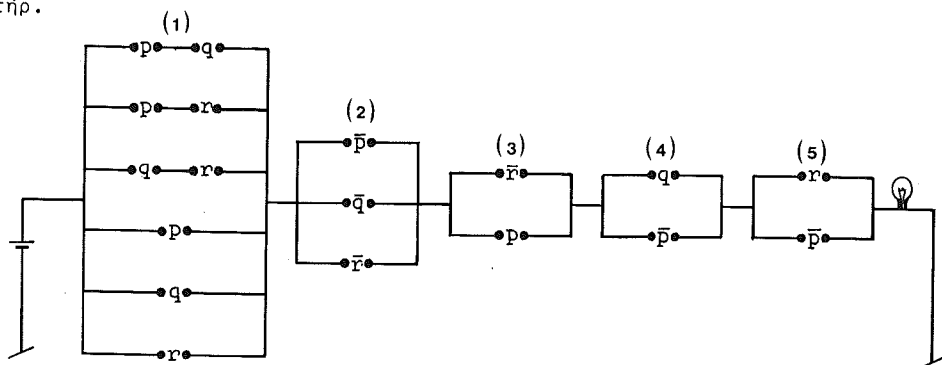
τιμὴν ἀληθείας y ἢ q α καὶ ἢ $r y$.

Ἀντιστρόφως, ἔστω ὅτι ἡ p λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας y , ἡ q α καὶ ἢ $r y$. Τότε, ὡς εὐρίσκομεν εὐκόλως, ἐκάστη ἐκ τῶν (1), (2), (3), (4) καὶ (5) λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας α .

Ἄρα, ὁ μαναδικὸς ζητούμενος συνδυασμὸς εἶναι ὁ προηγούμενος. Ὡστε:

Πήρατε ἓνα μόνον πακέτο, τό νόημινο.

— Ἐνας μηχανικὸς τρόπος διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ἀνωτέρω ζητούμενον συνδυασμόν, εἶναι νὰ κατασκευάσωμεν ἓν ἡλεκτρικὸν κύκλωμα τῆς συζεύξεως τῶν (1), (2), (3), (4) καὶ (5), νὰ τοποθετήσωμεν εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ ἓνα λαμπτήρα (βλέπε κατωτέρω σχῆμα) καὶ ἀκολουθῶς νὰ εὕρωμεν ποῦτος ἢ ποῦρι ἐκ τῶν διακοπτῶν, τῶν ἀντιστοιχοῦντων εἰς τὰ p , q καὶ r πρέπει νὰ εἶναι κλειστοῦ, ὥστε νὰ ἀνάψῃ ὁ λαμπτήρ.



ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΣ

ΕΙΣ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

11.1. Προκαταρκτικά.

Σκοπός τῶν Μαθηματικῶν δέν εἶναι νά ξεχωρίσουν τί εἶναι ἀληθές καί τί εἶναι ψευδές εἰς τόν κόσμον, ἀλλά νά εὕρουν ποῖαι προτάσεις εἶναι λογικά συνέπειαι ἄλλων δεδομένων προτάσεων, τῶν καλουμένων ἀξιωμάτων. Οὕτω, εἰς μίαν Μαθηματικήν θεωρίαν, ἡ ἀλήθεια τῶν ἀποδεικνυομένων προτάσεων, τῶν θεωρημάτων, βασίζεται εἰς τήν ἀλήθειαν τῶν τεθέντων ἀξιωμάτων. Μέ ἄλλας λέξεις, ἡ ἀλήθεια τῶν θεωρημάτων εἶναι μία σχετική ἔννοια, ἐξαρτωμένη ἐκ τῶν ἀξιωμάτων.

— Εἰς τήν § 0.5 ἐδώσαμεν τόν ὁρισμόν τῆς ἀποδείξεως καί ἀκολούθως ἐκεῖνον τοῦ θεωρήματος, εἰς μίαν Μαθηματικήν θεωρίαν. Ἐπαναλαμβάνομεν τούς ὁρισμούς αὐτούς μέ μερικάς φραστικές τροποποιήσεις:

Ἀπόδειξις (τυπική), εἰς μίαν Μαθηματικήν θεωρίαν, λέγεται κάθε (πεπερασμένη) διαδοχή προτάσεων τῆς θεωρίας τοιαύτη, ὥστε ἐκάστη πρότασις (τῆς διαδοχῆς) ἢ εἶναι ἓν ἀξίωμα ἢ προέρχεται ἐκ μιᾶς ἢ περισσοτέρων προηγουμένων (εἰς τήν διαδοχήν) προτάσεων δι' ἐφαρμογῆς ἐνός κανόνος συμπεράσματος τῆς Λογικῆς.

Μία πρότασις Θ τῆς θεωρίας λέγομεν ὅτι εἶναι ἓν **θεώρημα** ἢ μία **ἀποδείξιμος πρότασις** αὐτῆς, ἐάν ὑπάρχῃ ἀπόδειξις μέ τελευταίαν πρότασιν τήν Θ . Τότε, ἡ ἐν λόγω ἀπόδειξις λέγεται καί **ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος Θ** .

Ὅπως εἴπομεν καί εἰς τήν σημ. I τῆς § 0.5, εἰς τήν πράξιν ἡ ἀπόδειξις μιᾶς προτάσεως, εἰς μίαν Μαθηματικήν θεωρίαν, δέν γίνεται συνήθως διὰ τῆς κατασκευῆς μιᾶς ὡς ἄνω περιγραφομένης διαδοχῆς προτάσεων τῆς θεωρίας. Μέ ἄλλας λέξεις, εἰς τὰ Μαθηματικά, αἱ ἀποδείξεις τῶν προτάσεων δέν παρουσιάζονται ὑπό τήν μορφήν τῶν καλουμένων **τυπικῶν ἀποδείξεων**, τὰς ὁποίας εἵδομεν εἰς τὰ προηγούμενα κεφάλαια. Αἱ τυπικά ἀποδείξεις εἶναι μακροσκελεῖς

καί κατά συνέπειαν, ὄχι μόνον εἶναι κουραστικά, ἀλλά καί ἀπαιτοῦν πολύ χρόνο. Λόγω αὐτοῦ καί ἐπειδὴ εἰς τὰ Μαθηματικά ἡ Λογική θεωρεῖται γνωστή, εἰς τὰς ἀποδείξεις τῶν προτάσεων μιᾶς Μαθηματικῆς θεωρίας, δέν ἀναφέρονται συνήθως ὅλα τὰ βήματα τῶν τυπικῶν ἀποδείξεων καί δέν τονίζονται ἰδιαιτέρως οἱ χρησιμοποιούμενοι νόμοι καί κανόνες τῆς Λογικῆς. Ἐπίσης, διὰ νά καταστήσωμεν τὰς ἀποδείξεις ἀκόμη συντομωτέρας, χρησιμοποιούμεν εἰς αὐτάς καί προηγουμένως ἀποδειχθείσας προτάσεις (προηγούμενα θεωρήματα), ἀντιμετωπίζοντες αὐτάς ὅπως ἀκριβῶς καί τὰ ἀξιώματα (τῆς θεωρίας). Εἰς ἀντιδιαστολήν, αἱ ἀποδείξεις αὐταί λέγονται καί **μὴ τυπικαί ἢ Μαθηματικαί ἀποδείξεις**.

— Εἰς τό παρόν κεφάλαιον θά ἴδωμεν τὰς σπουδαιότερας μεθόδους, τὰς ὁποίας χρησιμοποιούμεν διὰ νά ἀποδείξωμεν μίαν πρότασιν (θεώρημα κ.λ.π.) εἰς τὰ Μαθηματικά. Βεβαίως, αἱ μέθοδοι αὐταί βασίζονται εἰς τοὺς νόμους καί τοὺς κανόνες τῆς Λογικῆς, μεταξύ τῶν ὁποίων τὸν πρωτεύοντα ρόλον εἰς τὰς ἀποδείξεις, παίζουν οἱ κανόνες συμπεράσματος. Λόγω αὐτοῦ, πρὶν προχωρήσωμεν εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῶν ἐν λόγῳ μεθόδων, κρίνομεν σκόπιμον, εἰς τὴν ἐπομένην παράγραφον, νά συγκεντρώσωμεν τοὺς κανόνες συμπεράσματος, τοὺς ὁποίους ὥς ἐπὶ τό πλεῖστον χρησιμοποιούμεν εἰς τὰ Μαθηματικά.

11.2. Οἱ σπουδαιότεροι κανόνες συμπεράσματος.

1) **Κανὼν ἀποσπάσεως (ἢ Modus ponens)**. « Ἐάν p ἀληθὴς καί $p \Rightarrow q$ ἀληθὴς, τότε q ἀληθὴς ».

Ἄλλως λέγομεν:

« Ἐκ τῶν p καί $p \Rightarrow q$, συμπεραίνομεν q ».

Συμβολικῶς:
$$\frac{p, p \Rightarrow q}{q}.$$

2) **Κανὼν συλλογισμοῦ ἀρνητικῆς μορφῆς (ἢ Modus tollens)**. « Ἐάν $p \Rightarrow q$ ἀληθὴς καί $\bar{q}$ ἀληθὴς, τότε $\bar{p}$ ἀληθὴς ».

Συμβολικῶς:
$$\frac{p \Rightarrow q, \bar{q}}{\bar{p}}.$$

3) **Κανὼν ὑποθετικοῦ συλλογισμοῦ**. « Ἐάν $p \Rightarrow q$ ἀληθὴς καί $q \Rightarrow r$ ἀληθὴς, τότε $p \Rightarrow r$ ἀληθὴς ».

Συμβολικῶς:
$$\frac{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r}{p \Rightarrow r}.$$

● Γενικώτερον ἔχομεν τὸν ἑξῆς κανόνα:

$$\frac{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r, \dots, u \Rightarrow w}{p \Rightarrow w}.$$

4) **Κανὼν διαζευκτικοῦ συλλογισμοῦ**. « Ἐάν $p \vee q$ ἀληθὴς καί $\bar{p}$ ἀ-

||| ληθής, τότε q αληθής».

Συμβολικώς:
$$\frac{p \vee q, \bar{p}}{q}.$$

5) **Απλουστευτικός κανών.** «Εάν $p \wedge q$ αληθής, τότε p αληθής και q αληθής».

Συμβολικώς:
$$\frac{p \wedge q}{p}, \quad \frac{p \wedge q}{q}.$$

6) **Κανών συζεύξεως.** «Εάν p αληθής και q αληθής, τότε $p \wedge q$ αληθής».

Συμβολικώς:
$$\frac{p, q}{p \wedge q}.$$

7) **Προσθετικός κανών.** «Εάν p αληθής, τότε $p \vee q$ αληθής».

Συμβολικώς:
$$\frac{p}{p \vee q}.$$

8) **Κανών ισοδυναμίας.** «Εάν $p \Rightarrow q$ αληθής και $q \Rightarrow p$ αληθής, τότε $p \Leftrightarrow q$ αληθής και αντίστροφως».

Συμβολικώς:
$$\frac{p \Rightarrow q, q \Rightarrow p}{p \Leftrightarrow q}, \quad \frac{p \Leftrightarrow q}{p \Rightarrow q, q \Rightarrow p}.$$

9) **Κανών αντικαταστάσεως (διά προτάσεις).** «Εάν μία αληθής (αντιστοίχως, ψευδής) σύνθετος πρότασις περιέχει μίαν πρότασιν p και $p \Leftrightarrow q$ εἶναι αληθής, τότε αντικαθιστώντες εἰς τὴν σύνθετον αὐτὴν πρότασιν τὴν p μετὰ τὴν q προκύπτει μία νέα αληθής (αντιστοίχως, ψευδής) σύνθετος πρότασις».

— Κατωτέρω διατυποῦμεν τοὺς καλουμένους **ποσοδεικτικούς κανόνες** συμπεράσματος ὑπὸ τὴν ἀπλουστέραν δυνατὴν μορφήν των.

10) **Κανὼν εἰδικεύσεως τοῦ καθολικοῦ.** «Ἐστω $p(x)$ ἕνας προτασιακὸς τύπος μιᾶς μεταβλητῆς x , ὠρισμένος ἐπὶ ἑνὸς συνόλου M . Ἐάν $(\forall x \in M)p(x)$ αληθής και $\xi \in M$, τότε $p(\xi)$ αληθής».

Συμβολικώς:
$$\frac{(\forall x \in M)p(x)}{p(\xi)}.$$

11) **Κανὼν καθολικῆς γενικεύσεως.** «Ἐστω $p(x)$ ἕνας προτασιακὸς τύπος μιᾶς μεταβλητῆς x , ὠρισμένος ἐπὶ ἑνὸς συνόλου M . Ἐάν διὰ τυχόν $y \in M$, $p(y)$ αληθής, τότε $(\forall x \in M)p(x)$ αληθής».

Συμβολικώς:
$$\frac{p(y)}{(\forall x \in M)p(x)}.$$

12) **Κανὼν εἰδικεύσεως τοῦ ὑπαρξιακοῦ.** «Ἐστω $p(x)$ ἕνας προτασιακὸς τύπος μιᾶς μεταβλητῆς x , ὠρισμένος ἐπὶ ἑνὸς συνόλου M . Ἐάν $(\exists x \in M)p(x)$ αληθής, τότε $p(\xi)$ αληθής, ὅπου ξ μία κατάλληλος τιμὴ τοῦ x ».

Συμβολικώς:
$$\frac{(\exists x \in M)p(x)}{p(\xi)}.$$

13) Κανών ύπαρξιακής γενικεύσεως. « Έστω $p(x)$ ένας προτασιακός τύπος μιᾶς μεταβλητῆς x , ὥρισμένος ἐπὶ ἑνὸς συνόλου M . Ἐάν δι' ἕν $\xi \in M$, $p(\xi)$ ἀληθῆς, τότε $(\exists x \in M)p(x)$ ἀληθῆς ».

Συμβολικῶς:

$$\frac{p(\xi)}{(\exists x \in M)p(x)}.$$

Μέθοδοι ἀποδείξεως εἰς τὰ Μαθηματικά

11.3. Ἀπόδειξις διὰ συνεπαγωγῶν.

Έστω ὅτι εἰς μίαν Μαθηματικὴν θεωρίαν θέλομεν νά ἀποδείξωμεν μίαν πρότασιν w , Ἐάν δυνάμεθα νά εὕρωμεν μίαν (πεπερασμένην) διαδοχὴν ἀληθῶν προτάσεων τῆς μορφῆς:

$$p \Rightarrow q, q \Rightarrow r, \dots, t \Rightarrow u, u \Rightarrow w, \quad (1)$$

ὅπου p εἶναι ἓν ἀξίωμα ἢ ἓν ἀποδειχθέν θεώρημα, τότε ἡ w θά εἴη ἀποδειχθῇ. Πράγματι, ἐκ τῶν (1) βάσει τοῦ κανόνος ὑποθετικοῦ συλλογισμοῦ (§ 11.2,3), ἔπεται ὅτι ἡ πρότασις $p \Rightarrow w$ εἶναι ἀληθῆς. Ἐξ αὐτοῦ καὶ ἐπειδὴ ἡ p εἶναι ἀληθῆς, βάσει τοῦ κανόνος ἀποσπάσεως (§ 11.2,1), ἔπεται ὅτι καὶ ἡ w εἶναι ἀληθῆς.

Συνήθως τὴν διαδοχὴν (1) γράφομεν συντομώτερον, ὡς ἑξῆς:

$$p \Rightarrow q \Rightarrow r \Rightarrow \dots \Rightarrow t \Rightarrow u \Rightarrow w. \quad (2)$$

— Ὅταν ἡ ἐναρξίς τῆς ἀποδείξεως δέν εἶναι εὐκόλος, ἐπιχειροῦμεν συνήθως τὴν κατασκευὴν τῆς διαδοχῆς (1), ἀρχίζοντες ἐκ τοῦ τέλους. Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν, λέγομεν:

Διὰ νά ἀποδείξωμεν τὴν w ,

ἀρκεῖ νά ἀποδείξωμεν τὴν u (ἐννοοῦντες ὅτι ἰσχύει: $u \Rightarrow w$),

ἀρκεῖ νά ἀποδείξωμεν τὴν t (ἐννοοῦντες ὅτι ἰσχύει: $t \Rightarrow u$),

κ.ο.κ.

Προχωροῦμεν κατ' αὐτόν τὸν τρόπον, ἕως ὅτου φθάσωμεν εἰς μίαν ἀληθῆ πρότασιν (ἀξίωμα ἢ ἀποδειχθέν θεώρημα), ἔστω p .

Μέ ἄλλας λέξεις, λέγομεν:

w ἀρκεῖ u ἀρκεῖ t ἀρκεῖ ... ἀρκεῖ p

καὶ ἐννοοῦμεν:

$$w \Leftarrow u \Leftarrow t \Leftarrow \dots \Leftarrow p \quad (3)$$

καὶ ἐφ' ὅσον ἡ p εἶναι ἀληθῆς, συμπεραίνομεν τὴν ἀλήθειαν τῆς ἀποδεικτέας προτάσεως w (ἡ διαδοχὴ (3) εἶναι ἡ (2), δηλ. ἡ (1)).

● Σημειοῦμεν ὅτι κατὰ τὴν κατασκευὴν τῆς διαδοχῆς (3), δέν μᾶς ἐνδιαφέρει ἐάν ἰσχύουν ἢ ὄχι αἱ ἀντίστροφαι συνεπαγωγαί. Αὐταὶ οὐδεμίαν σχέσιν ἔχουν μέ τὴν κατασκευαζομένην ἀπόδειξιν τῆς w . Καὶ ἐάν μία ἢ περισσότεραι ἐξ αὐτῶν τῶν ἀντιστρόφων συνεπαγωγῶν ἰσχύουν, τότε δέν θά τό σημειοῦμεν εἰς τὴν διαδοχὴν (3); "Ὅχι,

διότι σκοπός μας δέν εἶναι νά ἀναφέρομεν κάθε τι, τό ὁποῖον ἰσχύει εἰς τά Μαθηματικά, ἀλλά ἐξ αὐτῶν τά ὁποῖα ἰσχύουν, ἐκεῖνα τά ὁποῖα ἔχουν σχέσιν μέ τήν κατασκευαζομένην ἀπόδειξιν τῆς w (ἄλλως, θά ἔπρεπε νά ἀναφέρωμεν καί τό θεώρημα τοῦ Πυθαγόρα!, διότι ἡ σχέσις του μέ τήν κατασκευαζομένην ἀπόδειξιν τῆς w , δέν διαφέρει ἀπό ἐκείνην τῶν ἐν λόγῳ ἀντιστρόφων συνεπαγωγῶν).

● Σημειοῦμεν ἀκόμη ὅτι, ἐάν εἰς τήν προσπάθειάν μας νά κατασκευάσωμεν τήν διαδοχήν (3), φθάσωμεν εἰς μίαν ψευδῇ πρότασιν p , τότε οὐδέν δυνάμεθα νά συμπεράνωμεν διὰ τήν ἀλήθειαν τῆς ἀποδεικτέας προτάσεως w (διατί;). Καί τί θά κάνωμεν εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν; θά ἐπαναλάβωμεν τήν προσπάθειάν μας μέ ἄλλας προτάσεις, αἱ ὁποῖαι ἐνδεχομένως νά μᾶς ὀδηγήσουν εἰς μίαν ἀληθῆ πρότασιν p .

Παράδειγμα (ἐκ τῆς Ἀλγέβρας). « Ἐστῶσαν δύο πραγματικοί ἀριθμοί α καί β . Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\alpha^2 + \beta^2 + 5 \geq 2(\alpha - 2\beta). \quad (1) \gg$$

Ἀπόδειξις. Προφανῶς ἰσχύει: $(\alpha - 1)^2 + (\beta + 2)^2 \geq 0$. Ἐξ ἄλλου, ἔχομεν:

$$\begin{aligned} (\alpha - 1)^2 + (\beta + 2)^2 \geq 0 &\Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 + \beta^2 + 4\beta + 4 \geq 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 5 \geq 2\alpha - 4\beta \\ &\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 5 \geq 2(\alpha - 2\beta). \quad (2) \end{aligned}$$

"Ἀρα, ἡ (1) ἰσχύει.

● Βεβαίως, ἡ ἔναρξις τῆς ἀποδείξεως αὐτῆς δέν εἶναι εὐκόλος. "Ἀς ἐπιχειρήσωμεν λοιπόν νά κατασκευάσωμεν τήν διαδοχήν (2) ἀρχίζοντες ἐκ τοῦ τέλους, δηλ. ἀρχίζοντες ἀπό τήν ἀποδεικτέαν σχέσιν (1):

Διά νά ἀποδείξωμεν τήν (1),

ἄρκεῖ νά ἀποδείξωμεν τήν: $\alpha^2 + \beta^2 + 5 \geq 2\alpha - 4\beta$,

ἄρκεῖ νά ἀποδείξωμεν τήν: $\alpha^2 + \beta^2 + 5 - 2\alpha + 4\beta \geq 0$,

ἄρκεῖ νά ἀποδείξωμεν τήν: $(\alpha^2 - 2\alpha + 1) + (\beta^2 + 4\beta + 4) \geq 0$,

ἄρκεῖ νά ἀποδείξωμεν τήν: $(\alpha - 1)^2 + (\beta + 2)^2 \geq 0$,

ἥτις προφανῶς ἰσχύει. "Ἀρα ἡ (1) ἰσχύει.

● Συνήθως, ἀντί νά ἐπαναλαμβάνωμεν τό «ἄρκεῖ νά ἀποδείξωμεν τήν», λέγομεν:

Διά νά ἀποδείξωμεν τήν (1), ἄρκεῖ νά ἀποδείξωμεν ὅτι:

$$\alpha^2 + \beta^2 + 5 \geq 2\alpha - 4\beta \quad \text{ἢ} \quad \alpha^2 + \beta^2 + 5 - 2\alpha + 4\beta \geq 0 \quad \text{ἢ} \quad (\alpha^2 - 2\alpha + 1) + (\beta^2 + 4\beta + 4) \geq 0 \quad \text{ἢ} \quad (\alpha - 1)^2 + (\beta + 2)^2 \geq 0, \quad \text{ἥτις ἰσχύει.}$$

Προσοχή. Ἐστῶ ὅτι θέλομεν νά ἀποδείξωμεν μίαν πρότασιν w . Ἐστῶ ἀκόμη ὅτι εὐρίσκομεν μίαν διαδοχήν ἀληθῶν προτάσεων τῆς μορφῆς:

$$w \Rightarrow u, u \Rightarrow t, \dots, q \Rightarrow p$$

(ἡ ὡς γράφομεν συντομώτερον: $w \Rightarrow u \Rightarrow t \Rightarrow \dots \Rightarrow q \Rightarrow p$), ὅπου

p είναι μία πρόταση αληθής. Τότε, είναι λάθος έξ αὐτῶν νά συμπεραίνωμεν τήν ἀλήθειαν τῆς w . Πράγματι, τότε, ἔχομεν:

$$w \Rightarrow p \text{ ἀληθῆς καί } p \text{ ἀληθῆς.}$$

Ἐξ αὐτῶν ὅμως δέν συμπεραίνεται ἡ ἀλήθεια τῆς w .

Π.χ. ἐκάστη ἐκ τῶν κάτωθι συνεπαγωγῶν, εἶναι ἀληθής:

$$-1 = 1 \Rightarrow (-1)^2 = 1^2 \Rightarrow 1 = 1$$

(ἡ πρώτη εἶναι ἀληθής, διότι ἡ $-1 = 1$ εἶναι ψευδής) καί ἐπίσης ἡ $1 = 1$ εἶναι ἀληθής, ἀλλά ἡ $-1 = 1$ εἶναι ψευδής.

11.4. Περίπτωσης ὑποθετικῶν καί διὑποθετικῶν προτάσεων.

1) Πολλάς φορές, ἡ πρός ἀπόδειξιν πρόταση εἶναι τῆς μορφῆς: $p \Rightarrow q$. Τότε, θεωροῦμεν μόνον τήν περίπτωσιν κατὰ τήν ὁποίαν ἡ p εἶναι ἀληθής, διότι εἰς τήν περίπτωσιν ὅπου ἡ p εἶναι ψευδής, ἡ συνεπαγωγή: $p \Rightarrow q$ εἶναι ἀληθής (§ 1.3, 4ον).

Τώρα, μέ τήν ὑπόθεσιν ὅτι ἡ p εἶναι ἀληθής, διά νά ἀποδείξωμεν τήν ἀλήθειαν τῆς $p \Rightarrow q$, ἀρκεῖ νά ἀποδείξωμεν ὅτι καί ἡ q εἶναι ἀληθής (διατί;).

Συνήθως ἀρχίζομεν τήν ἀπόδειξιν, λέγοντες: «ἔστω ὅτι p (εἶναι ἀληθής)» ἢ «ἔχομεν ἐξ ὑποθέσεως p » κ.λ.π. Μερικάς φορές εἶναι εὐκόλον νά εὐρωμεν μίαν ἀπόδειξιν τῆς μορφῆς:

$$p \Rightarrow r \Rightarrow \dots \Rightarrow t \Rightarrow u \Rightarrow q. \quad (1)$$

Ἄλλας πάλιν φορές, προσπαθοῦμεν νά εὐρωμεν μίαν ἀπόδειξιν τῆς μορφῆς (1), ἀρχίζοντες ἐκ τοῦ τέλους (§ 11.3).

Παράδειγμα (ἐκ τῆς Ἀλγέβρας). «Μέ α καί β πραγματικούς ἀριθμούς, ἀποδείξατε ὅτι: $\alpha + \beta = 1 \Rightarrow \alpha^2 + 2\beta - \beta^2 = 1$ ».

Ἀπόδειξις. Ἐστω ὅτι: $\alpha + \beta = 1$. θά ἀποδείξωμεν ὅτι: $\alpha^2 + 2\beta - \beta^2 = 1$. Πρός τοῦτο, ἀρκεῖ νά ἀποδείξωμεν ὅτι: $\alpha^2 = 1 - 2\beta + \beta^2$ ἢ $\alpha^2 = (1 - \beta)^2$ ἢ $\alpha = 1 - \beta$ ἢ $\alpha + \beta = 1$, ἥτις ἰσχύει.

Σημείωσις. Αὐστηρῶς ὁμιλοῦντες, μέ τήν ὑπόθεσιν ὅτι ἡ p εἶναι ἀληθής, διά νά ἀποδείξωμεν τήν ἀλήθειαν τῆς $p \Rightarrow q$, ἀρκεῖ εἰς τά ἀξιώματα τῆς ὑπ' ὄψιν θεωρίας νά ἐπισυνάψωμεν τήν πρότασιν p ὡς ἓν νέον ἀξίωμα καί εἰς τήν οὕτως προκύπτουσαν νέαν θεωρίαν, νά ἀποδείξωμεν τήν ἀλήθειαν τῆς q .

2) Ἐάν ἡ πρός ἀπόδειξιν πρόταση εἶναι τῆς μορφῆς: $p \Leftrightarrow q$, τότε ἀρκεῖ νά ἀποδείξωμεν ἐκάστην ἐκ τῶν δύο προτάσεων: $p \Rightarrow q$ καί $q \Rightarrow p$ (§ 11.2, 8).

Βεβαίως, ἐάν δυνάμεθα νά εὐρωμεν μίαν (πεπερασμένην) διαδοχὴν ἀληθῶν προτάσεων τῆς μορφῆς:

$$p \Leftrightarrow r, r \Leftrightarrow t, \dots, u \Leftrightarrow q, \quad (2)$$

τότε ἡ πρότασις: $p \Leftrightarrow q$ θά ἔχη ἀποδειχθῇ (διατί;).

Συνήθως, την διαδοχήν (2) την γράφουμεν συντομώτερον, ως εξής:

$$p \Leftrightarrow r \Leftrightarrow t \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow u \Leftrightarrow q.$$

Παράδειγμα (έκ της Άλγέβρας). «Μέ α καί β πραγματικούς αριθμούς, αποδείξατε ότι:

$$(\alpha^2 + \alpha + 1)(\alpha^2 - \alpha + 1) = \beta^2 - \alpha^2 \Leftrightarrow |\beta| - \alpha^2 = 1 \gg.$$

Απόδειξις: Έχομεν:

$$\begin{aligned} (\alpha^2 + \alpha + 1)(\alpha^2 - \alpha + 1) &= \beta^2 - \alpha^2 \Leftrightarrow (\alpha^2 + 1)^2 - \alpha^2 = \beta^2 - \alpha^2 \Leftrightarrow (\alpha^2 + 1)^2 = \beta^2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{(\alpha^2 + 1)^2} &= \sqrt{\beta^2} \Leftrightarrow |\alpha^2 + 1| = |\beta| \Leftrightarrow \alpha^2 + 1 = |\beta| \Leftrightarrow |\beta| - \alpha^2 = 1. \end{aligned}$$

11.5. Μέθοδος της αντίστροφoαντιθέτου προτάσεως.

Έστω ότι θέλομεν νά αποδείξωμεν μίαν πρότασιν τῆς μορφῆς: $p \Rightarrow q$. Ἐπειδὴ αὕτη εἶναι ἀληθῆς, ἐάν ἡ $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ εἶναι ἀληθῆς (§ 2.5, 40), ἀρκεῖ νά αποδείξωμεν τὴν τελευταίαν συνεπαγωγὴν, τῆς ὁποίας ἡ ἀπόδειξις πολλάκις εἶναι εὐκολωτέρα ἐκείνης τῆς $p \Rightarrow q$.

Παράδειγμα (έκ της Άλγέβρας). «Νά αποδειχθῇ ὅτι: ἐάν τὸ τετράγωνον ἐνὸς ἀκεραίου α εἶναι περιττός, τότε ὁ α εἶναι περιττός».

Απόδειξις. Ἀρκεῖ νά αποδείξωμεν ὅτι: ἐάν ἕνας ἀκεραῖος α εἶναι ἄρτιος, τότε ὁ α^2 εἶναι ἐπίσης ἄρτιος. Πράγματι, ἔστω ὅτι ὁ α εἶναι ἄρτιος. Τότε, ὑπάρχει ἀκεραῖος λ τοιοῦτος, ὥστε νά ἰσχύη: $\alpha = 2\lambda$. Ἐχομεν $\alpha^2 = 4\lambda^2 = 2(2\lambda^2)$, ἤτοι ὁ α^2 εἶναι ἄρτιος.

Σημείωσις. Διὰ νά αποδείξωμεν μίαν πρότασιν τῆς μορφῆς: $p \Leftrightarrow q$, ἀρκεῖ νά αποδείξωμεν ἐκάστην ἐκ τῶν δύο συνεπαγωγῶν: $p \Rightarrow q$ καὶ $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ (διατί;). Π.χ. διὰ νά αποδείξωμεν εἰς τὴν "Άλγεβραν ὅτι: «ἕνας ἀκεραῖος α εἶναι περιττός ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, ὁ α^2 εἶναι περιττός», ἀρκεῖ νά αποδείξωμεν ὅτι: 1) «Ἐάν ἕνας ἀκεραῖος α εἶναι περιττός, τότε ὁ α^2 εἶναι ἐπίσης περιττός» καὶ 2) «Ἐάν ἕνας ἀκεραῖος α εἶναι ἄρτιος, τότε ὁ α^2 εἶναι ἐπίσης ἄρτιος» (διατί;).

11.6. Μέθοδος τῶν δυνατῶν περιπτώσεων.

Έστω ὅτι θέλομεν νά αποδείξωμεν μίαν πρότασιν τῆς μορφῆς:

$$p \vee q \Rightarrow w. \quad (1)$$

Ἐπειδὴ αὕτη εἶναι ἀληθῆς ἐάν ἡ πρότασις:

$$(p \Rightarrow w) \wedge (q \Rightarrow w) \quad (2)$$

εἶναι ἀληθῆς (§ 2.5, 50), ἀρκεῖ νά αποδείξωμεν τὴν πρότασιν (2). Πρὸς τοῦτο δέ, βάσει τοῦ κανόνος συζεύξεως (§ 11.2, 6) ἀρκεῖ νά αποδείξωμεν ἐκάστην ἐκ τῶν δύο προτάσεων:

$$p \Rightarrow w \quad \text{καὶ} \quad q \Rightarrow w.$$

Συνήθως ἀρχίζομεν τὴν ἀπόδειξιν τῆς (1) λέγοντες: «Έστω ὅ-

τι $p \vee q$ (είναι αληθής). Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις: 1) "Εστω ότι p (είναι αληθής) κ.λ.π. 2) "Εστω ότι q (είναι αληθής) κ.λ.π.

Π.χ. διά νά αποδείξωμεν εἰς τήν "Αλγεβραν τήν πρότασιν:

$$\ll (a \geq \varepsilon \vee a \leq -\varepsilon) \Rightarrow |a| \geq \varepsilon \gg,$$

διακρίνομεν δύο περιπτώσεις: 1) $a \geq \varepsilon$ καί 2) $a \leq -\varepsilon$.

● Γενικώτερον, διά νά αποδείξωμεν μίαν πρότασιν τῆς μορφῆς:

$$p \vee q \vee \dots \vee t \Rightarrow w,$$

άρκει νά αποδείξωμεν ἐκάστην τῶν προτάσεων:

$$p \Rightarrow w, q \Rightarrow w, \dots, t \Rightarrow w \quad (\text{διατί;})$$

— "Εστω τώρα ὅτι θέλομεν νά αποδείξωμεν μίαν πρότασιν τῆς μορφῆς: $p \Rightarrow w$. Ἐάν ἀνακαλύψωμεν ὅτι:

$$p \Rightarrow q \vee r \vee \dots \vee t, \quad (3)$$

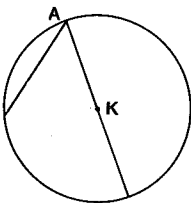
τότε ἀρκει νά αποδείξωμεν ὅτι:

$$p \vee r \vee \dots \vee t \Rightarrow w. \quad (4)$$

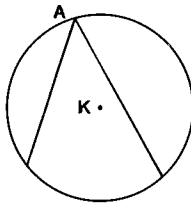
Πράγματι τότε, ἐκ τῶν (3) καί (4), βάσει τοῦ κανόνος ὑποθετικοῦ συλλογισμοῦ (§ 11.2,3) προκύπτει ἡ $p \Rightarrow w$. Διά νά αποδείξωμεν δέ τήν (4), βάσει τῶν προηγουμένων, δυνάμεθα νά διακρίνωμεν περιπτώσεις, δηλαδή νά αποδείξωμεν ἐκάστην ἐκ τῶν προτάσεων:

$$q \Rightarrow w, r \Rightarrow w, \dots, t \Rightarrow w.$$

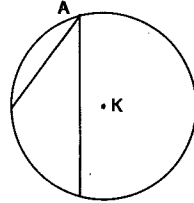
Π.χ. διά νά αποδείξωμεν εἰς τήν Γεωμετρίαν ὅτι: «ἐάν μία γωνία A εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον, τότε αὕτη ἰσοῦται μέ τό ἥμισυ τῆς ἀντιστοίχου ἐπικέντρου γωνίας», ἀνακαλύπτομεν, κατ'ἀρχήν ὅτι: «ἐάν μία γωνία A εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον, κέντρου K , τότε: τό K κεῖται εἰς μίαν πλευράν τῆς γωνίας A (σχ.11.6 - 1), εἴτε τό K κεῖται ἐντός τῆς γωνίας A (σχ.11.6 - 2), εἴτε τό K κεῖται ἐκτός τῆς γωνίας A (σχ. 11.6 - 3)». Ἀκολουθῶς διακρίνομεν τὰς



Σχ.11.6 - 1



Σχ. 11.6 - 2



Σχ.11.6 - 3

τρεις περιπτώσεις: 1) Ἐάν τό K κῆται εἰς μίαν πλευράν τῆς γωνίας A . 2) Ἐάν τό K κῆται ἐντός τῆς γωνίας A καί 3) Ἐάν τό K κῆται ἐκτός τῆς γωνίας A .

Ἐπίσης, διά νά αποδείξωμεν εἰς τήν "Αλγεβραν ὅτι: «ἐάν a εἶναι ἕνας πραγματικός ἀριθμός, τότε $|a| \geq 0$ », ἀνακαλύπτομεν, κατ'ἀρχήν ὅτι: «ἐάν a εἶναι ἕνας πραγματικός ἀριθμός, τότε: $a \geq 0$, εἴτε $a < 0$ ». Ἀκολουθῶς, διακρίνομεν τὰς δύο περιπτώσεις: 1) $a \geq 0$ καί 2) $a < 0$.

11.7. Μέθοδος της εἰς άτοπον ἀπαγωγῆς.

Ἐστω ὅτι εἰς μίαν Μαθηματικὴν θεωρίαν θέλομεν νά ἀποδείξωμεν μίαν πρότασιν p . Ἡ μέθοδος τῆς εἰς **ἀτοπον ἀπαγωγῆς**, εἰς τὴν ἀπλουστεράν περίπτωσιν, συνίσταται εἰς τό νά θεωρήσωμεν τὴν πρότασιν $\bar{p}$ καὶ ἀκολουθῶς νά ἀποδείξωμεν μίαν πρότασιν τῆς μορφῆς:

$$\bar{p} \Rightarrow \bar{q}, \quad (1)$$

ὅπου q εἶναι μία ἀληθὴς πρότασις τῆς θεωρίας (ἀξίωμα ἢ ἀποδεικθέν θεώρημα). Τότε, θά ἔχωμεν:

$$(\bar{p} \Rightarrow \bar{q}) \text{ ἀληθὴς καὶ } q \text{ ἀληθὴς,}$$

ὁπότε, βάσει τοῦ κανόνος συλλογισμοῦ ἀρνητικῆς μορφῆς (§ 11.2, 2), ἡ πρότασις p θά εἶναι ἀληθὴς.

Συνήθως, ἀρχίζομεν τὴν ἀπόδειξιν λέγοντες: «ἔστω ὅτι ἡ p δέν ἰσχύει (δέν εἶναι ἀληθὴς). Τότε θά ἔχωμεν $\bar{p}$ (ἐννοοῦμεν ὅτι, τότε, ἡ $\bar{p}$ θά εἶναι ἀληθὴς)». Ἀκολουθῶς ἀποδεικνύομεν μίαν πρότασιν τῆς μορφῆς (1). Κατόπιν λέγομεν: «Ἄρα, τότε, θά ἔχωμεν $\bar{q}$ (ἐννοοῦμεν ὅτι, τότε, ἡ $\bar{q}$ θά εἶναι ἀληθὴς βάσει τοῦ κανόνος ἀποσπάσεως), ὅπερ **ἀτοπον** (ἐννοοῦμεν ὅτι, τότε, ἡ πρότασις $q \wedge \bar{q}$ ὀφείλει νά εἶναι ἀληθὴς)».

Σημειώσεις. Αὐστηρῶς ὁμιλοῦντες, διὰ νά ἀποδείξωμεν μίαν πρότασιν p , εἰς μίαν Μαθηματικὴν θεωρίαν, ἀρκεῖ εἰς τὰ ἀξιώματά τῆς ὑπ' ὅψιν θεωρίας νά ἐπισυνάψωμεν τὴν πρότασιν $\bar{p}$ ὡς ἓν νέον ἀξίωμα καὶ νά ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ οὕτως προκύπτουσα νέα θεωρία εἶναι «ἀντιφατικὴ», δηλαδὴ ὅτι ὑπάρχει πρότασις αὐτῆς, ἔστω r , τοιαύτη ὥστε αἱ r καὶ $\bar{r}$ νά εἶναι ταυτοχρόνως ἀληθεῖς.

11.8. Μέθοδος τῆς ἀπαλειφῆς.

Ἐστω ὅτι θέλομεν νά ἀποδείξωμεν μίαν πρότασιν τῆς μορφῆς: $p \Rightarrow q$ καὶ ἀνακαλύπτομεν ὅτι: $p \Rightarrow q \vee r$. Ἐάν, τώρα, ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ $\bar{r}$ εἶναι ἀληθὴς ἢ, ὡς λέγομεν, ἐάν **ἀπαλείψωμεν** τὴν r (π.χ. διὰ τῆς μεθόδου τῆς εἰς ἀτοπον ἀπαγωγῆς), τότε ἡ πρότασις $p \Rightarrow q$ θά εἶναι ἀληθὴς. Πράγματι, τότε, θά ἔχωμεν:

$$\begin{array}{lll} p \Rightarrow q \vee r & \text{ἀληθὴς} & \\ \bar{r} \vee (q \vee r) & \text{ἀληθὴς} & (\S 2.5.31) \\ (\bar{r} \vee q) \vee r & \text{ἀληθὴς} & (\S 2.5.11) \\ \bar{r} \vee q & \text{ἀληθὴς} & (\S 11.2, 4, \bar{r} \text{ ἀληθὴς}) \\ p \Rightarrow q & \text{ἀληθὴς} & (\S 2.5.31) \end{array}$$

● Γενικώτερον, ἔστω ὅτι θέλομεν νά ἀποδείξωμεν μίαν πρότασιν τῆς μορφῆς $p \Rightarrow q$ καὶ ἀνακαλύπτομεν ὅτι:

$$p \Rightarrow q \vee r \vee s \vee \dots \vee u. (1)$$

Εάν αι $r, s, \dots, u$ δύνανται νά απαλειφθοῦν, τότε ἡ πρότασις $p \Rightarrow q$ εἶναι ἀληθής.

Παράδειγμα (ἐκ τῆς Γεωμετρίας). «Νά ἀποδειχθῇ ὅτι: ἐάν εἰς τρίγωνον $AB\Gamma$ ἰσχύη: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ τότε τό τρίγωνον τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τό A » (ἀντίστροφον τοῦ θεωρήματος τοῦ Πυθαγό - ρα).

Ἀπόδειξις. Ἐχομεν νά ἀποδείξωμεν τήν συνεπαγωγήν:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \Rightarrow A = \frac{\pi}{2}. \quad (1)$$

Ἐπειδή ἡ πρότασις:

$$\left(A = \frac{\pi}{2}\right) \vee \left(A > \frac{\pi}{2}\right) \vee \left(A < \frac{\pi}{2}\right)$$

εἶναι ἀληθής, ἔπεται ὅτι καί ἡ πρότασις:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \Rightarrow \left(A = \frac{\pi}{2}\right) \vee \left(A > \frac{\pi}{2}\right) \vee \left(A < \frac{\pi}{2}\right)$$

εἶναι ἀληθής (διατύ;). Ἀλλά, ὡς γνωστόν:

$$A > \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2, \quad \text{ὅπερ ἄτοπον}$$

καί ἐπίσης:

$$A < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2, \quad \text{ὅπερ ἄτοπον.}$$

Ἀρα, ἡ συνεπαγωγή (1) εἶναι ἀληθής (διατύ;).

11.9. Ἀπόδειξις προτάσεων τῆς μορφῆς: $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$.

Ἐστω ὅτι θέλομεν νά ἀποδείξωμεν μίαν πρότασιν τῆς μορφῆς: $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$. Ἐπειδή αὕτη εἶναι ἀληθής ἐάν ἡ πρότασις $p \wedge q \Rightarrow r$ εἶναι ἀληθής (§ 2.5, 43), ἀρκεῖ νά ἀποδείξωμεν τήν τελευταίαν συνεπαγωγήν.

Π.χ. διὰ νά ἀποδείξωμεν εἰς τήν Γεωμετρίαν ὅτι: «ἐάν μία εὐθεῖα (ϵ) εἶναι παράλληλος πρὸς ἓν ἐπίπεδον (Π), τότε: ἐάν ἐξ ἑνὸς σημείου τοῦ ἐπιπέδου (Π) φέρωμεν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τήν (ϵ), τότε αὕτη κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π)», ἀρκεῖ νά ἀποδείξωμεν ὅτι: «ἐάν μία εὐθεῖα (ϵ) εἶναι παράλληλος πρὸς ἓν ἐπίπεδον (Π) καί ἐξ ἑνὸς σημείου τοῦ ἐπιπέδου (Π) φέρωμεν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τήν (ϵ), τότε αὕτη κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π)».

11.10. Ἀπόδειξις προτάσεων τῆς μορφῆς: $(\forall x)p(x)$.

Ἐστω ὅτι θέλομεν νά ἀποδείξωμεν μίαν πρότασιν τῆς μορφῆς:

$$(\forall x)p(x) \quad (1)$$

ὅπου $p(x)$ εἶναι ἓνας προτασιακός τύπος, μιᾶς μεταβλητῆς x , ὁρισμένου ἐπὶ ἑνὸς συνόλου M . Πρὸς τοῦτο, ἀρκεῖ νά λάβωμεν ἓν τυ-

(1) Διὰ νά εἶναι ἡ συνεπαγωγή αὕτη ἀληθής, ἀρκεῖ ἡ πρότασις: $q \vee r \vee s \vee \dots \vee u$ νά εἶναι ἀληθής (διατύ;).

χόν στοιχεῖον y τοῦ M καί νά ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ πρότασις $p(y)$ εἶναι ἀληθής. Πράγματι τότε, βάσει τοῦ κανόνος καθολικῆς γενικεύσεως (§ 11.2,11) ἡ πρότασις (1) θά εἶναι ἀληθής. Συνήθως, ἀντί τοῦ γράμματος y χρησιμοποιοῦμεν, πάλιν, τό γράμμα x καί ἀρχίζομεν τήν ἀπόδειξιν λέγοντες: « Ἐστω x ἕν(τυχόν) στοιχεῖον τοῦ M κ.λ.π. » .

Π.χ. διὰ νά ἀποδείξωμεν εἰς τήν Ἀνάλυσιν ὅτι: « Κάθε συγκλίνουσα (ἐν R) ἀκολουθία εἶναι φραγμένη », ἀρχίζομεν τήν ἀπόδειξιν λέγοντες: « Ἐστω (α_n) μία (τυχοῦσα) ἀκολουθία, ἥτις συγκλίνει (ἐν R) κ.λ.π. » .

11.11. Ἀπόδειξις προτάσεων τῆς μορφῆς: $(\exists x)p(x)$ καί $(\exists' x)p(x)$.

Διὰ νά ἀποδείξωμεν μίαν πρότασιν τῆς μορφῆς:

$$(\exists x)p(x)$$

ὅπου $p(x)$ εἶναι ἕνας προτασιακός τύπος, μιᾶς μεταβλητῆς x , ὡρισμένος ἐπὶ ἐνός συνόλου M , ἀρκεῖ, βάσει τοῦ κανόνος ὑπαρξιακῆς γενικεύσεως (§ 11.2,13), νά ἀποδείξωμεν ὅτι ὑπάρχει ἕν (τουλάχιστον) στοιχεῖον ξ τοῦ M , διὰ τό ὁποῖον ἡ $p(\xi)$ εἶναι ἀληθής.

Παράδειγμα (ἐκ τῆς Ἀναλύσεως). « Νά ἀποδειχθῇ ὅτι: ὑπάρχει ἀκολουθία τοῦ διαστήματος $(\sqrt{7}, +\infty)$, ἥτις ἀπειρίζεται θετικῶς ».

Ἀπόδειξις. Ἡ ἀκολουθία: $\alpha_n = \sqrt{7} + n$, $n = 1, 2, \dots$ εἶναι τοῦ διαστήματος $(\sqrt{7}, +\infty)$, δηλαδή ἰσχύει:

$$\alpha_n > \sqrt{7}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

καί ἀπειρίζεται θετικῶς, δηλ. $\alpha_n \rightarrow +\infty$.

— Ἡ ἀπόδειξις μιᾶς προτάσεως τῆς μορφῆς:

$$(\exists' x)p(x),$$

χωρίζεται εἰς δύο μέρη:

Πρῶτον μέρος (ὑπαρξις). Ἀποδεικνύομεν ὅτι ἡ πρότασις: $(\exists x)p(x)$ εἶναι ἀληθής, δηλαδή ὅτι ὑπάρχει μία τουλάχιστον τιμή y τοῦ x , διὰ τήν ὁποῖαν ἡ $p(y)$ εἶναι ἀληθής.

Δεύτερον μέρος (μοναδικότης). Ἀποδεικνύομεν ὅτι ἐάν ὑπάρχουν δύο τιμαί y καί z τοῦ x τοιαῦται, ὥστε αἱ $p(y)$ καί $p(z)$ νά εἶναι ἀληθεῖς, τότε: $y = z$. Ἦτοι, ἀποδεικνύομεν ὅτι:

$$(\forall y)(\forall z) [p(y) \wedge p(z) \Rightarrow y = z].$$

Π.χ. διὰ νά ἀποδείξωμεν εἰς τήν Ἀλγεβραν ὅτι: « Δοθέντος ἐνός θετικοῦ ἀριθμοῦ a ὑπάρχει ἕνας, καί μόνον ἕνας, θετικός ἀριθμός x τοιοῦτος, ὥστε νά ἰσχύῃ: $x^2 = a$ », ἀποδεικνύομεν κατ'ἀρχήν τήν ὑπαρξιν ἐνός τοιούτου ἀριθμοῦ x καί ἀκολουθῶς τήν μοναδικότητα αὐτοῦ.

11.12. Μέθοδος του αντιπαράδειγματος.

Διά νά αποδείξωμεν ὅτι μία πρότασις εἶναι ψευδής ἀρκεῖ, βεβαίως, νά αποδείξωμεν ὅτι ἡ ἀρνήσις τῆς προτάσεως αὐτῆς εἶναι ἀληθής. Οὕτω, διά νά αποδείξωμεν ὅτι μία πρότασις τῆς μορφῆς:

$$(\forall x)p(x) \quad (1)$$

εἶναι ψευδής, ἀρκεῖ νά αποδείξωμεν ὅτι ἡ ἀρνήσις αὐτῆς:

$$(\exists x)\overline{p(x)} \quad (\S 7.6)$$

εἶναι ἀληθής. Πρὸς τοῦτο δέ ἀρκεῖ νά εὕρωμεν μίαν τιμὴν ξ τοῦ x τοιαύτην, ὥστε ἡ $\overline{p(\xi)}$ νά εἶναι ἀληθής, ἥτοι ἡ $p(\xi)$ νά εἶναι ψευδής. Ἡ τιμὴ αὕτη ξ τοῦ x λέγεται καί ἐν **ἀντιπαράδειγμα** διά τὴν πρότασιν (1).

Π.χ. διά νά αποδείξωμεν εἰς τὴν "Ἀλγεβραν ὅτι ἡ πρότασις:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 \geq x)$$

εἶναι ψευδής, ἀρκεῖ νά εὕρωμεν ἐν ἀντιπαράδειγμα αὐτῆς. Ἐν τοιοῦτον ἀντιπαράδειγμα εἶναι π.χ. ἡ τιμὴ $\frac{1}{2}$ τοῦ x (διότι ἡ πρότασις $\frac{1}{4} \geq \frac{1}{2}$ εἶναι ψευδής).

11.13. Σημειώσεις.

Εἰς τὰ Μαθηματικά χρησιμοποιεῖται εἰς εἰδικὰς περιπτώσεις καί ἡ καλουμένη « μέθοδος τῆς τελείας ἐπαγωγῆς ». Περί τῆς μεθόδου αὐτῆς βλέπε: ΥΠΟΨΗΦΙΑΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΩΤΕΡΑ ΘΕΩΡΙΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ, Α.Κ. Κυριακοπούλου, § 1.7 (σελ.9).



Συμβολισμοί

Σελίδα

$=, \neq$	13
$\overline{\alpha\beta}, \in, \notin$	14
$\{ \}$	14
$\alpha, \gamma, p , \tau(p)$	16
$-, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$	17
$\forall$	20
$\Leftrightarrow_{\alpha\beta}$	24
$P(p, q, r, \dots)$	27
$\vdash, \sim\vdash$	31 (71)
$\downarrow$	37
$/$	38
$\equiv$	43
$\bullet\bullet$	70
$p(x), q(x), \dots$	96
$p(x, y), q(x, y), \dots$	96
$p(), p(,), \dots$	97
$\forall$	100
$\exists$	101
$P(x), P(x, y), \dots$	114

Βιβλιογραφία

1. Bittinger, M.: «Logic and proof».
2. Bochenski, J.: «A precis of Mathematical Logic».
3. Brown - Palas: «Basic Mathematical concepts» .
4. Cangelosi, V.: «Compound Statements and Mathematical Logic».
5. Carroll, L. : «Symbolic Logic and the game of Logic».
6. Christian, R.: «Introduction to Logic and Sets».
7. Copi, I. : «Symbolic Logic».
8. Dopp, J. : «Notions de Logique formelle» .
9. Dubishe, R. : «Lattices to Logic».
10. Exner - Rosskopf: «Logic in Elementary Mathematics».
11. Freudenthal, H. : «The language of Logic».
12. Harrison, F.: «Deductive Logic and descriptive language» .
13. Hasenjaeger, G.- Scholz, H.: «Grundzüge der mathematischen Logik».
14. Kilmister, C.: «Language Logic and Mathematics».
15. Kleene, S. : «Logique Mathématique».
16. Lightstone, A. : «The Axiomatic Method - An Introduction to Mathematical Logic».
17. Lorenzen, P.: «Einführung in die operative Logik und Mathematik».
18. Lyndon, R. : «Notes on Logic».
19. Manicas - Kruger : «Essentials of Logic».
20. Mendelson, E.: «Introduction to Mathematical Logic».
21. Novikov, P. : «Introduction à la logique mathématique».
22. Reichenbach, H.: «Elements of Symbolic Logic».
23. Robinson, G. : «An introduction to Mathematical Logic».
24. Rosenbloom, P.: «The elements of mathematical logic».
25. Stoll, R. : «Sets, Logic and Axiomatic Theories».
26. Suppes, P. : «Introduction to logic».
27. Tarski, A.: «Introduction to Logic and to the methodology of deductive sciences».
28. Thomas, N. : «Modern Logic».
29. Zehna, P. : «Sets with applications».
30. Zulauf, A. : «The Logical and Set - Theoretical foundations of Mathematics».

Περιεχόμενα

Πρόλογος δευτέρας έκδοσεως

Πρόλογος πρώτης έκδοσεως

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σελίς

0.1. Ἀντικείμενα. Γλῶσσα. Σύμβολα.....	7
0.2. Ἐκφράσεις. Προτάσεις.....	8
0.3. Μαθηματικά.....	9
0.4. Ἡ ἔννοια τοῦ ὀρισμοῦ. Ἀρχικοί καί ὀριζόμενοι ὅροι....	10
0.5. Ἡ ἔννοια τῆς ἀποδείξεως. Ἀξιώματα καί θεωρήματα.....	11
0.6. Ἀπλοποιήσεις τοῦ συμβολισμοῦ εἰς τὰ Μαθηματικά.....	13
0.7. Ἡ ἔννοια τῆς ἰσότητος εἰς τὰ Μαθηματικά.....	13
0.8. Γενικά περὶ τῆς ἐννοίας τοῦ συνόλου εἰς τὰ Μαθηματικά.	14
0.9. Ἡ ἔννοια τῆς μεταβλητῆς.....	14

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Κεφάλαιον 1

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ - ΛΟΓΙΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ

1.1. Ἡ ἔννοια τῆς προτάσεως εἰς τὴν Μαθηματικὴν Λογικὴν. Τι- μὴ ἀληθείας προτάσεως.....	16
1.2. Λογικαὶ πράξεις. Λογικοὶ σύνδεσμοι.....	17
1.3. Ἀρνήσεις. Διάζευξις. Σύζευξις. Συνεπαγωγή. Ἰσοδυναμία.	18
1.4. Ἀποκλειστικὴ διάζευξις. Ἀνακεφαλαίωσις τῶν λογικῶν πράξεων.....	20
1.5. Σύνθετοι καὶ ἀπλάϊ προτάσεις.....	21
1.6. Ἀπλουστέρα γραφὴ τῶν συνθέτων προτάσεων	22
1.7. Παρατηρήσεις.....	23
ΑΣΚΗΣΕΙΣ (1-15).....	24

Κεφάλαιον 2

ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΑΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ - ΤΑΥΤΟΛΟΓΙΑΙ

Σελίς

2.1.	Ἡ ἔννοια τῆς προτασιακῆς μεταβλητῆς.....	27
2.2.	Προτασιακαί παραστάσεις.....	27
2.3.	Πίνακες τιμῶν ἀληθείας.....	29
2.4.	Ταυτολογίαι καί αὐτοαντιφάσεις. Σχετικάί προτασιακαί παραστάσεις.....	30
2.5.	Οἱ σπουδαιότεροι νόμοι (ταυτολογίαι) τοῦ προτασιακοῦ λογισμοῦ.....	32
2.6.	Προτάσεις λογικῶς ἀληθεῖς καί λογικῶς ψευδεῖς. Λογικὴ συνεπαγωγή καί λογικὴ ἰσοδυναμία προτάσεων.....	34
2.7.	ΑΣΚΗΣΕΙΣ (16-30).....	35

Κεφάλαιον 3

ΜΟΡΦΩΣΙΣ ΤΑΥΤΟΛΟΓΙΩΝ - ΑΛΓΕΒΡΑ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

3.1.	Προκαταρκτικά.....	39
3.2.	Κανόνες ἀρνήσεως, διαζεύξεως καί συζεύξεως.....	39
3.3.	Κανόνες ἀποσπάσεως ἢ Modus ponens.....	40
3.4.	Κανὼν συνεπαγωγῆς.....	41
3.5.	Λογικὴ συνεπαγωγή παραστάσεων.....	42
3.6.	Κανὼν ἰσοδυναμίας.....	42
3.7.	Λογικῶς ἰσοδύναμοι παραστάσεις.....	43
3.8.	Κανὼν ἀντικαταστάσεως μεταβλητῶν ἢ κανὼν ἐφαρμογῆς....	44
3.9.	Ἐφαρμογαί.....	46
3.10.	Κανὼν ἀντικαταστάσεως.....	48
3.11.	Ὁ ρόλος τῆς σχέσεως $\equiv$ μεταξύ τῶν παραστάσεων. Ἄλγε - βρα τῶν παραστάσεων.....	48
3.12.	Νόμοι τῆς ἀλγεβρας τῶν παραστάσεων.....	49
3.13.	Παραδείγματα ἐφαρμογῆς τῶν νόμων τῆς ἀλγέβρας τῶν παραστάσεων.....	50
3.14.	Τύποι ἀντικαταστάσεως τῶν λογικῶν πράξεων.....	51
3.15.	Τύποι ἀρνήσεως τῶν λογικῶν πράξεων.....	52
	ΑΣΚΗΣΕΙΣ (31-49).....	53

Κεφάλαιον 4

ΚΑΝΟΝΙΚΑΙ ΜΟΡΦΑΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΣ

4.1.	Διαζευκτικά καί συζευκτικά παραστάσεις.....	56
4.2.	Ἐπεκτάσεις τῶν ἐπιμεριστικῶν νόμων.....	57

4.3. Ἐπέκτασις τῶν νόμων τοῦ de Morgan.....	57
4.4. Στοιχειώδεις διαζευκτικαί καί συζευκτικαί παραστάσεις	58
4.5. Κανονικαί διαζευκτικαί καί συζευκτικαί μοφαί παρα- στάσεως.....	59
4.6. Παραδείγματα ἐφαρμογῆς.....	60
4.7. Ἐλεγχος τοῦ εἴδους μιᾶς παραστάσεως διὰ τῶν κανονικῶν μορφῶν.....	61
4.8. Πλήρης κανονικὴ διαζευκτικὴ καί συζευκτικὴ μορφή πα- ραστάσεως.....	63
4.9. Εὗρεσις τῆς πλήρους κανονικῆς διαζευκτικῆς καί συζευ- κτικῆς μορφῆς παραστάσεως.....	64
4.10. Κριτήριον ἰσοδυναμίας δύο παραστάσεων.....	66
ΑΣΚΗΣΕΙΣ (50-55).....	68

Κεφάλαιον 5

ΔΙΑΛΟΓΙΣΜΟΙ

5.1. Ἐπιχείρημα. Διαλογισμός. Συλλογισμός.....	70
5.2. Ἡ ἔννοια τοῦ ἰσχυροῦ διαλογισμοῦ ἐπὶ παραστάσεων.....	70
5.3. Διαλογισμοί ἐπὶ παραστάσεων καί ταυτολογίαι.....	72
5.4. Στοιχειώδεις ἰσχυροί διαλογισμοί.....	73
5.5. Ἀμεσος ἀπόδειξις τῆς ἰσχυρότητος ἐνός διαλογισμοῦ ἐπὶ παραστάσεων. Κανόνες συμπεράσματος (διὰ τόν προτασια- κόν λογισμόν).....	74
5.6. Ἄλλοι κανόνες συμπεράσματος (διὰ τόν προτασιακόν логи- σμόν).....	76
5.7. Πίναξ κανόνων συμπεράσματος καί ἰσοδυναμιῶν χρησιμο- ποιουμένων εἰς τὰς παραγωγάς.....	77
5.8. Παραδείγματα.....	78
5.9. Ὑποθετικὴ ἀπόδειξις.....	79
5.10. Ἀντίφασις. Συμβιβασταί παραστάσεις.....	81
5.11. Ἐμμεσος ἀπόδειξις. Μέθοδος τῆς εἰς ἀτοπον ἀπαγωγῆς....	83
5.12. Εὗρεσις τοῦ εἴδους ἐνός διαλογισμοῦ διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀναλύσεως.....	85
5.13. Μορφή ἐνός διαλογισμοῦ ἐπὶ προτάσεων.....	87
5.14. Ἡ ἔννοια τοῦ ἰσχυροῦ διαλογισμοῦ ἐπὶ προτάσεων.....	88
ΑΣΚΗΣΕΙΣ (56-71).....	90

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Κεφάλαιον 6

ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΙ ΤΥΠΟΙ-ΠΟΣΟΔΕΙΚΤΑΙ

Σελίς

6.1. Προτασιακοί τύποι. Κατηγορήματα.....	96
6.2. Παρατηρήσεις.....	98
6.3. Ἀρχικοί καί σύνθετοι προτασιακοί τύποι.....	99
6.4. Ποσοδεΐκται.....	100
6.5. Ποσοδεΐκται καί προτασιακοί τύποι δύο ἢ περισσοτέρων μεταβλητῶν.....	102
6.6. Παρατηρήσεις.....	104
6.7. Ἀκτίς ἐνός ποσοδεΐκτου. Δεσμευμένοι καί ἐλεύθεροι με - ταβληταί.....	104
6.8. Παραδείγματα συμβολικῆς παραστάσεως προτάσεων τῇ βοή - θεία καί τῶν ποσοδεϊκτικῶν.....	106
ΑΣΚΗΣΕΙΣ (72-82).....	110

Κεφάλαιον 7

ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΩΝ ΤΥΠΩΝ - ΕΠΕΚΤΑΣΙΣ ΤΗΣ
ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΤΑΥΤΟΛΟΓΙΑΣ - ΠΟΣΟΔΕΙΚΤΙΚΟΙ ΝΟΜΟΙ

7.1. Παραστάσεις προτασιακῶν τύπων.....	113
7.2. Πεδίον. Ἐπέκτασις τῆς ἐννοίας τῆς ταυτολογίας.....	115
7.3. Μόρφωσις ταυτολογικῶν εἰς τόν κατηγορικόν λογισμόν. Λο - γική συνεπαγωγή καί λογική ἰσοδυναμία τύπων.....	118
7.4. Ποσοδεϊκτικοί νόμοι ἀρνήσεως.....	123
7.5. Ἄλλοι ποσοδεϊκτικοί νόμοι.....	125
7.6. Συγκεντρωτικὸς πίναξ τῶν ποσοδεϊκτικῶν νόμων τῶν δύο προηγουμένων παραγράφων.....	132
ΑΣΚΗΣΕΙΣ (83-97).....	133

Κεφάλαιον 8

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΛΟΓΙΣΜΟΥ ΕΙΣ
ΤΟΝ ΚΑΤΗΓΟΡΙΚΟΝ ΛΟΓΙΣΜΟΝ

8.1. Ἡ ἐννοία τοῦ διαλογισμοῦ εἰς τόν κατηγορικόν λογισμόν.	135
8.2. Ἡ ἐννοία τοῦ ἰσχυροῦ διαλογισμοῦ εἰς τόν κατηγορικόν λογισμόν.....	135

8.3. 'Απόδειξεις τής ισχυρότητας ενός διαλογισμού (εἰς τόν κατηγορικόν λογισμόν). Ποσοδεικτικοί κανόνες συμπεράσματος.....	138
8.4. Δύο ἄλλοι ποσοδεικτικοί κανόνες συμπεράσματος.....	140
8.5. 'Εφαρμογαί.....	141
ΑΣΚΗΣΕΙΣ (98 - 107)	143

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟΝ

ΠΡΟΣΘΗΚΑΙ

Κεφάλαιον 9

ΕΥΡΕΣΙΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΣ ΕΚ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΟΣ ΤΙΜΩΝ ΑΛΗΘΕΙΑΣ

9.1. Εὔρεσις παραστάσεως ἐκ τοῦ πίνακος τιμῶν ἀληθείας....	147
9.2. Μιά ἐνδιαφέρουσα ἐφαρμογή.....	149
ΑΣΚΗΣΕΙΣ (108-112)	150

Κεφάλαιον 10

ΑΛΓΕΒΡΑ ΔΙΑΚΟΠΤΩΝ

10.1. Προκαταρκτικά.....	152
10.2. Διακόπται ἐνός κυκλώματος καί προτασιακαί μεταβληταί	152
10.3. Προτασιακή παράστασις κυκλώματος. Εἶδη κυκλωμάτων...	153
10.4. Κυκλώματα λογικῶς ἰσοδύναμα.....	157
10.5. Κύκλωμα προτασιακῆς παραστάσεως.....	157
10.6. 'Ενδιαφέρουσα παρατήρησις.....	159
10.7. 'Απλοποιήσις κυκλώματος.....	161
10.8. Κατασκευή κυκλώματος μέ δεδομένας ἰδιότητος.....	162
ΑΣΚΗΣΕΙΣ (113-125)	164

Κεφάλαιον 11

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΣ ΕΙΣ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

11.1. Προκαταρκτικά.....	169
11.2. Οἱ σπουδαιότεροι κανόνες συμπεράσματος.....	170

Μέθοδοι ἀποδείξεως εἰς τὰ Μαθηματικά

11.3. 'Απόδειξις διὰ συνεπαγωγῶν.....	172
11.4. Περίπτωσις ὑποθετικῶν καί διὑποθετικῶν προτάσεων....	174
11.5. Μέθοδος τής ἀντιστροφoαντιθέτου προτάσεως.....	175

11.6.	Μέθοδος τῶν δυνατῶν περιπτώσεων.....	175
11.7.	Μέθοδος τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.....	177
11.8.	Μέθοδος τῆς ἀπαλειφῆς.....	177
11.9.	Ἀπόδειξις προτάσεων τῆς μορφῆς: $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	178
11.10.	Ἀπόδειξις προτάσεων τῆς μορφῆς: $(\forall x)p(x)$	178
11.11.	Ἀπόδειξις προτάσεων τῆς μορφῆς: $(\exists x)p(x)$ καί $(\exists'x)p(x)$	179
11.12.	Μέθοδος τοῦ ἀντιπαραδείγματος.....	180
11.13.	Σημείωσις.....	180
	Συμβολισμοί.....	181
	Βιβλιογραφία.....	183



- 1. ΥΠΟΨΗΦΙΑΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΩΤΕΡΑ ΘΕΩΡΙΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ, τόμος 1**
- 2. ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ**
- 3. ΥΠΟΨΗΦΙΑΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΩΤΕΡΑ ΘΕΩΡΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ, τόμος 1**
- 4. ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ**
- 5. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ (δευτέρα έκδοσις)**
- 6. ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ**
- 7. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ, τεύχος πρώτον (έξηντλήθη)**
- 8. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ (έξηντλήθη)**
- 9. ΑΛΓΕΒΡΑ ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ (Πλήρης θεωρία, 200 ασκήσεις λυμένες και 260 για λύση)**