



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ
& ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό– Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
“ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ”

Δημήτριος Π. Γιαννόπουλος

**«Το νόημα και η σημασία των συμβόλων στα Μαθηματικά.
Ιστορική εξέλιξη και σύγχρονη διδακτική πρακτική»**

Διπλωματική εργασία

Επιβλέπων:

Αναπλ. Καθηγητής Ευστάθιος Γιαννακούλιας

Αθήνα 2007

Η παρούσα διπλωματική εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

“ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ”

Εγκρίθηκε την 30-4-2007 από Εξεταστική Επιτροπή, αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Γιαννακούλια Ευστάθιο (Επιβλέπων Καθηγητής)	Αναπλ. Καθηγητής	
2) Ζαχαριάδη Θεοδόσιο	Αναπλ. Καθηγητής	
3) Λάππα Διονύσιο	Αναπλ. Καθηγητής	

*ἐμπειρία μὲν ποιεῖ τὸν αἰῶνα ἡμῶν
πορεύεσθαι κατὰ τέχνην,
ἀπειρία δὲ κατὰ τύχην.*

Πλάτωνας

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε το χειμώνα του 2006 στα πλαίσια του Διαπανεπιστημιακού – Διατμηματικού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στη «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών». Επιβλέπων ήταν ο Αναπλ. Καθηγητής Ευστάθιος Γιαννακούλιας, ενώ την τριμελή συμβουλευτική επιτροπή συμπλήρωναν ο Αναπλ. Καθηγητής Θεοδόσιος Ζαχαριάδης και ο Αναπλ. Καθηγητής Διονύσιος Λάμπας.

Μετά την ολοκλήρωση της, επιθυμώ να ευχαριστήσω ιδιαίτερα:

Τον Αναπληρωτή Καθηγητή Ευστάθιο Γιαννακούλια, για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε, καθώς επίσης και για την πολύτιμη βοήθεια και την αποτελεσματική καθοδήγηση που μου προσέφερε, κατά τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας αυτής.

Τους Αναπληρωτές Καθηγητές Θεοδόσιο Ζαχαριάδη και Διονύσιο Λάμπα για το ενδιαφέρον τους και τις χρήσιμες κατευθύνσεις που μου παρείχαν.

Τους γονείς μου και τη σύζυγό μου για την ηθική υποστήριξη και κατανόηση που έδειξαν σε όλη τη διάρκεια του μεταπτυχιακού προγράμματος.

Την αδερφή μου Ιωάννα, για την αμέριστη βοήθεια που μου παρείχε στη διαδικασία συγγραφής και διαμόρφωσης της εργασίας αυτής.

ΓΙΑΝΝΟΠΟΥΛΟΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ, Απρίλιος 2007

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό
Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Διπλωματική εργασία με θέμα:

«Το νόημα και η σημασία των συμβόλων στα Μαθηματικά.

Ιστορική εξέλιξη και σύγχρονη διδακτική πρακτική»

Περίληψη

Αντικείμενο της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας αποτελεί η μελέτη της εξέλιξης του μαθηματικού συμβολισμού και η επίδραση της ευρείας χρήσης του στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης.

Πιο συγκεκριμένα, στην παρούσα εργασία παρουσιάζονται ιστορικά στοιχεία που αφορούν στην εξέλιξη συγκεκριμένων μαθηματικών συμβόλων, καθώς επίσης και στη συμβολή τους στην ανάπτυξη τμημάτων της Επιστήμης των Μαθηματικών. Ιδιαίτερη αναφορά γίνεται στον καθοριστικό ρόλο του συμβολικού συστήματος παράστασης των εννοιών στην ανάπτυξη του Εγγράμματος Λογισμού και του Απειροστικού Λογισμού.

Αναφέρονται επίσης και αξιολογούνται στοιχεία ερευνητικών μελετών σχετικά με το ρόλο των συμβόλων στη μαθηματική εκπαίδευση. Επιπλέον, παρουσιάζονται οι κύριες θέσεις ερμηνευτικών θεωριών μάθησης, σχετικά με τις συνιστώσες των συμβόλων έννοια και διαδικασία, εστιάζοντας στα σημεία που αναλύουν τη σημασία της κατανόησης της διττής μορφής των συμβόλων στη μαθησιακή διαδικασία και τη γνωστική ανάπτυξη στα Μαθηματικά.

Περιεχόμενα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	1
1 ΓΛΩΣΣΑ ΚΑΙ ΣΥΜΒΟΛΑ ΩΣ ΜΕΣΑ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΣ.....	4
1.1 Γενικές ψυχολογικές αρχές.....	4
1.2 Απόψεις και θέσεις για νόημα και ερμηνεία.....	9
2 ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΥΜΒΟΛΑ– ΜΙΑ ΝΕΑ ΔΟΜΗ.....	13
2.1 Αρχική πορεία-τα πρώτα ενοποιητικά βήματα	13
2.2 Η βασική εξέλιξη - θεμελίωση.....	17
2.3 Κύρια χαρακτηριστικά και σχέσεις	22
2.4 Συνεισφορά των συμβόλων στη μαθηματική σκέψη.....	27
3 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΠΟΡΕΙΑ ΕΞΕΛΙΞΗΣ ΚΑΙ ΧΡΗΣΗΣ.....	33
3.1 Το σύστημα των αριθμών	33
3.2 Σύμβολα στη Γεωμετρία και Άλγεβρα	48
3.2.1 Σύμβολα στη Γεωμετρία.....	48
3.2.2 Σύμβολα στην Άλγεβρα	54
3.3 Το μεγάλο άλμα των εγγράμματος λογισμού	72
3.4 Η εξέλιξη των συμβόλων στον Απειροστικό Λογισμό.....	87
3.5 Η εμφάνιση και εξέλιξη ειδικών μαθηματικών συμβόλων.....	97
3.5.1 Οι Αρνητικοί αριθμοί.....	97
3.5.2 Οι Μιγαδικοί αριθμοί	99
3.5.3 Η Συνάρτηση	101
3.5.4 Τριγωνομετρικές και υπερβολικές συναρτήσεις.....	103
3.5.5 Το σύμβολο της ορίζουσας	105
4 Ο ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΣΥΜΒΟΛΩΝ ΣΤΗ ΜΑΘΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ...	109
4.1 Διαμεσολαβητικός ρόλος στη μάθηση	110
4.2 Σύγχρονες θεωρίες διδακτικών προσεγγίσεων.....	112
4.3 Ο ρόλος των συμβόλων στη μαθησιακή διαδικασία	119
4.4 Στοιχεία ιστορίας για τη διδασκαλία και τη μάθηση	127
5 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	130
6 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	133

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σε όλη την πορεία της ανθρωπότητας, η παρουσία των συμβόλων στις διαδικασίες της επικοινωνίας είναι κάτι παραπάνω από φανερό. Με πολλούς και διαφορετικούς τρόπους η απόδοση νοήματος σε σύμβολα, εμφανίζεται σε όλες τις ανθρώπινες δραστηριότητες. Η επικοινωνία, η γλώσσα, η θρησκεία, η λατρεία θεών και όντων, η εικονιστική αναπαράσταση, η τέχνη, ο μυστικισμός, ο αποκρυφισμός, η επιστήμη και η τεχνολογία είναι μερικοί μόνο από τους τομείς εμφάνισης και χρήσης συμβόλων, στους οποίους η δύναμη και το νόημα τους έχει καθοριστική συμβολή για την εξέλιξη της ανθρώπινης σκέψης και γνώσης.

Στη σύγχρονη πραγματικότητα καθημερινά εμφανίζεται ένα πλήθος συμβόλων σε όλες τις μορφές των ανθρώπινων ενεργειών. Η επιβολή του νοήματος μέσω της χρήσης κατάλληλων συμβόλων, είναι ένα καθημερινό φαινόμενο στη ζωή του σύγχρονου ανθρώπου. Η απλή, αλλά όχι αθώα παρουσία της μάρκας ενός προϊόντος στα καταστήματα ή στα διαφημιστικά ταμπλό, τα σήματα των αυτοκινήτων, των εταιρειών και τα οδικά σήματα είναι μερικά απλά παραδείγματα όπου το σύμβολο παίζει καθοριστικό ρόλο για την προσδοκώμενη συμπεριφορά του ανθρώπου. Στις μέρες μας, ειδικοί επιστήμονες εργάζονται συστηματικά για την αποδοτικότερη χρήση των συμβόλων σε όλους τους τομείς, αναλύοντας χαρακτηριστικά τους όπως το σχήμα, το χρώμα, το μέγεθος και άλλα.

Στα μαθηματικά και στις επιστήμες, η χρήση των συμβόλων πέρα από την πρακτική πλευρά της συντομογραφίας, έχει τη δύναμη να αναπτύσσει τη διαίσθηση και την εποπτεία και να εκμεταλλεύεται τη λειτουργικότητα για τη δημιουργία σύντομων και αποτελεσματικών διαδικασιών. Οι σύνθετοι συλλογισμοί για ορισμένα ποσοτικά χαρακτηριστικά χωρίς τη χρήση τυπικού συμβολιστικού συστήματος έχουν πολύ αυστηρά όρια στην αποδοτικότητά τους κάτι που γίνεται φανερό από προβλήματα των πρώτων τάξεων της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, ιδιαίτερα στα μαθηματικά.

Η εισαγωγή και ο χειρισμός των συμβόλων για τις έννοιες και τις διαδικασίες που συνδέονται με αυτά, αποτελεί ιστορικά ένα τεράστιο επίτευγμα της μαθηματικής σκέψης, κρίσιμο για την εξέλιξη της γνώσης των μαθηματικών κατά τους περασμένους αιώνες. Αποτελεί παράλληλα και ένα πρωταρχικό παράγοντα

αποτελεσματικότητας για τη σύγχρονη μαθηματική εκπαίδευση. Η ανταμοιβή από τη σήμανση μιας έννοιας ή μίας διαδικασίας με ακρίβεια, σαφήνεια και συντομία με τη χρήση των συμβόλων, όπως την παρουσιάζει ο Alfred North Whitehead είναι «να ανακουφίζει τον εγκέφαλο από κάθε εργασία που δεν είναι αναγκαία. Ένας καλός συμβολισμός τον απελευθερώνει, ώστε να συγκεντρωθεί σε πιο προχωρημένα προβλήματα και, στην πραγματικότητα, αυξάνει τη νοητική δύναμη του ανθρώπου» (Davis & Hersh, 1981, σελ. 134).

Η παρούσα εργασία, σκοπό έχει να παρουσιάσει στοιχεία από την ιστορική πλευρά και την παιδαγωγική πρακτική του μαθηματικού συμβολισμού και να αναδείξει τη δύναμη που κρύβουν τα σύμβολα στα μαθηματικά, σε τομείς όπως η εξέλιξη των ίδιων των μαθηματικών, η χρήση και η διδασκαλία τους. Η δύναμη αυτή εμφανίζεται κυρίως στη σχέση που συνδέει το σύμβολο με το νόημα που περιέχει, την έννοια που αναπαριστά και τη διαδικασία την οποία «υπηρετεί» προσδίδοντάς της λειτουργικότητα και αποτελεσματικότητα. Η ιστορική πορεία προς την καθιέρωση του συμβόλου μας αποκαλύπτει τις ανάγκες, τις διεργασίες και τις αναζητήσεις για τη δημιουργία του, τα στάδια της εξέλιξης και την τελική μορφή του, ώστε αυτό να λειτουργεί αποτελεσματικά σε ένα τυπικό περιβάλλον με προκαθορισμένους κανόνες. Η παιδαγωγική πρακτική αναδεικνύει τον κεντρικό ρόλο του συμβόλου, για την επικοινωνία στις μαθηματικές συζητήσεις, καθώς και την καθοριστική συμβολή του στην εννοιολογική μάθηση και τη μαθηματική σκέψη.

Στο 1^ο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας παρουσιάζονται σε συντομία στοιχεία ψυχολογίας για την επικοινωνία, την αντίληψη και τις γλώσσες. Παρουσιάζονται επίσης φιλοσοφικές πεποιθήσεις για τα συμβολικά συστήματα, οι οποίες αναφέρονται στις σχέσεις που αναπτύσσονται στο τριμερές σημασιολογικό σχήμα *σημαίνον*, *σημαινόμενο* και *πράγμα*, μία διάκριση η οποία οφείλεται στους Στωικούς και διατηρήθηκε με παραλλαγές και από τους νεότερους φιλοσόφους (Χριστοδουλίδης, 1993).

Στο 2^ο κεφάλαιο αναφέρονται στοιχεία από τη συνεισφορά των συμβόλων στη μαθηματική σκέψη στο πέρασμα των αιώνων, και την εμπλοκή τους στη μαθηματική λογική και τη φιλοσοφία των μαθηματικών, με σκοπό τη αυστηρή θεμελίωση των μαθηματικών.

Στο 3^ο κεφάλαιο γίνεται παρουσίαση διαφόρων συμβόλων με αντιπροσωπευτικά ιστορικά στοιχεία για την εμφάνιση, δημιουργία και καθιέρωση αυτών στα μαθηματικά. Πιο συγκεκριμένα γίνεται αναφορά στα σύμβολα των διαφόρων αριθμητικών συστημάτων, τα πιο γνωστά σύμβολα της γεωμετρίας και της άλγεβρας, το μεγάλο άλμα της άλγεβρας μέσω του εγγράμματος λογισμού, καθώς και τη σημαντική συμβολή του συμβολισμού στην ανάπτυξη του διαφορικού λογισμού. Πολλά παραδείγματα ισχυροποιούν την άποψη ότι η εύκολη χρήση και κατανόηση των μαθηματικών εννοιών εξαρτάται ως ένα βαθμό από τον συμβολισμό τους. Φαίνεται λοιπόν, τα σύμβολα να εξυπηρετούν τον σκοπό για τον οποίο δημιουργήθηκαν ή καλύτερα, τα σύμβολα αναφύονται και επιβάλλονται ως μία αναγκαιότητα για την ανάπτυξη της ανθρώπινης γνώσης στη διάρκεια των αιώνων.

Στο 4^ο κεφαλαίο γίνεται αναφορά σε τομείς της σύγχρονης εκπαιδευτικής έρευνας, οι οποίοι εστιάζουν το ενδιαφέρον τους στη σημασία του συμβόλου κατά τη διαδικασία της διδασκαλίας και της μάθησης των μαθηματικών. Συγκεκριμένοι ερευνητές, ασχολούνται με τη δομή και τη διαδικασία απόδοσης νοήματος στα σύμβολα, ερευνούν τις δυσκολίες και τον τρόπο όπου, εκπαιδευτικοί και μαθητές παρουσιάζουν και αφομοιώνουν τα σύμβολα, τις έννοιες και τις διαδικασίες που συνδέονται με αυτά. Και αυτό, γιατί συχνά μία καινούρια γλώσσα συμβόλων, όπως αυτή που εισάγεται στα μαθηματικά από τα πρώτα χρόνια της εκπαιδευτικής διαδικασίας, λειτουργεί περισσότερο σε επίπεδο μίμησης και λιγότερο σε επίπεδο κατανόησης. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα που χρησιμοποιεί ο R.Davis και αναφέρει ο Hughes, (1996, σελ.76), παρομοιάζοντας τον χειρισμό της γλώσσας των συμβόλων με το να τραγουδά κάποιος ένα ξένο τραγούδι, χωρίς να καταλαβαίνει τη γλώσσα που είναι γραμμένο και κατ' επέκταση τι λέει το τραγούδι αυτό, επισημαίνοντας: *«Είναι πολύ διαφορετική μία πετυχημένη μίμηση από μία θεμελιωμένη κατανόηση»*.

1 ΓΛΩΣΣΑ ΚΑΙ ΣΥΜΒΟΛΑ ΩΣ ΜΕΣΑ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΣ

Η δημιουργία ενός κώδικα επικοινωνίας απαιτεί τη χρήση και την απόδοση νοήματος σε συγκεκριμένη συμβολική αναπαράσταση. Είναι προφανές ότι για μία πετυχημένη επικοινωνία είναι αναγκαίο το νόημα που αποδίδεται από τον «πομπό» σε ένα σύμβολο ή σύμπλεγμα συμβόλων, να ταυτίζεται με το νόημα το οποίο γίνεται αντιληπτό από το «δέκτη». Ένα πλήθος κοινώς αποδεκτών κανόνων υποστηρίζει, τόσο τη σύνταξη, όσο και την ερμηνεία των εκφράσεων σε μία τέτοια διαδικασία. Η πολυπλοκότητα του ίδιου του κώδικα και των κανόνων του, καθώς και η δυναμική που αποκτά από την ανθρώπινη χρήση, απαιτεί ιδιαίτερους χειρισμούς των συμβόλων προκειμένου ο κώδικας να επιτελεί το σκοπό για τον οποίο δημιουργήθηκε, δηλαδή να δέχονται οι χρήστες το νόημα το οποίο προσδίδεται στην αναπαράσταση. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι ο κώδικας οδικής κυκλοφορίας, ένας κώδικας ο οποίος είναι κοινός για όλους τους ανθρώπους-οδηγούς ενός κράτους ανεξάρτητα από κλίση, μόρφωση, ειδίκευση κλπ. και για τον οποίο παρατηρούνται διαφορετικά επίπεδα κατανόησης των μηνυμάτων ενός σήματος ανάμεσα σε οδηγούς διαφορετικών κρατών, διαφορετικών ηλικιών κλπ (Shinart et al, 2003).

Η ερμηνεία ενός σήματος ή του νοήματος που περιέχει ένα σύμβολο, δεν είναι μία απλή υπόθεση. Όπως παρατηρεί ο Russell στην εισαγωγή του βιβλίου *Tractatus Logico Philosophicus* (Wittgenstein, 1978), στη σύγχρονη εποχή λογική και ψυχολογία αντιμετωπίζουν με διαφορετικό τρόπο τις εκφράσεις και τα γεγονότα. Αυτό που ενδιαφέρει τη λογική είναι ουσιαστικά το κοινό στοιχείο που έχουν όλα τα γεγονότα, το οποίο καθιστά ικανό τον άνθρωπο να εννοεί, το γεγονός που ισχυρίζεται η έκφραση. Την ψυχολογία φαίνεται να την ενδιαφέρουν πολύ περισσότερα, γιατί ένα σύμβολο δεν σημαίνει αυτό που συμβολίζει χάρη σε μία λογική σχέση και σύμβαση, αλλά χάρη σε μία ψυχολογική σχέση, είτε αυτή είναι πρόθεση, είτε συνειρμός, είτε οτιδήποτε άλλο.

1.1 Γενικές ψυχολογικές αρχές

Είναι φανερό ότι τα τελευταία χρόνια τα μέσα μαζικής επικοινωνίας έχουν την κυριαρχία στον τομέα της επικοινωνίας και είναι υπεύθυνα όχι μόνο για τη διάδοση αλλά και για την ουσιαστική διαμόρφωση της πληροφορίας. Στη σύγχρονη κοινωνία

της τεχνολογίας, της ταχύτητας και του θεάματος, η εικόνα αποκτά πρωταρχική σημασία στη μεταφορά νοημάτων, στη δημιουργία σημάτων – μηνυμάτων παραγκωνίζοντας σε ένα βαθμό το λόγο και τις ιδέες. Η βιομηχανία της κατανάλωσης έχοντας ως σκοπό την εμπορευματοποίηση των ανθρωπίνων δραστηριοτήτων, χρησιμοποιεί ελκυστικές εικόνες, συγκεκριμένα πρότυπα συμπεριφοράς και ισχυρά σύμβολα, καθιστώντας τις ιδέες και την ουσιαστική επικοινωνία δευτερεύοντα. Οι λεπτομέρειες των ψυχολογικών θεωριών για την επιλογή ιδιαίτερων στρατηγικών (χρώμα, μέγεθος, ήχος, συνειρμός κλπ.) που συμβάλουν στη μεταφορά μηνυμάτων και στην επιβολή συγκεκριμένου νοήματος, ξεφεύγουν από το σκοπό αυτής της εργασίας. Παρακάτω αναφέρονται ορισμένες γενικές αρχές της αντίληψης των σημάτων - ερεθισμάτων, και της επεξεργασία τους από τον άνθρωπο με σκοπό την επικοινωνία, αναλύοντας θεμελιώδη στοιχεία για τη χρήση της γλώσσας.

Στα πλαίσια της γνωστικής ψυχολογίας ο νους θεωρείται ότι είναι ένα γενικό σύστημα επεξεργασίας συμβόλων με κάποιους δομικούς περιορισμούς, που οφείλονται στο νευρολογικό υπόστρωμα. Αυτό το σύστημα επεξεργασίας πληροφοριών λαμβάνει πληροφορίες, αναπαριστά τις πληροφορίες με σύμβολα και στη συνέχεια επεξεργάζεται αυτές τις αναπαραστάσεις. Οι πληροφορίες γίνονται αντιληπτές με τη χρήση των πέντε βασικών αισθήσεων και ερμηνεύονται για να σχηματίσουν αντικείμενα, γεγονότα, εικόνες, ήχους, προτάσεις κλπ. μέσω της διαδικασίας της αντίληψης.

Οι διαδικασίες που εμπλέκονται στη χρήση των αισθητηριακών συστημάτων έχουν ορισμένα κοινά χαρακτηριστικά. Πρώτα απ' όλα ένα ερέθισμα επηρεάζει τον αισθητήριο υποδοχέα που είναι σχεδιασμένος να το διακρίνει. Οι αλλαγές ενέργειας που παράγονται από το ερέθισμα στον υποδοχέα μετατρέπονται σε νευρικές ώσεις. Οι ώσεις αυτές, προσλαμβάνουν τις πληροφορίες του ερεθίσματος και στη συνέχεια μεταφέρονται σε υψηλότερα επίπεδα του κεντρικού νευρικού συστήματος όπου συνδυάζονται με σχετικές γνώσεις που είναι αποθηκευμένες στη μακροχρόνια μνήμη για να αποκτήσουμε συνείδηση του αρχικού ερεθίσματος (Βοσνιάδου, 2001).

Η αντίληψη ενός σήματος φαίνεται να είναι μία πολύπλοκη διαδικασία ερμηνείας και συνδυασμού προϋπαρχόντων στοιχείων. Μία θεωρία για την ερμηνεία των δεδομένων των αισθήσεων και της εμπειρίας, αναπτύχθηκε ως ψυχολογία της μορφής (ψυχολογία Gestalt), σύμφωνα με την οποία αντιλαμβανόμαστε τα

αντικείμενα ως ένα καλά οργανωμένο σχηματισμό ή ως μία ολότητα με βάση συγκεκριμένες οργανωτικές δομές και όχι ως ένα άθροισμα μεμονωμένων μερών. Με βάση τη θεωρία αυτή οι αρχές της αντιληπτικής οργάνωσης είναι, η σχέση μορφής - φόντου και η ομαδοποίηση, οι οποίες χρησιμοποιούνται ακόμα και σήμερα στην περιγραφή του τρόπου με τον οποίο οργανώνουμε τις αντιλήψεις μας σχετικά με τον κόσμο γύρω μας. Συνεπώς, δεν αντιλαμβανόμαστε τα αντικείμενα σαν άθροιση μεμονωμένων ερεθισμάτων, αλλά περισσότερο σαν στοιχεία ενός οργανωμένου συνόλου, στοιχεία μία συνολικής ενοποιημένης δομής καθώς και τις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις (Καλαβάσης, 2000). Δηλαδή, ένα ισόπλευρο τρίγωνο είναι κάτι περισσότερο από τρεις γραμμές που είναι τοποθετημένες μαζί. Σύμφωνα με τους ψυχολόγους της μορφής, η διαδικασία απόκτησης γνώσεων αποτελείται από σχηματοποιήσεις των ερεθισμάτων σε σύνολα και την αναδιοργάνωσή τους από ένα σύνολο σε ένα άλλο κατά τη διάρκεια της μάθησης. Η σύγχρονη έρευνα στην ψυχολογία της ανάπτυξης έχει δείξει ότι η σχηματοποίηση μπορεί να είναι πράγματι μέρος ορισμένων εγγενών χαρακτηριστικών (Βοσνιάδου, 2001).

Στον τομέα της αντίληψης και της επεξεργασία χαρακτηριστικών στοιχείων, κάποιες θεωρίες δίνουν ιδιαίτερη έμφαση στην επεξεργασία που ξεκινά από το ερέθισμα και η οποία είναι γνωστή ως επεξεργασία από τα κάτω προς τα επάνω (bottom-up). Μια τέτοιου είδους διαδικασία εμπλέκεται αναμφίβολα στην αναγνώριση αντικειμένων. Σχετικές έρευνες έχουν δείξει ότι υπάρχουν συγκεκριμένα κύτταρα στον εγκέφαλο που έχουν εξοικειωθεί στην αναγνώριση συγκεκριμένων χαρακτηριστικών στοιχείων (όπως π.χ. κάθετες ή διαγώνιες γραμμές) και τα οποία μπορούν να συμβάλλουν στην αναγνώριση γραμμμάτων ή φυσικών αντικειμένων. Παράλληλα, η αναγνώριση ενός αντικειμένου είναι μια πολύπλοκη διαδικασία, η οποία επηρεάζεται και από άλλους παράγοντες, όπως κίνητρα, προϋπάρχουσες γνώσεις, προκαταλήψεις και το γενικότερο πλαίσιο μέσα στο οποίο γίνεται αντιληπτό κάποιο ερέθισμα. Οι διαδικασίες μέσω των οποίων αυτοί οι παράγοντες επηρεάζουν την αναγνώριση αντικειμένων, είναι γνωστές ως διαδικασίες από τα επάνω προς τα κάτω (top - down). Οι διαδικασίες από τα επάνω προς τα κάτω είναι υπεύθυνες για το γεγονός ότι μπορούμε και αναγνωρίζουμε μια λέξη παρόλο που τα γράμματα δεν είναι όλα ευδιάκριτα. Οι επιδράσεις του πλαισίου αναφοράς είναι ιδιαίτερα εντυπωσιακές όταν το ερέθισμα-αντικείμενο είναι αμφίσημο, δηλαδή μπορεί να γίνει αντιληπτό με περισσότερους από έναν τρόπους (Βοσνιάδου, 2001).

Καθοριστικό ρόλο στην αναγνώριση και την αντίληψη ενός σήματος παίζει η προϋπάρχουσα γνώση. Το ζήτημα της οργάνωσης και αναπαράστασης των γνώσεων είναι ακανθώδες και οι γνωστικοί ψυχολόγοι έχουν πειραματιστεί με διάφορες εκδοχές προκειμένου να βρεθεί ένας τρόπος που θα περιγράφει τα ποικίλα φαινόμενα που χαρακτηρίζουν την ανθρώπινη νόηση. Υπάρχουν διάφορες θεωρίες και απόψεις για τις έννοιες, την οργάνωση τους σε εννοιολογικές δομές και την αναπαράσταση τους στον ανθρώπινο νου. Η πιο διαδεδομένη πρόταση σχετικά με τη φύση των εννοιών, είναι γνωστή ως «κλασική» και βασίζεται στις θεωρητικές θέσεις του G. Frege. Η κλασική θεωρία περιγράφει τις έννοιες ως ένα σύνολο αναγκαίων και επαρκών καθοριστικών γνωρισμάτων, που ορίζουν σαφώς ποιες περιπτώσεις ανήκουν σε μια δεδομένη εννοιολογική κατηγορία και ποιες όχι. Ωστόσο, η κλασική θεωρία για τις έννοιες έχει αμφισβητηθεί και από το χώρο της φιλοσοφίας και από τις έρευνες των ψυχολόγων (Βοσνιάδου, 2001).

Για τον τρόπο με τον οποίο οι έννοιες οργανώνονται στην ανθρώπινη μνήμη, παρουσιάζονται διάφορες θεωρίες με επικρατέστερες αυτές των σημασιολογικών δικτύων, των σχημάτων και των παράλληλα κατανεμημένων διαδικαστικών δικτύων. Οι περισσότερες θεωρίες συλλαμβάνουν τη μνήμη σαν μία λειτουργία που αποτελείται από τρία στάδια: την κωδικοποίηση, την αποθήκευση και την ανάσυρση. Παράλληλα, αρκετές θεωρίες προσπαθούν να δώσουν απάντηση στην πολύπλοκη διαδικασία του ανθρώπινου νου τη σκέψη, πώς δηλαδή οργανώνονται οι γνώσεις και πώς οι άνθρωποι χρησιμοποιούν τις γνώσεις για να συλλογιστούν και να λύσουν προβλήματα. Οι ψυχολόγοι υποθέτουν ότι τα στοιχεία από τα οποία αποτελείται η σκέψη, είναι έννοιες οι οποίες είναι οργανωμένες σε εννοιολογικές δομές και μπορούν να πάρουν διάφορες μορφές αναπαράστασης. Η κατανόηση της σχέσης ανάμεσα στους κανόνες λογικής ακολουθίας και στην ανθρώπινη σκέψη, αποτελεί σημαντικό πρόβλημα για την επιστήμη της ψυχολογίας. Η μελέτη της συλλογιστικής σκέψης έχει δείξει ότι οι άνθρωποι δεν συλλογίζονται όπως μία λογική μηχανή, δηλαδή εκτελώντας απλώς κανόνες λογικής ακολουθίας, αλλά επηρεάζονται από εσωτερικούς και εξωτερικούς παράγοντες.

Η εκφορά των σκέψεων γίνεται με τον λόγο, γραπτό ή προφορικό, ο οποίος είναι ένα πολύπλοκο συμβολικό σύστημα που πρωταρχικό σκοπό έχει, να κάνει δυνατή την επικοινωνία ανάμεσα σε ανθρώπους. Ο σκοπός αυτός επιτυγχάνεται, γιατί η γλώσσα συμβολίζει-αντιπροσωπεύει τόσο τα αντικείμενα και τα γεγονότα του

εξωτερικού κόσμου, όσο και τα συναισθήματα και τις ιδέες του ομιλητή. Ο συμβολικός χαρακτήρας της γλώσσας επιτρέπει την πληροφόρηση για πράγματα και πρόσωπα ανεξάρτητα από τον τόπο και το χρόνο, την ανταλλαγή αφηρημένων σκέψεων και τη μετάδοση γνώσεων από μία γενιά στην άλλη. Κατ' εξοχήν σύμβολα της γλώσσας, τα μέσα επικοινωνίας που εκφράζουν νόημα, είναι οι λέξεις. Η γλώσσα αποτελείται από κανόνες τους οποίους οι άνθρωποι χρησιμοποιούν με μεγάλη ευκολία, παρά το ότι οι περισσότεροι από αυτούς δεν έχουν ενσυνείδητη γνώση των κανόνων αυτών. Οι ψυχολόγοι διαφωνούν για το ποια είναι η ακριβής σχέση ανάμεσα στη γλώσσα και τη σκέψη. Ο Piaget ισχυρίζεται ότι η δραστηριότητα του παιδιού καθορίζει τη σκέψη που αντανάκλαται απλώς στη γλώσσα (πράξεις→σκέψη→γλώσσα), οι Whorf & Sapir πιστεύουν ότι η γλώσσα καθορίζει τις νοητικές διαδικασίες των ανθρώπων (πολιτισμός και γλώσσα→σκέψη) και ο Vygotsky υποστηρίζει την άποψη ότι η σκέψη και η ομιλία αρχίζουν σαν δύο ξεχωριστά υποσυστήματα που αργότερα ενοποιούνται σε νοήματα (σκέψη και γλώσσα→νοήματα) (Βοσνιάδου, 2001).

Η διαδικασία αντίληψης του συμβόλου, καθώς και η ερμηνεία του νοήματος που περιέχει, βρίσκεται στο πεδίο έρευνας των ψυχολόγων και των ειδικών στην επικοινωνία. Ορισμένες από τις ερωτήσεις των τεστ νοημοσύνης απαιτούν τον συνδυασμό συμβόλων για την εξαγωγή ορθών συμπερασμάτων. Αντίστοιχα, οι ενδείξεις στα ταμπλό των αυτοκινήτων πληροφορούν με σαφήνεια τον οδηγό για πολλά γεγονότα, άλλοτε με μία γλώσσα αναπαραστάσεων και άλλοτε με συντομογραφίες της φυσικής γλώσσας. Το ίδιο και τα οδικά σήματα των λεωφόρων, που είναι απαραίτητα για την ασφαλή μετακίνηση και την ομαλή κυκλοφορία. Σχετική έρευνα, έδειξε ότι τα σήματα που κατανοούνται καλύτερα είναι εκείνα που είναι συνεπή με τον εργονομικό οδηγό σχεδίασης, έχουν δηλαδή χωρική και εννοιολογική συμβατότητα, φυσική απεικόνιση και οικειότητα. Η ικανότητά του να κατανοηθεί από τον οδηγό το σήμα και το νόημα που μεταφέρει, θεωρείται ο πιο σημαντικός παράγοντας σχεδίασης τέτοιων σημάτων, ενώ δευτερεύοντα ρόλο έχουν παράγοντες όπως η προσέλκυση της προσοχής, ο χρόνος αντίδρασης, το να είναι ευδιάκριτο από απόσταση, η λάμψη, και η δυνατότητα μάθησης (Shinart et al, 2003). Στη σημερινή εποχή διαφημιστές, σχεδιαστές, ψυχολόγοι και επικοινωνιολόγοι, ασχολούνται συχνά με τη μορφή, το χρώμα, το μέγεθος και άλλα ειδικά

χαρακτηριστικά συμβόλων, σημάτων, εικόνων κλπ., τα οποία συμβάλλουν στην αισθητική, αλλά κυρίως εστιάζουν στην άμεση μεταφορά συγκεκριμένων μηνυμάτων στον δέκτη του σήματος.

1.2 Απόψεις και θέσεις για νόημα και ερμηνεία

Όλες οι ανθρώπινες γλώσσες ως κώδικες επικοινωνίας, δημιουργήθηκαν ύστερα από μακρές και επίπονες διαδικασίες. Σε κάθε μία από τις γλώσσες μπορούμε να διακρίνουμε τη **συντακτική** και την **ερμηνευτική** πλευρά. Η συντακτική πλευρά μιας ανθρώπινης γλώσσας αποτελείται από ένα σύνολο κανόνων συμπλοκής των συμβόλων της για τη δημιουργία λέξεων και ένα σύνολο κανόνων σύνδεσης των λέξεων που προκύπτουν για τη δημιουργία προτάσεων. Η ερμηνεία μιας ανθρώπινης γλώσσας δεν είναι τίποτα άλλο, παρά η απόδοση νοήματος στις λέξεις του συντακτικού της και μέσω αυτού, ο χαρακτηρισμός των προτάσεων σαν αληθών ή ψευδών (Αναπολιτάνος, 1985). Για τη φυσική γλώσσα, οι γλωσσολόγοι διακρίνουν τέσσερις επιμέρους τομείς της γλώσσας: το φωνολογικό, το συντακτικό, το σημασιολογικό και τον πραγματολογικό (Βοσνιάδου, 2001). Σύμφωνα με τον Chomsky ο συντακτικός τομέας της γλώσσας είναι και ο πιο σημαντικός αφού οι κανόνες που εμπεριέχει είναι κύριοι υπεύθυνοι, τόσο για το σημασιολογικό νόημα, όσο και για το φωνητικό σύμβολο (Βοσνιάδου, 2001).

Επομένως, όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, η διαδικασία απόδοσης νοήματος στα σύμβολα μιας γλώσσας που στην περίπτωση της φυσικής γλώσσας είναι οι λέξεις, δεν είναι μία απλή ψυχολογική διαδικασία. Το ίδιο πολύπλοκη φαίνεται να είναι και η σχέση που έχει το σύμβολο με τη σημασία του, καθώς και η διαδικασία απόφασης για την ορθή αντίληψη, απόδοση και κατανόηση του νοήματος των συμβόλων. Η πολυπλοκότητα αυτή, οφείλεται στον διαφορετικό ρόλο των λέξεων, στο διαφορετικό τρόπο χρήσης τους, στα διαφορετικά πλαίσια που απαντώνται και σίγουρα, στη διαφορετικότητα των ανθρώπων που χρησιμοποιούν και εξελίσσουν μία γλώσσα σε διαφορετικά κοινωνικά και πολιτιστικά περιβάλλοντα.

Ο Wittgenstein (1978, σελ. 54-65) για την απόδοση νοήματος και την πολυπλοκότητα της γλώσσας αναφέρει χαρακτηριστικά:

«§3.11 Ονομάζω έκφραση (σύμβολο) κάθε μέρος της πρότασης που χαρακτηρίζει το νόημα της.

§3.202 Τα απλά σημεία που χρησιμοποιούνται στην πρόταση λέγονται ονόματα.

§3.323 Στην κοινή γλώσσα συμβαίνει πολύ συχνά η ίδια λέξη να υποσημαίνει με διαφορετικούς τρόπους, δηλαδή να ανήκει σε διαφορετικά σύμβολα.

§3.326 Για να αναγνωρίσουμε το σύμβολο από το σημείο πρέπει να δώσουμε προσοχή στο πώς χρησιμοποιείται το σημείο με νόημα

§3.327 Το σημείο καθορίζει μια λογική μορφή μόνο μαζί με τη λογικοσυντακτική χρησιμοποίηση του

§4.002 Η κοινή γλώσσα είναι μέρος του ανθρώπινου οργανισμού και όχι λιγότερο πολύπλοκη από αυτόν.... Οι σιωπηρές συμβάσεις για την κατανόηση της γλώσσας είναι φοβερά πολύπλοκες.»

Επιπλέον για τις εικόνες της πραγματικότητας και τη σχέση τους με τη γλώσσα συμβόλων αναφέρει:

«§4.011 Με την πρώτη ματιά μία πρόταση- όπως είναι π.χ. τυπωμένη πάνω στο χαρτί - φαίνεται να μην είναι εικόνα της πραγματικότητας στην οποία αναφέρεται. Αλλά και η μουσική γραφή φαίνεται με την πρώτη ματιά να μην είναι εικόνα της μουσικής όπως και η φθογγική σημειογραφία (το αλφάβητο) φαίνεται να μην είναι εικόνα των φθόγων της γλώσσας μας. Και όμως αυτές οι σημειογραφικές γλώσσες αποδείχνονται και με την κοινή έννοια, εικόνες αυτού που παριστάνουν.»

Συνήθως, η σχέση ανάμεσα στη φωνητική μορφή μιας λέξης και στη σημασία της είναι αυθαίρετη (Βοσνιάδου, 2001), ενώ αντίθετα η χρήση του συμβόλου στη γλώσσα των αναπαραστάσεων, οδηγεί σε μία έντονη ομοιότητα ανάμεσα στην αναπαράσταση και στην αναπαριστώμενη έννοια, αντικείμενο, ή διαδικασία (Nirenbourg, 2001). Σε κάθε περίπτωση, η γλώσσα των αναπαραστάσεων όπως και η φυσική γλώσσα, έχει την ικανότητα να μεταφέρει σε μεγάλο βαθμό και με μεγάλη επιτυχία νοήματα και εικόνες της πραγματικότητας στην οποία αναφέρεται (Nirenbourg, 2001). Επιπλέον σε ορισμένες περιπτώσεις το σύμβολο μεταφέρει τη δυναμική όψεων του κόσμου των εννοιών μέσα από τα γλωσσικά σχήματα, γεγονός που φαίνεται με πιο έντονο τρόπο στο χώρο της θρησκείας (Κορναράκης, 2000).

Σημαντική και θεμελιώδης για το νόημα του συμβόλου είναι η άποψη του Frege σύμφωνα με την οποία, το νόημα ενός συμβόλου αναλύεται σε δύο συνιστώσες, σημασία και αναφορά. Η σημασία συνδέεται με τον σημασιολογικό τομέα ενώ η αναφορά με τον πραγματολογικό. Δημιουργείται έτσι το σημασιολογικό τρίγωνο με κορυφές το σύμβολο [**Zeichen, sign**], τη σημασία [**Sinn, sense**], και την αναφορά [**Bedeutung, reference**], κάτι που φαίνεται να μοιάζει με το τριμερές

σημασιολογικό σχήμα σημαίνον-σημαινόμενο-πράγμα. Σύμφωνα με τον F. de Saussure (1916), όπως αναφέρει η Βοσνιάδου (2001), η φωνητική μορφή μιας λέξης για τη φυσική γλώσσα, είναι γνωστή σαν το *σημαίνον*, ενώ η σημασία της είναι γνωστή σαν το *σημαινόμενο*. Οι γλωσσολόγοι τονίζουν τη σχετικότητα της αντιστοιχίας σημαίνοντος και σημαινόμενου, καθώς οι γλωσσικοί κώδικες στην καθημερινή πρακτική επιτρέπουν στον άνθρωπο να έχει **μερική πρόσβαση** στον κόσμο των εννοιών (Κορναράκης, 2000). Κάτι τέτοιο είναι αναπόφευκτο και προκύπτει από την ανάγκη για γρήγορη διάδοση της πληροφορίας, καθώς και από την εξέλιξη που υφίσταται κάθε κώδικας επικοινωνίας από εσωτερικούς και εξωτερικούς παράγοντες. Ο F. de Saussure (1979), όπως αναφέρει ο Κορναράκης (2000), επισημαίνει χαρακτηριστικά *«Μία γλώσσα είναι εντελώς αδύναμη να υπερασπίσει τον εαυτό της ενάντια στους παράγοντες που μετατοπίζουν από στιγμή σε στιγμή τη σχέση του σημαινόμενου και του σημαίνοντος. Είναι μία από τις αυθαιρεσίες του σημείου»*.

Επιπλέον, η σημασιολογία μίας γλώσσας μπορεί να είναι εκτασιακή ή μη εκτασιακή. Η εκτασιακή εστιάζεται στη σχέση του συμβόλου με το συμβολιζόμενο αντικείμενο, ενώ η μη εκτασιακή στη σχέση του συμβόλου με το σημαινόμενο (Χριστοδουλίδης, 1993). Ο Wittgenstein (1978) αναφέρει, ότι είναι δυνατόν δύο διαφορετικές σημασίες να έχουν κοινό μεταξύ τους το σύμβολο-σημείο αλλά να υποσημαίνουν με διαφορετικό τρόπο. Για παράδειγμα, το σύμβολο «+» είναι δυνατόν να υποσημαίνει υπηρεσίες υγείας, (φαρμακείο, νοσοκομείο), τη θρησκεία (σύμβολο πίστης, ναός), την πράξη της πρόσθεσης, την επιλογή (ψηφοδέλτιο), κ.ά.. Είναι επομένως φανερό η πολλαπλότητα νοημάτων, τόσο από ένα σύμβολο, όσο και από μία λέξη, όπου για την απόδοση νοήματος είναι αναγκαίο να γνωρίζει κανείς επιπλέον πληροφορίες για το πλαίσιο στο οποίο χρησιμοποιείται το σύμβολο ή η λέξη. Σε αυτό συνάδει και η άποψη των λεξικογράφων, σύμφωνα με την οποία δεν υπάρχει ακριβής αριθμός νοημάτων για μία λέξη, αλλά το πλαίσιο που χρησιμοποιείται μπορεί να προσδώσει σε αυτή, κάθε φορά ένα νέο νόημα (Nirenbourg, 2001). Το γεγονός αυτό οδηγεί σε συζήτηση για το πότε και πιο νόημα που αποδίδεται σε μία λέξη ή σε ένα σύμβολο γίνεται αντιληπτό.

Σε σχετικό κείμενο του Dummett (1977), το οποίο αναφέρει ο Χριστοδουλίδης (1993), παρουσιάζονται αρχές και σκέψεις που συνδέονται με την ορθή απόδοση νοήματος σε μία έκφραση (σύμβολο). Πιο συγκεκριμένα, παρουσιάζεται μία

θεμελιώδης αρχή που όπως αναφέρει ο Dummett, «με την ορολογία του Wittgenstein» μπορεί να διατυπωθεί ως εξής «η κατανόηση ενός νοήματος μίας έκφρασης πρέπει να φανερώνεται ολοκληρωτικά στη χρήση της έκφρασης. Όταν πρόκειται για το νόημα μιας λέξης, τότε πρέπει η ίδια η πρακτική ικανότητα που συνιστά αυτή η γνώση να είναι γλωσσική ικανότητα, ικανότητα χρήσης ή αντίδρασης σε αποφάνσεις που περιέχουν τη λέξη με κάποιο τρόπο που να μπορεί τελικά να προσδιορισθεί χωρίς να επικαλεστούμε σημασιολογικές έννοιες που υποτίθεται πως είναι ήδη κατανοητές». Αντίθετα, η πλατωνική φιλοσοφία είναι φανερό ότι αρνείται την αρχή αυτή σύμφωνα με την οποία **το νόημα είναι η χρήση**, αν και πρέπει να δεχθεί πως μόνο από την εξάσκηση στη χρήση των εκφράσεων κάθε δεδομένης περιοχής προέρχεται η κατανόηση των νοημάτων τους. Βέβαια δεν αρκεί η απλή ικανότητα τήρησης των κανόνων που διέπουν τη χρήση των εκφράσεων, αλλά ο σχηματισμός της ορθής νοητικής αντίληψης των αρχών στις οποίες στηρίζονται αυτοί οι κανόνες. Επομένως στην περίπτωση των ανθρώπων, **η χρήση δε συνιστά νόημα**, όπως στην περίπτωση των ηλεκτρονικών υπολογιστών που προγραμματίζονται με τον ένα ή τον άλλο τρόπο για μία προκαθορισμένη ενέργεια. Ο άνθρωπος ως έλλογο ον καθοδηγείται στο να επιλέγει την κύρια νοητική παράσταση ανάμεσα στις διάφορες δυνατές εκδοχές.

Είναι φανερό ότι, όλοι οι κώδικες με σκοπό την επικοινωνία, παρά την πολυπλοκότητα τους, έχουν τη δυνατότητα μέσω των συμβόλων να μεταφέρουν νοήματα, μηνύματα και εικόνες της πραγματικότητας. Η αμφισημία και η πολυσημία των γλωσσών αυτών, σε συνδυασμό με τη δυναμική εξέλιξη από τη χρήση τους, καθιστούν την κατανόηση των μηνυμάτων κάποιες φορές αμφισβητήσιμη θέτοντας ζητήματα αλήθειας, σε αντίθεση με την άποψη του Πλάτωνα και των ρασιοναλιστών φιλοσόφων που «θεωρούσαν την ικανότητα του Λόγου ως ένα εσωτερικό χαρακτηριστικό γνώρισμα του ανθρώπινου νου, με το οποίο οι αλήθειες θα μπορούσαν να συλληφθούν *a priori*, ανεξάρτητα από την παρατήρηση» (Davis & Hersh, 1981, σελ. 314). Η δημιουργία και η εξέλιξη των τυπικών συμβολικών γλωσσών, οι οποίες παρακάμπτουν και ξεπερνούν το πρόβλημα της αμφισημίας και της πολυσημίας, είναι ένα ακόμη βήμα των επιστημόνων στην προσπάθειά τους για ακριβή και σαφή μεταφορά της πληροφορίας.

2 ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΥΜΒΟΛΑ – ΜΙΑ ΝΕΑ ΔΟΜΗ

Τα μαθηματικά σύμβολα, από την πρώτη γνωστή, ιδιαίτερα απλή, εμφάνισή τους, μέχρι και την πιο σύνθετη, την οποία χρησιμοποιούνται σήμερα, φέρουν μαζί τους **νόημα και χρηστικότητα**. Από την αρχική μορφή του απλού παραστατικού συστήματος, όπου το σύμβολο εξυπηρετούσε μόνο ανάγκες συντόμευσης και απεικόνισης, φτάνουμε στη σημερινή εκδοχή του τυποποιημένου συμβολικού συστήματος, το οποίο όχι μόνο παριστάνει αντικείμενα, αλλά εμπεριέχοντας δεδομένους κανόνες, σχηματίζει και μετασχηματίζει σύμβολα σε νέα σύμβολα, δίνει ώθηση και παρέχει ευκολία σε υπολογισμούς, δημιουργεί εποπτεία και μοτίβα, παράγει γενικεύσεις και συλλογισμούς και γενικά λειτουργεί με ακρίβεια και αποτελεσματικότητα.

Η μακρόχρονη αυτή πορεία της εξέλιξης ήταν δημιουργική, παραγωγική και κάποιες φορές υπερβολικά εστιασμένη στο συμβολισμό. Μετά τη σύνδεση της γεωμετρίας με την άλγεβρα, την ανακάλυψη του απειροστικού λογισμού και την πληθώρα των μαθηματικών συμπερασμάτων μέχρι και τον 18^ο αιώνα, η ανάγκη για αυστηρότητα και ακρίβεια στη θεμελίωση των μαθηματικών γίνεται πρωταρχικής σημασίας, εμπλέκοντας στο εγχείρημα αυτό πολλούς μεγάλους μαθηματικούς του 19^{ου} αιώνα. Την εποχή αυτή, με τη βοήθεια της μαθηματικής λογικής και τη συνδρομή της φιλοσοφίας των μαθηματικών, οι μαθηματικές έννοιες και ο συμβολισμός τους, απέκτησαν αυστηρή δομή και παράλληλα, βοήθησαν να δοθεί ακριβής ερμηνεία στην πληθώρα των μαθηματικών ανακαλύψεων του προηγούμενου αιώνα. Οι τυπικές γλώσσες που αναπτύχθηκαν για το σκοπό αυτό, εξελίχθηκαν κατά τη διάρκεια του τελευταίου αιώνα και οδήγησαν με επιτυχία στην ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών και των γλωσσών προγραμματισμού.

2.1 Αρχική πορεία-τα πρώτα ενοποιητικά βήματα

Από τους αρχαίους χρόνους μέχρι και το μεσαίωνα, η αντικατάσταση ενός μαθηματικού αντικειμένου από ένα σύμβολο είχε σκοπό την απεικόνιση του συγκεκριμένου αντικειμένου ή του αντιπροσώπου μίας κλάσης αντικειμένων. Η γενικότητα που προσδίδεται στο αντικείμενο μέσω της παράστασης του δεν εμπεριέχει τη μεταβλητότητα της ποσότητας. Έτσι το σύμβολο υποκαθιστά το αντικείμενο και την έννοια στη παράσταση για να διευκολύνει στην απομνημόνευση και τη χρήση, χωρίς να παίζει ρόλο μεταβλητής. Στα αρχαία ελληνικά μαθηματικά «ο τρόπος παράστασης δεν είναι ποτέ μόνο αντιπροσωπευτικός, ποτέ μόνο συμβολικός, αλλά πάντα είναι μία παράσταση εικόνας και κατ' αυτό τον τρόπο πρώτης αναφοράς» (Σπύρου, 2005, σελ. 110). Στη διάρκεια αυτών των χρόνων οι γεωμετρικές έννοιες «γραμμή», «σημείο», «ευθύγραμμο τμήμα» κλπ. απεικονίζονται από αντιπρόσωπούς και παριστάνονται από γράμματα, οι αριθμοί συμβολίζονται από τα γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου με πιο λιτό τρόπο, αντικαθιστώντας για άγνωστη αιτία τα λειτουργικά αριθμητικά σύμβολα που είναι γνωστά ως ηρωδιανικά (Heath, 2001, Cajori, 1919), εισάγεται από το Διόφαντο ένας ιδιαίτερος συμβολισμός για τις εξισώσεις, εισάγεται συμβολισμός για το μηδέν, τις δυνάμεις και τις ρίζες, εξαπλώνεται η χρήση του Ινδό Αραβικού συστήματος αρίθμησης με τα 10 ψηφία και την κλασματική μορφή των αριθμών με την οριζόντια γραμμή (Boyer, & Merzbach, 1997) και γενικά εμφανίζεται ένα πλήθος από σύμβολα όχι πάντα ενιαία, για έννοιες, αντικείμενα και λειτουργίες στα μαθηματικά. Όμως, η αποτύπωση των συλλογισμών και των υπολογισμών για την επιστήμη των αριθμών, εξακολουθεί να χρησιμοποιεί λέξεις της φυσικής γλώσσας ή συντομεύσεις αυτής, κάτι που οδηγεί τον Nesselmann στον χαρακτηρισμό της άλγεβρας ως «ρητορική» και «συγκεκριμένη» μέχρι την εμφάνιση του Vieta και την εισαγωγή των καινοτόμων συμβολισμών για την άγνωστη ποσότητα (Spangolo, 2006, Eves, 1981).

Μετά την αναγέννηση, μία σειρά από επιστημονικές ανακαλύψεις και νέες πρακτικές και ιδιαίτερα η ανακάλυψη του τηλεσκοπίου, (Ρουσόπουλος, 1991) διαμορφώνουν το αναλυτικό-αναφορικό επιστημονικό πρότυπο σκέψης. Το τηλεσκόπιο διαμεσολαβεί στην απόσταση αντικειμένου-υποκειμένου και τη γεφυρώνει, δημιουργώντας δυνατότητες μελέτης των πρωτοτύπων από τα αντίγραφα. Με τον ίδιο τρόπο, ο επιστημονικός λόγος έχει ως προϋπόθεση τη δυνατότητα

σύνδεσης των παραστάσεων με τα αντικείμενα όχι μόνο ως λόγος ανάλυσης και σύνθεσης των παραστάσεων, αλλά και ως λόγος διαχείρισης των σημείων. Επιπλέον, ο επιστημονικός λόγος εξυπηρετεί την ανάγκη να μεταφερθούμε από τα αντικείμενα-έννοιες στις λέξεις και τα σύμβολα και από εκεί στις προτάσεις. Κάτι τέτοιο αναδεικνύει, τόσο τη γλώσσα, όσο και ένα παραστατικό σύστημα σε ένα μηχανισμό με αναλυτική και αναφορική λειτουργία. Ειδικά για τα μαθηματικά, οι δυνατότητες των αλγεβρικών συμβόλων να παριστάνουν τον κόσμο εμπίπτουν στις δυνατότητες του συστήματος των φακών του τηλεσκοπίου να παριστάνουν τη φυσική πραγματικότητα σε προσιτό μέγεθος για μελέτη και στις δυνατότητες των φακών του μικροσκοπίου να παρουσιάζουν με σαφήνεια τις μικρές εικόνες. Ο Γαλιλαίος αναφέρει ότι *«για να γνωρίσουμε τον κόσμο απαιτείται να διαβάσουμε προηγουμένως το βιβλίο της φύσης που είναι γραμμένο σε μαθηματική γλώσσα»* (Ρουσόπουλος, 1991, σελ. 38). Ο Frege αναφέρει αντίστοιχα *«ότι ο καλύτερος τρόπος για να δείξει τη σχέση της εννοιολογίας με την καθημερινή γλώσσα είναι η σύγκριση με τη σχέση που έχει το μικροσκόπιο με το μάτι»* (Ρουσόπουλος, 1991, σελ. 67). Παράλληλα, με την ακριβή απεικόνιση μαθηματικών εννοιών και αντικειμένων, το τυπικό σύστημα επιτρέπει χειρισμούς αλγεβρικών συμβόλων μέσα σε ένα αξιόπιστο σύστημα χωρίς να απαιτείται η διαρκής παρακολούθηση του αναφορικού νοήματος. Έχουμε έτσι φαινόμενα, όπου ο μαθηματικός αδυνατεί να ερμηνεύσει εκφράσεις και σύμβολα που προκύπτουν από τα συμπεράσματα. Σχετικά αναφέρεται ότι ο Girolamo Cardano το 1545, από τον τύπο που δόθηκε στο βιβλίο του *Ars Magna* και έδινε τη λύση της κυβικής εξίσωσης, χρησιμοποιεί το σύμβολο «*R m*» για να δηλώσει τις τετραγωνικές ρίζες αρνητικών πραγματικών αριθμών σε μία διαδικασία γινομένου με αποτέλεσμα πραγματικό αριθμό, μία χρονική περίοδο όπου οι τετραγωνικές ρίζες αρνητικών δεν υπάρχουν και η θεωρία των μιγαδικών δεν έχει υπόσταση. (Αναπολιτάνος, 1985, Cajori, 1928).

Μέχρι τα τέλη του 19^{ου} αιώνα, είχε γίνει σαφές από μαθηματικούς και φιλοσόφους η ανάγκη για τη δημιουργία μιας καθολικής γλώσσας, ενός συμβολικού συστήματος, στο οποίο θα βασιζόνταν κάθε έγκυρη έκφραση, διατύπωση και διαδικασία για τα μαθηματικά και την επιστήμη γενικότερα. Στο σύστημα αυτό, τον κυρίαρχο ρόλο θα είχε αργότερα η λογική με κοινώς αποδεκτούς κανόνες συμπερασμού. Μέχρι την κυριαρχία της λογικής έχουμε μερικά ενδεικτικά στοιχεία

από απόψεις και προσπάθειες για ενοποιητικά σχήματα σε εξέλιξη του πυθαγόρειου δόγματος «τα πάντα είναι αριθμός» (Αριστοτέλης, Μεταφυσικά Α 985b). Ο Descartes το 1701, μιλάει για «μία γενική επιστήμη η οποία να αξίζει ό,τι σχετικό με την τάξη και το μέτρο μπορεί να ερευνηθεί, χωρίς αυτό να περιορίζεται σε κάποιο ειδικό αντικείμενο» (Ρουσόπουλος, 1991, σελ. 35), ο Wronski αναφέρει το 1803 «τον μεγάλο νόμο της δημιουργίας των ποσοτήτων» ο οποίος εμφανίζεται ως εξίσωση που περιέχει το κλειδί για το σύμπαν (Davis & Hersh, 1981, σελ. 75), ο Lagrange εφαρμόζει τα νέα μαθηματικά εργαλεία στη μηχανική με σκοπό την ενοποίηση διαφόρων αρχών περίπου το 1800 (Τουμάσης, 1999), ο Jacobi το 1841, αναφέρει «*man muss immer generalisieren, κάποιος πρέπει πάντα να γενικεύει*» (Davis & Hersh, 1981). Επιπλέον, συγκεκριμένες προσπάθειες ενοποιητικών σχημάτων έχουμε, όταν ο Dedekind θεμελιώνει τους πραγματικούς αριθμούς στην αριθμητική με τη γνωστή μέθοδο των τομών, σκοπεύοντας όμως σε ολόκληρη την ανάλυση, ο Cantor επιχειρεί μία άλλη προσπάθεια θεμελίωσης με τη θεωρία συνόλων και με σκοπό όλα τα μαθηματικά να αποκτήσουν μία ενιαία βάση (Σπύρου, 2005), ενώ ο Felix Klein δουλεύει πρόγραμμα για να ενοποιηθούν οι γεωμετρίες κάτω από τη θεωρία ομάδων στα τέλη του 19^{ου} αιώνα (Davis & Hersh, 1981).

Σημαντική από φιλοσοφική άποψη είναι η προσπάθεια του Leibniz, για τη δημιουργία μιας τυπικής γλώσσας καθολικού χαρακτήρα (*characteristica universalis*) ικανής για να εκφράσει στο επίπεδο του σημαίνοντος, οτιδήποτε υπάρχει στο επίπεδο σημαινόμενου. Η προσπάθεια αυτή, αν και δεν στέφθηκε με επιτυχία, δείχνει την πίστη του Leibniz στην πρωτοκαθεδρία της λογικής (Αναπολιτάνος, 1985). Όπως αναφέρει ο Bell (1992, τομ. 1, σελ. 195), ο Leibniz, όταν ήταν ακόμη νεαρός, στο έργο του *De arte combinatoria*, στόχευε στη δημιουργία «μίας γενικής μεθόδου η οποία θα ανήγαγε όλες τις αλήθειες της λογικής σε ένα είδος υπολογισμού. Ταυτόχρονα, θα ήταν κάτι σαν καθολική γλώσσα ή γραφή, παντελώς διαφορετική όμως από όλες όσες προβλήθηκαν μέχρι τώρα διότι τα σύμβολα, ακόμη και οι λέξεις, θα κατηύθυναν τη σκέψη (λόγο, λογισμό) και τα λάθη εκτός από εκείνα που θα είχαν να κάνουν με γεγονότα, θα ήταν σφάλματα υπολογισμού. Θα ήταν πολύ δύσκολο να σχηματισθεί αυτή η γλώσσα ή το καθολικό χαρακτηριστικό αλλά θα ήταν πολύ εύκολη η κατανόηση της χωρίς λεξικά». Ο Frege αναφέρει για την προσπάθεια του Leibniz ότι, «ίσως υπερεκτίμησε τα πλεονεκτήματα ενός ικανοποιητικού συμβολιστικού

συστήματος. Η ιδέα του μιας καθολικής χαρακτηριστικής γλώσσας, ενός *calculus ratiocinator*, ήταν τόσο γιγαντιαία ώστε η προσπάθεια του να την πραγματοποιήσει δεν μπόρεσε να προχωρήσει πέρα από τα πρώτα βήματα» (Ρουσόπουλος, 1991, σελ. 68). Ο ίδιος ο Leibniz, είχε εκφράσει και την εκτίμηση ότι μερικοί σωστά επιλεγμένοι άντρες θα το κατάφερναν σε μία πενταετία, μετανιώνοντας αργότερα που δεν αφιέρωσε περισσότερο χρόνο στην ιδέα αυτή (Bell, 1992). Αυτό που άρχισε αλλά δεν κατάφερε ο Leibniz, προσπάθησαν αργότερα πολλοί μαθηματικοί με διαφορετικούς τρόπους και με διαφορετικά αποτελέσματα. Η μεγάλη πρόοδος στον τομέα αυτό έρχεται όταν ο Boole προτείνει το 1848 μία άλγεβρα των προτάσεων στις έρευνες πάνω στους νόμους της σκέψης (Σπύρου, 2005) και ουσιαστικά μαζί με τους De Morgan, Jevons, Pierce και Schroeder εργάζονται με σκοπό την κοινή παράσταση άλγεβρας και λογικής (Boyer, & Merzbach, 1997). Ο Russell για το θέμα αυτό, αναφέρει ότι η μεγαλύτερη ανακάλυψη του 19^{ου} αιώνα, ήταν τα θεωρητικά μαθηματικά και αυτά ανακαλύφθηκαν από τον Boole στο έργο του «Οι Νόμοι της Σκέψης» (Boyer & Merzbach, 1997).

2.2 Η βασική εξέλιξη - θεμελίωση

Στη διάρκεια του 18^{ου} αιώνα, ο απειροστικός λογισμός σε συνδυασμό με την αναλυτική γεωμετρία, δημιούργησε ένα άλμα σε όλες τις επιστήμες που συνδέονταν με τα μαθηματικά. Λειτουργήσε ως σημαντικό εργαλείο για την επίλυση προβλημάτων των μαθηματικών και της φυσικής καθώς και για την παραγωγή πολλών νέων μαθηματικών ανακαλύψεων στην ανάλυση με πρωτοπόρους τους Euler, D' Alembert και Lagrange. Παράλληλα όμως, δημιουργήθηκαν προβλήματα με την ατελή κατανόηση εννοιών όπως το όριο και η συνέχεια, διαφωνίες για την αποδοχή των μεθόδων των απειροστών και συζητήσεις για τα παράδοξα των άπειρων αθροισμάτων. Η ενασχόληση με αυτά τα προβλήματα, ανέδειξε την έλλειψη λογικών βάσεων στους αλγορίθμους και εμφάνισε την απαίτηση για ακρίβεια και αυστηρότητα στη μαθηματική πρακτική κατά το πρώτο ήμισυ του 19^{ου} αιώνα. Με πρωτοπόρους τους Cauchy, Gauss, Dirichlet, Abel και Bolzano η απαίτηση αυτή συνεχίστηκε καθ' όλη τη διάρκεια του αιώνα και απετέλεσε την αφορμή για την ανάπτυξη της λογικής (Σπύρου, 2005).

Τα πρώτα βήματα της λογικής παρουσιάζονται όταν ο Peacock στην *Άλγεβρα* του το 1830, προτείνει τα σύμβολα των στοιχείων στην άλγεβρα να μην παριστάνουν αριθμούς. Ο Boole στη συνέχεια, ολοκληρώνοντας τον φορμαλισμό στην εισαγωγή της *Μαθηματικής Ανάλυσης της Λογικής*, αναφέρει για τα μαθηματικά: «Μπορούμε δικαιολογημένα να τους αποδώσουμε τον οριστικό χαρακτήρα ενός αληθινού Λογισμού, δηλαδή ότι είναι μία μέθοδος που βασίζεται στη χρήση των συμβόλων, των οποίων οι νόμοι συνδυασμού είναι γνωστοί και γενικοί και των οποίων τα αποτελέσματα επιδέχονται μία συνεπή ερμηνεία...» (Boyer & Merzbach, 1997, σελ. 648). Συνεπώς, αν οποιοδήποτε θέμα παρουσιάζεται έτσι ώστε να αποτελείται από σύμβολα, ακριβείς κανόνες πράξεων επάνω σε αυτά και να πληρεί την απαίτηση της εσωτερικής συμβιβαστότητας, τότε αυτό αποτελεί τμήμα των μαθηματικών. Οι προσπάθειες για την αλγεβροποίηση της λογικής συνεχίζονται και προετοιμάζουν το κλίμα για τη μαθηματική λογική και τη φιλοσοφία των μαθηματικών η οποία παρουσιάζεται στο τέλος του 19^{ου} με τους Frege στη Γερμανία και Russell στην Αγγλία (Σπύρου, 2005). Η έρευνα για τη μαθηματική λογική και τη μαθηματική γλώσσα, επικεντρώνεται κυρίως σε ζητήματα που αφορούν τη σπουδή των μαθηματικών προτάσεων όχι μόνο ως τμήμα της καθημερινής γλώσσας. Σύμφωνα με

τον Ρουσόπουλο (1991, σελ. 64) «Επιδιώχθηκε η διατύπωση μίας γενικής, αν και τυπικής, γλώσσας των μαθηματικών και της επιστήμης, κατ' αντιδιαστολή προς την καθημερινή γλώσσα που θεωρείται αμφίσημη, πολύσημη και σημασιολογικά κλειστή κατά τη διατύπωση του Tarski». Την περίοδο αυτή, γεννήθηκαν οι συμβολικές (τυπικές) γλώσσες, οι πρωτοβάθμιες (κατηγορηματικές) και δευτεροβάθμιες γλώσσες κλπ., οι οποίες διαθέτουν ένα πλήθος από σύμβολα και κανόνες. Η απλούστερη συμβολική ή τυπική γλώσσα είναι αυτή του προτασιακού λογισμού, τα σύμβολα της οποίας είναι οι προτασιακές μεταβλητές, οι σύνδεσμοι και οι παρενθέσεις. Οι γλώσσες αυτές, με κύριο χαρακτηριστικό τους ένα σύνολο κανόνων για εξαγωγή συμπερασμάτων, τους αποδεικτικούς κανόνες, κατασκευάστηκαν αρχικά με αντικειμενικό στόχο τη δημιουργία εκφραστικών μέσων κατάλληλων για το ζητούμενο της εποχής δηλαδή την ακρίβεια και την αυστηρότητα στη μαθηματική πρακτική (Αναπολιτάνος, 1985). Οι τυπικές γλώσσες χρησιμοποιήθηκαν για πρώτη φορά από τους Peano και Frege στα τέλη του 19^{ου} αιώνα, με σκοπό να γίνει η μαθηματική απόδειξη πιο αυστηρή, να αυξήσει δηλαδή τη βεβαιότητα του συμπεράσματος σε μία μαθηματική επιχειρηματολογία. Αρχικά ο σκοπός δεν εκπληρωνόταν δεδομένου ότι η επιχειρηματολογία απευθυνόταν σε ανθρώπους που αναζητούσαν στέρεα θεμέλια για τα μαθηματικά. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα, οι τυπικές γλώσσες στην αρχική τους μορφή να προκαλέσουν πλήθος ερωτημάτων και συζητήσεων για το συμβολισμό και την απόδοση νοήματος στα σύμβολα και τις λέξεις, τα οποία δείχνουν την αυστηρότητα την οποία επιδίωκαν οι μαθηματικοί στις αρχές του 20^{ου} αιώνα στη θεμελίωση των Μαθηματικών. Χαρακτηριστικός είναι ο προβληματισμός του Schroeder για τη **σύνδεση του αριθμού με την έννοια και το σύμβολο** «Δεν είναι ποτέ σαφές αν ο αριθμός είναι σύμβολο και αν τούτο συμβαίνει, ποια είναι η αναφορά του ή αν ο αριθμός είναι ο ίδιος αναφορά ενός συμβόλου. Από το γεγονός ότι υποθέτουμε διαφορετικά σύμβολα, ώστε να μην επανέρχεται το ίδιο σύμβολο, δεν απορρέει ότι αυτά έχουν διαφορετικές αναφορές» (Χριστοδουλίδης, 1993, σελ. 75).

Άξια αναφοράς, είναι και η συζήτηση για τη μεταβλητή, τα σύμβολα και τις τιμές που μπορούν να πάρουν, η οποία παρατίθεται από τον Ρουσόπουλο (1991) στη σελίδα 211 [ως σημείωση του Jourdain, (1912, σελ.238)]

«Ο Russell (1908) γράφει: «Μια μεταβλητή είναι ένα σύμβολο που παίρνει τιμές από ένα σύνολο τιμών χωρίς να προσδιορίζεται ποια τιμή. Δεν παίρνει πρώτα μία τιμή και μετά μία άλλη καθ' όλο το χρόνο έχει μία κάποια τιμή, όπου αυτή η κάποια τιμή δεν προσδιορίζεται εκτός εάν την αντικαταστήσουμε με μία σταθερά».

Σχετικά με τη λέξη μεταβλητή ο Frege επεξηγεί: «Δεν θα ήταν καλύτερα να παραλείψουμε εντελώς αυτή την έκφραση αφού είναι τόσο δύσκολο να την ορίσουμε; Ο ορισμός του Russell αμέσως μας κάνει να αναρωτηθούμε τι σημαίνει το να πούμε ότι 'ένα σύμβολο παίρνει/έχει μία τιμή'. Εννοεί τη σχέση σημείου (σημαίνοντος) και σημαινόμενου; Στην περίπτωση αυτή όμως πρέπει να επιμείνουμε το σημείο να έχει ακριβώς μία σημασία και το νόημα που πρόκειται να έχει να είναι απολύτως προσδιορισμένο· τότε η μεταβλητή θα ήταν ένα σημείο. Αλλά για όποιον δεν συμφωνεί με μία τυπική θεωρία η μεταβλητή δεν μπορεί να είναι σημείο, όπως άλλωστε και ένας αριθμός δεν είναι. Αν τώρα γράψουμε 'μια μεταβλητή συμβολίζεται από ένα σύμβολο που παριστάνει μία τιμή από ένα σύνολο τιμών, το παραπάνω μειονέκτημα εξαφανίζεται. Αλλά τι συμβαίνει τότε το σύμβολο πρώτα παριστάνει τη μεταβλητή και ύστερα την τιμή που παίρνεται από ένα σύνολο χωρίς να προσδιορίζεται ποια τιμή παίρνει. Συνεπώς φαίνεται πως είναι καλύτερα να μην χρησιμοποιούμε στον ορισμό μας τη λέξη 'σύμβολο'.... Και παρακάτω «Είναι μάλλον καλύτερα να συμφωνήσουμε ότι τα λατινικά γράμματα μας εξυπηρετούν στο να αποδίδουμε γενικότητα περιεχομένου σε ένα θεώρημα. Και είναι καλά να μην χρησιμοποιούμε καθόλου την έκφραση "μεταβλητή", αφού τελικά δεν μπορούμε να πούμε αν ένα σημείο είναι μεταβλητή ή αυτό που το σημείο συμβολίζει είναι μεταβλητή, ή τι είναι μεταβλητή –τουλάχιστον όχι με τη σημασία που μπορεί να χρησιμοποιηθεί στα μαθηματικά και τη λογική»

Με τον ίδιο προβληματισμό, δηλαδή το νόημα των συμβόλων ο Frege στο άρθρο του «Über Sinn und Bedeutung», με την αντιπαράθεση των σχέσεων ταυτότητας και ισότητας όπως αυτές εκφράζονται συμβολικά από τις σχέσεις $\alpha=\alpha$ και $\alpha=\beta$ και την παράθεση παραδειγμάτων, διατυπώνει την άποψη ότι το νόημα ενός σήματος αποτελείται από δύο θεμελιώδεις συνιστώσες. Την πρώτη την ονομάζει **σημασία του σήματος [Sinn, sense]** και τη δεύτερη **αναφορά [Bedeutung, reference]**. Οι δύο αυτές συνιστώσες διαχωρίζονται στην ερμηνεία της ισότητας. Έτσι, στο παράδειγμα που χρησιμοποιεί ο Frege από τα φυσικά αντικείμενα

συμβολίζοντας με α τον Αυγερινό και με β τον Αποσπερίτη, η ανακάλυψη ότι ο Αυγερινός και ο Αποσπερίτης αναφέρονται στο ίδιο ουράνιο σώμα, στον πλανήτη Αφροδίτη, μας οδηγεί στην ισότητα $\alpha=\beta$. Έτσι η αναφορά του Αποσπερίτη είναι ίδια με αυτή του Αυγερινού, όχι όμως και η σημασία του η οποία καθορίζεται από την ώρα παρατήρησης του αστεριού (Αναπολιτάνος, 1985). Παράλληλα για τη σχέση σημαίνοντος-σημαινόμενου ο Wittgenstein (1978) αναφέρει ότι από το σύμβολο, το σημείο (σημαίνον) είναι αυτό που γίνεται αντιληπτό από τις αισθήσεις. Δύο διαφορετικά σύμβολα μπορούν να έχουν κοινό μεταξύ τους το σημείο (γραφτό ή προφορικό) όμως υποσημαίνουν με διαφορετικούς τρόπους (παρ.3.32, 3.321). Για τη αποφυγή συγχύσεων προτείνει τη χρήση μίας γλώσσας η οποία δεν θα χρησιμοποιεί το ίδιο σημείο σε διαφορετικά σύμβολα (παρ.3.325).

Οι συζητήσεις και οι απόψεις για την σημασία των εκφράσεων, τις μεταξύ τους σχέσεις, τη σχέση τους με την πραγματικότητα και την αλήθεια, με τη βοήθεια της μαθηματικής λογικής, οδηγούν σε πιο σταθερά θεμέλια τα μαθηματικά. Στις αρχές του 20^{ου} αιώνα αναπτύσσονται διάφορες απόψεις που μετουσιώνονται σε προγράμματα θεμελίωσης των μαθηματικών.

Το λογικιστικό πρόγραμμα των Frege και Russell είναι ένα πρόγραμμα με σημαντική συμβολή στην κατεύθυνση αυτή. Με αυτό σύμφωνα με το Χριστοδουλίδη (1993), ο μεν Frege, φιλοδοξούσε να θεμελιώσει κλάδους μαθηματικών ή και όλα τα μαθηματικά σε μία ασφαλή θεωρία, της λογικής, ο δε Russell, σε ένα τμήμα της λογικής συνδυασμένο με ένα τμήμα της αριθμητικής και επισημαίνει (σελ. 32) ***«Δεδομένου ότι η λογική είναι καθαρά τυπική δηλαδή χωρίς ειδικό περιεχόμενο, ο λογικισμός θα έδειχνε ότι τα μαθηματικά είναι ένα είδος ταυτολογικών μετασχηματισμών του λογικού συμβολισμού».***

Την εποχή αυτή προέκυψε μια ριζοσπαστική θεώρηση των μαθηματικών από τους ιντουσιονιστές. Η θέση των ιντουσιονιστών, με κύριο εκπρόσωπο τους τον Brouwer, ήταν ότι οι φυσικοί αριθμοί δίνονται από μία θεμελιώδη εποπτεία-ενόραση, που είναι το σημείο εκκίνησης για όλα τα μαθηματικά. Η ιντουσιονιστική οντολογία βασίζεται στη γνωσιολογία, με την έννοια ότι οι μαθηματικές οντότητες υπάρχουν μόνο αν μπορούν να κατασκευαστούν. Απαίτησαν έτσι, όλα τα μαθηματικά να μπορούν να βασιστούν κατασκευαστικά πάνω στους φυσικούς αριθμούς (Davis & Hersh, 1981, Χριστοδουλίδης, 1993). Κατά τους ιντουσιονιστές, ***η λογική είναι***

κλάδος εφαρμοσμένων μαθηματικών, επομένως δεν προηγείται της αριθμητικής και της ανάλυσης. Επιπλέον, **η γλώσσα είναι μέσο μετάδοσης πληροφορίας** και γενικότερα όργανο επικοινωνίας που δεν μπορεί ποτέ να εκφράσει πλήρως το περιεχόμενο της εποπτικής δραστηριότητας του μαθηματικού. **Η βασική αυτή εποπτεία έχει ως θεμελιώδες χαρακτηριστικό το ότι είναι ανεξάρτητη από οποιαδήποτε γλώσσα και από οποιοδήποτε σύστημα σήμανσης** (Αναπολιτάνος, 1985, Χριστοδουλίδης, 1993)

Αργότερα, το φορμαλιστικό πρόγραμμα του Hilbert επιδιώκει την παραγωγή αποδείξεων συνέπειας με χρήση βασικών αληθειών, που ανήκουν στην περιοχή των πεπερασμένων μαθηματικών, μιας θεωρίας βασισμένης στην κοινή αντίληψη, για το τι είναι οι φυσικοί αριθμοί (Αναπολιτάνος, 1985). Η απόδειξη των θεωρημάτων μη πληρότητας του Gödel το 1931 όμως, ματαιώνει το πρόγραμμα του Hilbert με την έννοια ότι, η απόδειξη της συνέπειας ενός συστήματος απαιτεί συνήθως τη χρήση μεθόδων που είναι ισχυρότερες από εκείνες του ίδιου του συστήματος (Χριστοδουλίδης, 1993). Μπορεί όμως το πρόγραμμα αυτό να απέτυχε, αλλά η σχολή των φορμαλιστών παρέμεινε και εξέφρασε πολλές απόψεις σχετικές με τη φιλοσοφία των μαθηματικών, βρίσκοντας εκφραστές και υποστηρικτές και στη εκπαίδευση κυρίως από την ομάδα Bourbaki. Για τους φορμαλιστές, **η συμβολική γλώσσα με την οποία έχουν κωδικοποιηθεί τα μαθηματικά, αποκτά νόημα και σημασία μέσα από τις διαδικασίες, χωρίς αυτό να έχει να κάνει με τη φυσική ερμηνεία.**

Η μαθηματική λογική, παρά τον περίεργο συμβολισμό που χρησιμοποιεί έλυσε πολλά προβλήματα και βοήθησε σημαντικά τη θεμελίωση των μαθηματικών. Το θεώρημα πληρότητας του Gödel το 1930, αναφέρεται στη δυνατότητα διασύνδεσης της συντακτικής και της ερμηνευτικής πλευράς μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας. Έτσι, οι περισσότερες από τις αποδείξεις που παρουσιάζονται στα Μαθηματικά, διαπιστώνουν την αλήθεια της πρότασης στο τυχόν μοντέλο και με τον τρόπο αυτό βεβαιώνουν την ύπαρξη μιας απόδειξης μέσω μιας κατάλληλης διαδικασίας επαληθευσιμότητας (Αναπολιτάνος, 1985). Επιτρέπεται έτσι στην καθημερινή μαθηματική πρακτική, να χρησιμοποιούμε ένα φορμαλιστικό σύστημα συμβολισμού σαφές, ακριβές και με συγκεκριμένους κανόνες, με τη βοήθεια του οποίου, διατυπώνουμε και επιλύουμε φυσικά και μαθηματικά προβλήματα, δουλεύοντας, τόσο σε συντακτικό, όσο και σε σημασιολογικό επίπεδο.

2.3 Κύρια χαρακτηριστικά και σχέσεις

Με τις παρεμβάσεις των φιλοσοφικών θεωρήσεων και με τη βοήθεια της μαθηματικής λογικής στις αρχές του 20^{ου} αιώνα, η τυποποίηση των μαθηματικών, αναδεικνύει το πλούσιο υπόβαθρο μέσα στο οποίο βρισκόταν η τυπική θεωρία. Η διάκριση σε τυπική και άτυπη θεωρία, δημιουργεί το πλαίσιο να συζητηθούν ζητήματα που αφορούν νόημα και σημασία. Η σημασία της τυποποίησης όπως αυτή παρουσιάζεται είναι καθοριστική αφού διαμεσολαβεί με απαράμιλλη καθαρότητα στη φυσική πρακτική, φτάνοντας σε σημείο να την υποκαταστήσει (Ρουσόπουλος, 1991). Επιπλέον, η ανάλυση της γλώσσας ως τυπικό σύστημα είναι αυτή που διαφοροποιεί τη σύγχρονη από την αρχαία αξιωματική μέθοδο θέτοντας σε διαφορετικό ρόλο αξιώματα και κανόνες (Χριστοδουλίδης, 1993).

Για το σκοπό της λογικής ανάλυσης των μαθηματικών, είναι αναγκαίο να συλλάβουμε ότι τα μαθηματικά εκφράζονται σε τυπική γλώσσα, μία γλώσσα για την οποία οι άνθρωποι έχουν μια ανυπέρβλητη αποστροφή, ενώ οι υπολογιστές αναπτύσσονται μόνο με αυτές. Ένας υπολογιστής, δέχεται ως δεδομένα εισαγωγής μόνο σύμβολα από κάποιον κατάλογο που δίνεται προκαταβολικά στο χρήστη και τα οποία, πρέπει να χρησιμοποιηθούν σύμφωνα με κάποιους δεδομένους κανόνες. Τυποποίηση, είναι η διαδικασία με την οποία τα μαθηματικά και η φυσική γλώσσα, με τη βοήθεια των υπολογιστών και του προγραμματισμού, προσαρμόζονται στη μηχανική επεξεργασία. Ένα τυποποιημένο κείμενο είναι μια σειρά από σύμβολα, το οποίο όταν το χειρίζεται ένας μαθηματικός ή μία μηχανή μετασχηματίζεται σε μία άλλη σειρά συμβόλων. Τέτοιοι χειρισμοί συμβόλων μπορούν να είναι από μόνοι τους το θέμα μίας θεωρίας των μαθηματικών και μάλιστα με διαφοροποιημένο αντικείμενο. «Όταν λαμβάνεται υπ' όψη ότι ο χειρισμός έχει γίνει από μία μηχανή η θεωρία καλείται από τους επιστήμονες των υπολογιστών “θεωρία των αυτομάτων”, ή “θεωρία ανάδρασης” από αυτούς που ασχολούνται με τη λογική και “θεωρία αποδείξεων” όταν λαμβάνεται υπόψη ότι ο χειρισμός έγινε από ένα μαθηματικό» (Davis & Hersh, 1981, σελ.144).

Οι γραμμές που ακολουθούν, βρίσκονται ως παράδειγμα στην ιστοσελίδα www.math.uoa.gr/me, και είναι η «γλώσσα» που πρέπει να χρησιμοποιηθεί σε ένα σύγχρονο πρόγραμμα γραφής μαθηματικών κειμένων το LaTeX:

```
%Here begins the document!
\begin{document}
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{T}, \mathbb{D}$
$\mathrm{g}rA, \mathrm{g}rB, \mathrm{g}rG, \mathrm{g}rD, \mathrm{g}rE, \mathrm{g}rZ, \mathrm{g}rH, \mathrm{g}rU, \mathrm{g}rI, \mathrm{g}rK, \mathrm{g}rL, \mathrm{g}rM, \mathrm{g}rN, \mathrm{g}rJ, \mathrm{g}rO, \mathrm{g}rP, \mathrm{g}rR, \mathrm{g}rS, \mathrm{g}rT, \mathrm{g}rY, \mathrm{g}rF, \mathrm{g}rX, \mathrm{g}rC, \mathrm{g}rV$
$A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z$
$\mathrm{g}ra, \mathrm{g}rb, \mathrm{g}rg, \mathrm{g}rd, \mathrm{gre}, \mathrm{grz}, \mathrm{grh}, \mathrm{gru}, \mathrm{gri}, \mathrm{grk}, \mathrm{grl}, \mathrm{grm}, \mathrm{grn}, \mathrm{grj}, \mathrm{gro}, \mathrm{grp}, \mathrm{grr}, \mathrm{grs}, \mathrm{grt}, \mathrm{gry}, \mathrm{grf}, \mathrm{grx}, \mathrm{grc}, \mathrm{grv}$
$a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$
Two ways to turn from English to Greek
\text{Δύο τρόποι να γυρίσουμε το πληκτρολόγιο από τα Αγγλικά στα Ελληνικά}
\textit{\text{Some English}}, \textit{\text{και λίγα Ελληνικά}}
Μετά από μία εντολή \textbackslash tl\{ ή \textbackslash tl\{tg\ συνεχίζουμε όπου μας έχει αφήσει η τελευταία εντολή
\textbackslash tl\{lt\} ή \textbackslash tl\{gt\}.
Λίγα μαθηματικά σύμβολα στα οποία έβαλα συντομογραφία διότι ποτέ δεν μπορώ να θυμηθώ τις εντολές τους (οι οποίες είναι
μεγάλες):
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
Συνεπάγεται $\Rightarrow$
Αν και μόνο αν $\Leftrightarrow$
```

προκειμένου να εμφανιστεί στην οθόνη και τυπωμένο στο χαρτί, μετά από επεξεργασία το κείμενο που ακολουθεί:

```
N, Z, Q, R, C, T, D
A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ, I, K, Λ, M, N, Ξ, O, Π, R, Σ, T, Y, Φ, X, Ψ, Ω
A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z
α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, ι, κ, λ, μ, ν, ξ, ο, π, ρ, σ, τ, υ, φ, χ, ψ, ω
a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z
Two ways to turn from English to Greek
Δύο τρόποι να γυρίσουμε το πληκτρολόγιο από τα Αγγλικά στα Ελληνικά
Some English, και λίγα Ελληνικά
Μετά από μια εντολή \tl ή \tg συνεχίζουμε όπου μας έχει αφήσει η τελευταία εντολή \lt ή \gt.
Λίγα μαθηματικά σύμβολα στα οποία έβαλα συντομογραφία διότι ποτέ δεν μπορώ να θυμηθώ τις εντολές τους
(οι οποίες είναι μεγάλες):
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 
Συνεπάγεται  $\Rightarrow$ 
Αν και μόνο αν  $\Leftrightarrow$ 
```

Τα τυπικά συστήματα, μπορούν να θεωρηθούν ως εξέλιξη των διαφόρων παραστατικών συμβολιστικών συστημάτων που εμφανίστηκαν στα μαθηματικά μετά την Αναγέννηση. Κανένα όμως από αυτά δεν φαίνεται να ήταν το «καθολικό», αλλά καθένα από αυτά εξυπηρετούσε την αντίστοιχη μαθηματική πρακτική. Σταδιακά, τα τυπικά συστήματα κατέλαβαν μία εξαιρετικά πλεονεκτική θέση αξιώνοντας το ρόλο

του καθολικού, του τέλειου παραστατικού συστήματος (Ρουσόπουλος, 1991). Στη διάρκεια της ενασχόλησης επιστημόνων με το ζήτημα του «καθολικού συστήματος», παρουσιάστηκαν διάφορα προβλήματα, η λύση των οποίων οδήγησαν σε εξέλιξη τη θεωρία της μαθηματικής λογικής. Χαρακτηριστικά μπορούμε να αναφέρουμε το μεγάλο πρόβλημα της παρέμβασης της γλώσσας για τον Peano, ο οποίος ενδιαφέρεται να εξυπηρετήσει τη μαθηματική καθαρότητα και να αποφύγει της πιθανές παρερμηνείες της μαθηματικής γλώσσας. Για το λόγο αυτό κατασκευάζει ένα σύστημα αξιωμάτων για τους φυσικούς αριθμούς και χρησιμοποιεί το λογικομαθηματικό συμβολισμό με τρόπο που υπερβαίνει τις προσπάθειες των Boole και Schroeder μία εποχή, όπου δεν γνώριζε τη δουλειά του Frege (Ρουσοπουλος, 1991).

Στον ορισμό των συμβόλων από την εννοιογραφία του Frege, αναφέρονται για τη γενική θεωρία μεγεθών δύο ειδών σημεία (σύμβολα), « το πρώτο είδος αποτελείται από γράμματα, το κάθε γράμμα συμβολίζει είτε έναν αριθμό που αφήνεται απροσδιόριστος είτε μία συνάρτηση που αφήνεται απροσδιόριστη. Η απροσδιοριστία αυτή μας επιτρέπει να χρησιμοποιούμε γράμματα για να εκφράσουμε την καθολική εγκυρότητα των προτάσεων π.χ. $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$. Το καθένα από αυτά έχει το ιδιαίτερο του νόημα» (Ρουσόπουλος, 1991, σελ. 188). Αργότερα, ο Russell διαφοροποιείται από το λογικισμό του Frege, κάτι που γίνεται εμφανές από τον τρόπο που αντιμετωπίζει τους ορισμούς και τον ρόλο που παίζουν αυτοί στην αποδεικτική διαδικασία. Για τον Russell, όπως αναφέρει ο Αναπολιτάνος (1985, σελ. 232), «ένας ορισμός είναι μία καταφατική δήλωση ότι κάποιο νέο σύμβολο ή κάποιος νέος συνδυασμός συμβόλων, που εισάγεται με τον ορισμό σημαίνει το ίδιο πράγμα με κάποιο άλλο συνδυασμό συμβόλων του οποίου το νόημα είναι ήδη γνωστό». Σύμφωνα με τον Αναπολιτάνο (1985, σελ. 232) «ο ορισμός δεν είναι υπεύθυνος για την εισαγωγή νέων εννοιών που δεν προϋπήρχαν και δεν έχει κανένα οντολογικό περιεχόμενο, αλλά εισάγει ένα νέο σύμβολο ή ένα νέο συνδυασμό συμβόλων ως συντομογραφία κάποιου ήδη υπάρχοντος συνδυασμού συμβόλων. Ένα παράδειγμα θα μπορούσε να είναι η εισαγωγή στα πλαίσια της κατά Zermelo-Fraenkel θεωρίας του συμβόλου $\subseteq$ έτσι ώστε ο τύπος $x \subseteq y$ να θεωρείται συντομογραφία του τύπου $\forall z(z \in x \rightarrow z \in y)$ ».

Στο γεμάτο σύμβολα βιβλίο *Principia Mathematica* των Russell και Whitehead, γίνεται μία μεγάλη προσπάθεια για την καθιέρωση της τυποποίησης των μαθηματικών και την εδραίωση τους πάνω στη λογική. Η πολυπλοκότητα του εγχειρήματος, οδηγεί τους συγγραφείς του βιβλίου στην εισαγωγή περιττών συμβόλων και τους υποχρεώνει, να αποδεικνύουν θεωρήματα που αφορούν μόνο το συμβολισμό, όπως παρατηρεί ο Quine (1967) και αναφέρει ο Χριστοδουλίδης (1993, σελ. 81). Σύμφωνα με τη λογικιστική θεώρηση, τα μαθηματικά δεν είναι τίποτε άλλο, παρά χειρισμός συμβόλων τα οποία δεν μεταδίδουν κανένα περιεχόμενο (Χριστοδουλίδης, 1993).

SECTION D]	THE PRODUCT OF TWO RELATION-NUMBERS	487
*184.15.	$\vdash, \mu \times v \in NR$	
*184.16.	$\vdash, \mu \times v = 0_r \equiv : \mu, v \in NR - t^t \Lambda : \mu = 0_r, v = 0_r$	
*184.2.	$\vdash, \text{Mult ax}, \supset : P \in Nr^t R, C^t P \subset Nr^t S, \supset, \Sigma Nr^t P = Nr^t R \times Nr^t S$ [*183.26, *184.13]	
*184.21.	$\vdash, \text{Mult ax}, \supset : \mu, v \in NR, v \neq \Lambda, P \in \mu, C^t P \subset v, \supset, \Sigma Nr^t P = \mu \times v$ <i>Dem.</i>	
$\vdash, \#152.45, \supset \vdash : \mu \in NR, P \in \mu, \supset, \mu = Nr^t P$		(1)
$\vdash, \#152.45, \supset \vdash : v \in NR, C^t P \subset v, S \in C^t P, \supset, v = Nr^t S, C^t P \subset Nr^t S$		(2)
$\vdash, (1), (2), \#184.2, \supset$		
$\vdash, \text{Mult ax}, \supset : \mu, v \in NR, P \in \mu, C^t P \subset v, S \in C^t P, \supset,$ $\Sigma Nr^t P = Nr^t P \times Nr^t S, \mu = Nr^t P, v = Nr^t S,$		
[*13.13]	$\supset, \Sigma Nr^t P = \mu \times v$	(3)
$\vdash, (3), \#10.11.21.23, \supset$		
$\vdash, \text{Mult ax}, \supset : \mu, v \in NR, P \in \mu, C^t P \subset v, \supset, \Sigma Nr^t P = \mu \times v$		(4)
$\vdash, \#183.2, \#162.4, \supset \vdash : P = \Lambda, \supset, \Sigma Nr^t P = 0_r$		(5)
$\vdash, \#153.16, \text{Transp}, \supset \vdash : \mu \in NR, P \in \mu, P = \Lambda, \supset : \mu = 0_r :$ [*184.16]	$\supset : v \in NR - t^t \Lambda, \supset, \mu \times v = 0_r$	(6)
$\vdash, (5), (6), \supset \vdash : \mu, v \in NR, v \neq \Lambda, P \in \mu, C^t P \subset v, P = \Lambda, \supset,$ $\Sigma Nr^t P = \mu \times v$		(7)
$\vdash, (4), (7), \supset \vdash, \text{Prop}$		
*184.3.	$\vdash, (Nr^t P \times Nr^t Q) \times Nr^t R = Nr^t P \times (Nr^t Q \times Nr^t R) = Nr^t (P \times Q \times R)$ <i>Dem.</i>	
$\vdash, \#184.13, \supset \vdash, (Nr^t P \times Nr^t Q) \times Nr^t R = Nr^t (P \times Q) \times Nr^t R$		
[*184.13]	$= Nr^t (P \times Q \times R)$	
[*166.42]	$= Nr^t \{P \times (Q \times R)\}$	
[*184.13]	$= Nr^t P \times (Nr^t Q \times Nr^t R), \supset \vdash, \text{Prop}$	
*184.31.	$\vdash, (\mu \times v) \times \varpi = \mu \times (v \times \varpi)$ <i>Dem.</i>	
$\vdash, \#184.111, \supset \vdash : \sim (\mu, v, \varpi \in N_b R), \supset, (\mu \times v) \times \varpi = \Lambda, \mu \times (v \times \varpi) = \Lambda$		(1)
$\vdash, \#155.2, \supset \vdash : \mu, v, \varpi \in N_b R, \supset,$ $(\supset P, Q, R), \mu = N_{\delta^t} P, v = N_{\delta^t} Q, \varpi = N_{\delta^t} R$		(2)
$\vdash, \#184.13, \supset$ $\vdash : \mu = N_{\delta^t} P, v = N_{\delta^t} Q, \varpi = N_{\delta^t} R, \supset, (\mu \times v) \times \varpi = Nr^t \{(P \times Q) \times R\}$		
[*184.3]	$= Nr^t \{P \times (Q \times R)\}$	
[*184.13]	$= \mu \times (v \times \varpi)$	(3)
$\vdash, (2), (3), \supset \vdash : \mu, v, \varpi \in N_b R, \supset, (\mu \times v) \times \varpi = \mu \times (v \times \varpi)$		(4)
$\vdash, (1), (4), \supset \vdash, \text{Prop}$		
*184.32.	$\mu \times v \times \varpi = (\mu \times v) \times \varpi \quad \text{Df}$	

Φωτογραφία σελίδας από το βιβλίο *Principia Mathematica* των Russell και Whitehead.

Η θεμελίωση των λογικιστών και των φορμαλιστών, προσέφερε βεβαιότητα και αξιοπιστία στα μαθηματικά. Οι μεν πρώτοι, προσπαθώντας να κάνουν τα μαθηματικά ασφαλή τα μετατρέπουν σε ταυτολογία, οι δε δεύτεροι, σε ένα παιχνίδι (Davis & Hersh, 1981). Η άποψη, η οποία διατυπώνεται από τον Toth για τον φορμαλιστικό

παιχνίδι (game formalism) και αναφέρεται από τον Αναπολιτάνο (1985, σελ. 242), αποτυπώνει καθαρά τη σχέση των μαθηματικών με τα σύμβολα: *«Η αριθμητική και γενικότερα τα μαθηματικά έχουν σαν αντικείμενο τους αριθμητικά, ή μαθηματικά σύμβολα χωρίς να αποτελούν θεωρίες για συνδυαστική χρήση των συμβόλων αυτών»*. Για τους φορμαλιστές, οι κανόνες χρήσης των συμβόλων είναι έξω από το μαθηματικό παιχνίδι και δεν είναι ούτε μπορούν να αποτελέσουν το αντικείμενο μελέτης. Όπως δηλαδή οι κανόνες του σκακιού δεν αποτελούν μέρος κάποιας συγκεκριμένης παρτίδας, έτσι και οι κανόνες χρήσης των μαθηματικών δεν αποτελούν μέρος της αντίστοιχης συγκεκριμένης μαθηματικής πράξης. Σύμφωνα με τον Tomae (Αναπολιτάνος, 1985, σελ. 242), οι κανόνες για τη *«συνδυαστική χρήση των μαθηματικών συμβόλων αντιστοιχούν σε a priori ιδιότητες της νόησης και γι' αυτό δεν είναι αντικαταστάσιμοι»*. Ο μη ακριβής καθορισμός αυτών των κανόνων, οι οποίοι από τη μία διαπραγματεύονται κενά περιεχομένου μαθηματικά σύμβολα και από την άλλη προϋποθέτουν κάποιες μαθηματικές έννοιες, είναι σύμφωνα με τον Αναπολιτάνο (1985) η βασική αδυναμία του φορμαλισμού – παιχνίδι. Ένα παράδειγμα είναι το ότι *«η αναγνώριση της χρονικά επάλληλης γραφής δύο διαφορετικών συμβόλων, προϋποθέτει την έννοια του διατεταγμένου ζεύγους και κατ' επέκταση την έννοια της δυνάδας»* (Αναπολιτάνος, 1985, σελ. 243). Για τους φορμαλιστές, τα μαθηματικά έχουν κωδικοποιηθεί σε μία τυπική γλώσσα, ένα σύνολο από άδεια σύμβολα σε σειρά και οι αποδείξεις τους έχουν γραφτεί με έναν τρόπο που μπορεί να ελεγχθεί από μηχανή. Όσον αφορά τη σημασία των συμβόλων, γίνεται κάτι εξωμαθηματικό. Τα άδεια αυτά σύμβολα αποκτούν νόημα μόνο μέσα από το φορμαλιστικό παιχνίδι. Οι μαθηματικοί τύποι και οι προτάσεις δεν έχουν περιεχόμενο μέχρι να εφοδιαστούν με μία ερμηνεία, ώστε να αποκτήσουν σημασία και να μπορέσουν έτσι να χαρακτηριστούν αληθείς ή ψευδείς, κάτι που δεν έχει να κάνει με τη φυσική ερμηνεία (Davis & Hersh, 1981, Αναπολιτάνος, 1985).

Η διαδικασία της παρουσίασης των μαθηματικών ιδεών με συμβολική μορφή, είναι πλέον δεδομένη σε κάθε μαθηματική συνδιάλεξη, έχοντας ως αποτέλεσμα συχνά ένα κέρδος στην ακρίβεια και μία απώλεια στην πιστότητα. Ωστόσο, όπως γίνεται φανερό από πολλές μαθηματικές εφαρμογές, *«ορισμένες φορές φαίνεται ότι τα σύμβολα επιστρέφουν περισσότερα από όσα τους δόθηκαν, ότι είναι πιο σοφά από τους δημιουργούς των»* (Davis & Hersh, 1981 σελ. 135).

2.4 Συνεισφορά των συμβόλων στη μαθηματική σκέψη

Σε κάθε προσπάθεια να εκτιμηθεί η εξέλιξη των μαθηματικών είναι δεδομένο ότι οι έννοιες που βρίσκονται πίσω από τα σύμβολα είναι πολύ πιο σημαντικές από αυτά. Η συνεισφορά του μαθηματικού συμβολισμού όμως κατά τη διάρκεια αυτής της εξέλιξης δεν ήταν αμελητέα. Το ίδιο συμβαίνει και σε κάθε εκπαιδευτική πράξη, όπου μπορεί η κατανόηση των εννοιών από τον εκπαιδευόμενο να είναι πρωταρχικής σημασίας και επιδίωξης, παράλληλα όμως, η ερμηνεία, η κατανόηση και η ορθή χρήση του συμβολισμού, συνεισφέρει αποτελεσματικά στη διαδικασία της μάθησης.

Πολλές μαθηματικές ανακαλύψεις συντελέστηκαν στη διάρκεια των τελευταίων χρόνων, αλλά μόνο αυτές που μπόρεσαν να κατανοηθούν και από τους άλλους συνέβαλλαν στην πρόοδο της επιστήμης. Η ύπαρξη ενός **ακριβή και σαφή συμβολισμού**, ο οποίος παράλληλα, **διατηρεί την αυστηρή δομή** των εννοιών που περιγράφει, συμβάλλει προς αυτή την κατεύθυνση. Ένα παράδειγμα που ισχυροποιεί αυτήν την άποψη είναι αυτό του Hermann Grassman, ο οποίος δημοσίευσε το 1844 ένα βιβλίο με τίτλο «*Die Lineale Ausdehnungslehre*». Σήμερα αυτή η εργασία αναγνωρίζεται ως έργο ιδιοφυΐας και συγκεκριμένα μία προαναγγελία αυτού που αργότερα θα κατέληγε στη διανυσματική και τανυστική ανάλυση και στις προσεταιριστικές άλγεβρες. Επειδή όμως, η εξήγηση του συγγραφέα ήταν συγκεχυμένη, μυστικοπαθής και ασυνήθιστα αφηρημένη απώθησε τη μαθηματική κοινότητα και αγνοήθηκε για αρκετά χρόνια (Davis & Hersh, 1981). Ένα διαφορετικό παράδειγμα για ακριβή και σαφή συμβολισμό, είναι αυτό που συνδέει το σύμβολο με την έννοια της μεταβλητής. Μέχρι της αρχές του 16^{ου} αιώνα, η επίλυση προβλημάτων είχε πολύ λίγες γενικές μεθόδους. Στα τέλη του αιώνα όμως η άλγεβρα γίνεται «*συμβολική*» κατά τον Nesselmann και οι λύσεις των προβλημάτων εμφανίζονται σε μεγάλο βαθμό με μαθηματικό συμβολισμό, με χρήση συμβόλων που έχουν λίγη προφανή σύνδεση με τις οντότητες και τις ιδέες που παριστάνουν (Eves, 1981, Spagnolo, 2006). Οι Vieta και Decartes συμβάλλουν πολύ στην ανάπτυξη και εξέλιξη αυτού του συμβολισμού, εισάγοντας, ο μεν πρώτος ενιαίο γράμμα για την παράσταση των δυνάμεων μίας ποσότητας, ο δε δεύτερος, τον αριθμό για την παράσταση της δύναμης (Eves, 1981, Cajori, 1919).

Ένας συμβολισμός ο οποίος είναι εύγρηστος, απλός και λειτουργικός, συμβάλλει στην αποτελεσματική χρήση των εννοιών που παριστάνει, την ανακάλυψη σχετικών αλγορίθμων και την ευκολία των υπολογισμών. Για παράδειγμα οι εργασίες με τους αριθμούς είναι φανερό ότι εμποδίζονται από ένα πλούσιο σε αναπαραστάσεις, συμβολισμό όσο το μέγεθος των αριθμών αυξάνει. Το ινδό αραβικό σύστημα έχοντας ως αρχές (α) μία δεκαδική βάση, (β) ένα σύστημα θέσης και (γ) μία κωδικοποιημένη μορφή των δέκα ψηφίων (Boyer & Merzbach, 1997) πλεονεκτεί έναντι των υπολοίπων. Έτσι, ενώ ο υπολογισμός του γινομένου $1084 \cdot 1169$ είναι μία απλή υπόθεση κάνοντας χρήση του σύγχρονου συμβολισμού και αλγόριθμου, όταν οι αριθμοί είναι γραμμένοι σε ρωμαϊκό σύστημα, δηλαδή MLXXXIV φορές το MCLXIX ή αλφαριθμητικό σύστημα, *από φορές το ,αρσθ* , απαιτείται περισσότερος κόπος και χρόνος. Για τις αρχαίες μεθόδους πολλαπλασιασμού, την «ελληνική» και την «αιγυπτιακή», ο Van der Waerden (2003, σελ. 44) αναφέρει: *«Είναι προφανές ότι οι γραπτοί υπολογισμοί ήταν σχετικά πολύπλοκοι. Επιπλέον το χαρτί ήταν ακριβό και επομένως στην πράξη προσέφευγαν στους άβακες και την ψηφοφορία»*.

Κάτι αντίστοιχο συνέβη με τον διαφορικό και απειροστικό λογισμό των Newton και Leibniz. Αρχικά, η χρήση των απειροστών και το πηλίκο $\frac{0}{0}$ προκαλεί αντιρρήσεις και συζητήσεις μεταξύ των μαθηματικών. Στη συνέχεια ακολουθεί η νέα θεώρηση της συνάρτησης από τον Euler, αποδεσμευμένη από τη γεωμετρική αναπαράσταση και την έννοια της ταχύτητας, εστιασμένη σε αριθμούς και μεταβλητές και στις μεταξύ των σχέσεις. *«Με τον Euler η συνάρτηση προσεγγίζεται περισσότερο ως τυπική αναπαράσταση παρά ως εννοιολογική αναγνώριση μίας σχέσης. Η νέα αυτή θεώρηση στην οποία προσαρμόστηκε τόσο καλά ο συμβολισμός του Leibniz, είναι υπεύθυνη σε μεγάλο βαθμό για την αυτόματη και ραγδαία ανάπτυξη του λογισμού κατά τη διάρκεια του 18^{ου} αιώνα»* (Boyer, 1959, σελ. 242). Ο συμβολισμός του Leibniz, φαίνεται να οδηγεί πιο άμεσα και παραστατικά στην επέκταση των ιδεών και των εννοιών του λογισμού, ενώ ο συμβολισμός του Newton παρότι περιγράφει πολύ καλά την ταχύτητα και την επιτάχυνση, δείχνει να είναι ανίσχυρος για να περιγράψει λογισμό σε συνάρτηση δύο μεταβλητών, κάτι που δημιουργεί δυσκολίες στους Άγγλους μαθηματικούς που τον υιοθετούν (Bell, 1992). Για κάποιους ιστορικούς όμως, δεν είναι η διαφορά του συμβολισμού η αιτία που οδήγησε τους Άγγλους μαθηματικούς σε μειονεκτική θέση σε σχέση με τους

σύγχρονους τους κέντρο ευρωπαίους, οι οποίοι χρησιμοποίησαν τον συμβολισμό του Leibniz, στην εξέλιξη του απειροστικού λογισμού (Boyer & Merzbach, 1997).

Ορισμένες φορές, όταν η εισαγωγή νέων μαθηματικών εννοιών προκαλεί αμφιβολίες, επιστρατεύεται μία φορμαλιστική άποψη για τη σημασία των συμβόλων και τη συμβολή τους στην εξέλιξη της διαδικασίας. «Όταν για παράδειγμα ο Bombeli το 16^ο αιώνα εισήγαγε τους φανταστικούς αριθμούς για να μπορέσει να λύσει εξισώσεις όπως η $x^2 = -1$ δεν πίστευε ότι οι αριθμοί αυτοί ανήκουν στην περιοχή των υπαρκτών μαθηματικών αντικειμένων. Τουναντίον, θεώρησε πως εισάγει απλά σύμβολα τα οποία δεν αντιπροσωπεύουν τίποτα και έχουν νόημα μόνο σαν κενά στοιχεία ενός ενοποιητικού αλγεβρικού φορμαλισμού» (Αναπολιτανος, 1985, σελ. 241)

Άλλες φορές, η μορφή, το μοτίβο (pattern) που δημιουργεί το σύμβολο δημιουργεί εποπτεία και εικασία και κατευθύνει τη σκέψη των μαθηματικών οδηγώντας τους έτσι σε δημιουργία γενικεύσεων και στην εξαγωγή αντίστοιχων συμπερασμάτων. Ο Oresme για παράδειγμα, γενικεύοντας τη θεωρία αναλογιών προγενέστερων μαθηματικών, συμπεριλαμβάνει κάθε ρητή κλασματική δύναμη και δίνει κανόνες για τη σύμπτυξη των αναλογιών, αντίστοιχους με τους δικούς μας κανόνες για τους εκθέτες. «Αφού $4^3 = 64$ και $64^{1/2} = 8$ συμπεραίνει ότι $4^{1\frac{1}{2}} = 8$ Με

τον δικό του συμβολισμό: $\boxed{1p \cdot \frac{1}{2}}_4$ ή $\boxed{\frac{p \cdot 1}{1 \cdot 2}}_4$ (Cajori, 1919, σελ. 127).

Ο ίδιος, προτείνει ακόμη τη χρήση ειδικού συμβολισμού για τις κλασματικές δυνάμεις και παράλληλα, κάνει πρόταση για την ύπαρξη αρρήτων αναλογιών, αυτό που εμείς σήμερα θα γράφαμε $x^{\sqrt{2}}$. Η έλλειψη όμως επαρκούς ορολογίας και συμβολισμού δεν του επέτρεψαν να αναπτύξει αποτελεσματικά την έννοια των αρρήτων δυνάμεων (Boyer & Merzbach, 1997).

Σύμφωνα με τους Boyer & Merzbach (1997), μία από τις κύριες ανακαλύψεις του Newton, το θεώρημα του διωνύμου, ήταν αποτέλεσμα της εξέλιξης του συμβολισμού. Οι διωνυμικοί συντελεστές και οι κανόνες διαδοχής τους ήταν γνωστοί στους Cardano και Pascal, αλλά η μη χρήση του εκθετικού συμβολισμού του Descartes, δεν τους οδηγεί στην απλή μετάβαση από μία ακέραια δύναμη σε μία

κλασματική. Αυτό γίνεται από τον Newton, ως μέρος της μεθόδου του για τις απειροσειρές, μετά από την καθιέρωση της κλασματικής δύναμης από τον Wallis. Αντίστοιχη μετάβαση σε μία γενίκευση, έχουμε όταν μετά από τη σύγκριση των τεταγμένων του κύκλου $x^2+y^2=1$ και της υπερβολής $x^2-y^2=1$ για πολλά χρόνια από τους μαθηματικούς του 18^{ου} αιώνα, ο Ιταλός Vincenzo Riccati πρότεινε τον ορισμό των υπερβολικών συναρτήσεων. Αργότερα ο Lambert εισήγαγε τα σύμβολα $\sinh(x)$ $\cosh(x)$ $\tanh(x)$ για τις υπερβολικές συναρτήσεις κατ' αντιστοιχία των κυκλικών συναρτήσεων της κανονικής τριγωνομετρίας (Boyer & Merzbach, 1997).

Όμως, η δύναμη της μορφής που διαμορφώνεται από τις ίδιες τις έννοιες και κάποιες φορές και από τη συμβολική τους αναπαράσταση, δεν οδηγεί πάντοτε σε εξέλιξη. Κατά τη διάρκεια του 18^{ου} αιώνα, όπου *«είχαμε μία προσπάθεια ποσοτικής κυρίως διεύρυνσης του μαθηματικού οικοδομήματος, εμπνευσμένη από τις τεράστιες δυνατότητες των νέων εργαλείων του μαθηματικού λογισμού του 17^{ου} αιώνα, οι αποδείξεις έμοιαζαν περισσότερο με δόγματα και η διαίσθηση είχε αντικαταστήσει σχεδόν πλήρως τη λογική»* (Τουμάσης, 1999, σελ. 33). Υπήρχε μία τάση για εύρεση αποδεικτικών επιχειρημάτων από τα γεωμετρικά διαγράμματα, τη φυσική παρατήρηση, τις αυθαίρετες αρχές, όπως αυτή της διατήρηση των μορφών ακόμη και τη μεταφυσική (Τουμάσης, 1999). Αργότερα, οι μαθηματικοί του 19^{ου} αιώνα, δεν επέτρεπαν η δύναμη του συμβολισμού να υποκαταστήσει την απόδειξη διαχωρίζοντας το ζήτημα της θεμελίωσης της μαθηματικής αλήθειας από αυτό της ανακάλυψής της (Πουσόπουλος, 1991). Για τους Boyer & Merzbach (1997), η ανακάλυψη της άλγεβρας των τετραδικών που επινόησε ο Hamilton το 1834, ήταν πολύ σημαντική για την εποχή, κυρίως γιατί παρουσίασε τη μεγάλη ελευθερία των μαθηματικών να κατασκευάζουν αλγεβρικές δομές που δεν χρειαζόταν να ικανοποιούν τους περιορισμούς που έθεταν οι αποκαλούμενοι *«θεμελιώδεις νόμοι»*, οι οποίοι υποστηρίζονταν από την ασαφή αρχή της σταθερότητας της μορφής και αναφέρονταν χωρίς εξαίρεση.

Η παραγωγική δύναμη των μαθηματικών συλλογισμών και η πίστη ορισμένων σε αυτή, οδήγησε στην εφαρμογή μαθηματικών μεθόδων και σε άλλους τομείς. Οι λόγιοι του μεσαίωνα έψαχναν για λογικές αποδείξεις των θεολογικών θεωρημάτων (Davis & Hersh, 1981), η στάση του Spinoza απέναντι στην ηθική είναι *«more geometrico»*, προσεγγίζοντας στην ανάπτυξη της διατριβής του, *Ethica (Ordina*

Geometrica Demonstrata), τη δομή από το αξιωματικό σύστημα του Ευκλείδη (Bell, 1992). Τα σύμβολα και τα μαθηματικά έρχονται να βοηθήσουν στη διατύπωση νόμων και εκφράσεων, αφού έχουν τη δυνατότητα παράστασης εμπειρικών ή νοητών αντικειμένων και τη μεταξύ των σχέση. Ακόμη και όταν τα μεγέθη που υπεισέρχονται δεν είναι απολύτως μετρήσιμα, με έναν τύπο υπάρχει η δυνατότητα να δηλωθεί η μεταξύ των μεγεθών σχέση. Ο Daniel Bernoulli είναι γνωστός στα μαθηματικά από τη διάκριση που έκανε στη θεωρία πιθανοτήτων, ανάμεσα στη μαθηματική προσδοκία και στην «ηθική προσδοκία» ή ανάμεσα στη φυσική τύχη και στην ηθική τύχη. Υπέθεσε ότι μία μικρή αύξηση στα υλικά αγαθά ενός ατόμου προκαλεί μία αύξηση στην ικανοποίησή του, η οποία είναι αντιστρόφως ανάλογη με τα αγαθά. Παρουσίασε την εξίσωση που περιγράφει την παραπάνω αρχή $dm = K(dp/p)$, όπου m είναι η ηθική τύχη, p είναι τα υλικά αγαθά και K είναι μία σταθερά αναλογίας. (Boyer & Merzbach, 1997)

Τα μαθηματικά έχοντας ως χαρακτηριστικά την αφαιρετική σκέψη, τις διαδικασίες γενίκευσης, τη μεθοδολογική και λογική συμπερασματολογία, την ακριβή και σαφή περιγραφή, παρά τις δυσκολίες και κρίσεις που παρουσιάστηκαν επηρέασαν τη σκέψη και την πρακτική σε πολλούς επιστημονικούς τομείς. Το ίδιο όμως φαίνεται να συμβαίνει και με την εφαρμογή και τη διάδοση του συμβολισμού και της δομής που προέρχεται από μία σωστή χρήση του.

Χαρακτηριστικές είναι οι φράσεις του Frege (Ρουσόπουλος, 1991, σελ. 67)

«Παρηγορούμε με τη διαπίστωση ότι η τελειοποίηση της μεθοδολογίας βοηθάει επίσης στην επιστημονική πρόοδο...»

και του Russell (Wittgenstein, 1978, σελ. 35)

« Γιατί μια καλή σημειογραφία έχει την ικανότητα για λεπτές διακρίσεις και υποβολή, γεγονός που μερικές φορές την κάνει να μοιάζει με ζωντανό δάσκαλο. Σημειογραφικές αντικανονικότητες είναι συχνά το πρώτο σημάδι για την ύπαρξη φιλοσοφικών σφαλμάτων και μία τέλεια σημειογραφία θα μπορούσε να υποκαταστήσει τη σκέψη...»

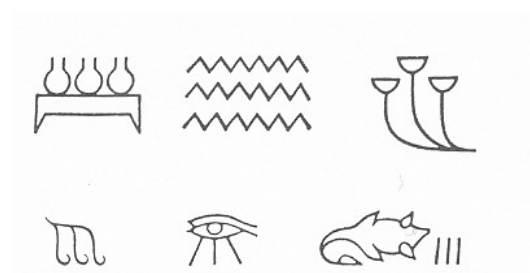
3 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΠΟΡΕΙΑ ΕΞΕΛΙΞΗΣ ΚΑΙ ΧΡΗΣΗΣ

Είναι γεγονός ότι η ιστορική πορεία εξέλιξης και χρήσης των μαθηματικών αντικειμένων καθώς και των αντίστοιχων συμβόλων, είναι συνδεδεμένη με την εξέλιξη της ίδιας της επιστήμης και του ανθρώπινου πολιτισμού. Η εξέλιξη αυτή γίνεται φανερή από την εμφάνιση νέων ιδεών, την ανακάλυψη νέων εννοιών, τη χρήση νέων μεθόδων και τεχνικών, παράλληλα με την εμφάνιση και εξέλιξη του μαθηματικού συμβολισμού. Επιστήμες και πολιτισμός αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, με αποτέλεσμα την πρόοδο και την εξέλιξη, αντικατοπτρίζοντας κάθε περίοδο ανάγκες και συμβιβασμούς της εποχής.

3.1 Το σύστημα των αριθμών

Οι πρώτες αντιλήψεις που απέκτησε ο άνθρωπος για τους αριθμούς ανάγονται στην Παλαιολιθική Εποχή, όπου η κύρια ενεργητικότητα των ανθρώπων, περιοριζόταν στις στοιχειώδεις διαδικασίες, απαραίτητες για τη συλλογή τροφής. Την περίοδο αυτή σταδιακά, οι άνθρωποι κατασκεύασαν όπλα για κυνήγι και ψάρεμα, ανέπτυξαν μία γλώσσα για επικοινωνία και αργότερα εμπλούτισαν τη ζωή τους με δημιουργικές μορφές τέχνης, οι οποίες φαίνεται να είχαν κάποιο τελετουργικό νόημα. Η πρόοδος προς την κατανόηση αριθμητικών αποτιμήσεων, θα πρέπει να συνδυαστεί με την αλλαγή στη στάση του ανθρώπου απέναντι στη φύση και την ανάγκη του ανθρώπου για την απόκτηση της τροφής. Η αλλαγή της στάσης από παθητική, με κύριο χαρακτηριστικό τη συλλογή τροφής, σε ενεργητική, η οποία χαρακτηρίζεται από την παραγωγή τροφής, φαίνεται να αναπτύσσει, παράλληλα με άλλες τεχνικές κυρίως δεξιότητες, τις βασικές αρχές της αριθμητικής όπως για παράδειγμα την ένα προς ένα αντιστοιχία δύο συνόλων (Struik, 1966). Ένα παράδειγμα σχετικό με αυτή τη διαπίστωση, προέρχεται από τη φυλή Wedda, η οποία έχει χαμηλό πολιτισμικό επίπεδο. Στη γλώσσα της φυλής αυτής, δεν υπάρχουν λέξεις για τους αριθμούς, ενώ η μέτρηση ενός πλήθους από αντικείμενα γίνεται με αντιστοίχιση των αντικειμένων αυτών, με ένα σύνολο από ραβδάκια - sticks (Menniger, 1969). Η εισαγωγή των αριθμητικών όρων σε συχνή χρήση, έγινε με αργό ρυθμό, δηλώνοντας στην αρχή μάλλον ποιότητα παρά ποσότητα. Οι λέξεις χρησιμοποιούνταν για να γίνει η διάκριση ανάμεσα στο «ένα», με την έννοια του «κάποιο» και όχι του «ένα

συγκεκριμένο», στο «δύο» και στο «πλήθος». Κάτι τέτοιο γίνεται φανερό από τους δυϊκούς τύπους που υπάρχουν σε ορισμένες γλώσσες, όπως για παράδειγμα η λέξη «τρία» εκφωνείται «δύο και ένα» (Struik, 1966). Στην Αφρική υπάρχουν ακόμη φυλές με πρωτόγονο πολιτισμό, που δεν έχουν λέξεις για την απόδοση όλων των αριθμών, όπως για παράδειγμα οι φυλή των Damara, η οποία έχει μόνο τρεις λέξεις για να εκφράσει όλους τους αριθμούς (Menniger, 1969). Κάποιοι πρωτόγονοι λαοί, σταματάνε την προφορική αρίθμηση στο τέσσερα, λέγοντας για την επόμενη σε τάξη μεγέθους ποσότητα, «είναι πολλά» (Τουμάσης, 1999, Menniger, 1969). Αυτή η διακοπή της αρίθμησης στο τέσσερα, αποδίδεται από το Menniger (1969) στο γεγονός ότι, η μέτρηση γίνεται με τα 4 δάχτυλα του χεριού – χωρίς τον αντίχειρα, ή στο ότι το «τέσσερα» δηλώνει ήδη μία σημαντική ποσότητα. Με παρόμοιο τρόπο, οι Αιγύπτιοι για να δηλώσουν την έννοια «πλήθος» ή «πολλά», παρουσιάζουν τρεις όμοιες φιγούρες (Σχήμα 1). Για παράδειγμα ένα μάτι με τρεις γραμμές για δάκρυα, δηλώνει το κλάμα.



Σχήμα 1. Σχήματα με τη χρήση του αριθμού τρία από τους Αιγυπτίους, για να δηλώσουν την έννοια «πολλά» (Menniger, 1969, σελ. 17).

Η ανάπτυξη των τεχνών και του εμπορίου, δημιούργησαν την ανάγκη για συναλλαγές και επικοινωνία μεταξύ των ανθρώπων, προωθώντας παράλληλα το σχηματισμό των γλωσσών σε μία μικρή κοινωνία. Κάτι τέτοιο, είχε ως συνέπεια την εξέλιξη της έννοιας του αριθμού, τόσο για καταγραφή μεγεθών όσο και για υπολογισμούς, ενώ παράλληλα, γεννήθηκε η ανάγκη για μέτρηση, κάτι το οποίο απαιτούσε σύγκριση με κάποιο σταθερό πρότυπο (Struik, 1966). Τα πρώτα δείγματα παράστασης αριθμών, βασίζονται στην **προσθετική αρχή**. Έτσι, οι αριθμοί παριστάνονται με γραμμές, η μία πλάι στην άλλη, οι οποίες ταξινομούνται και δημιουργούν ενότητες γραμμών συγκεκριμένου πλήθους συνήθως. Στην καθημερινή πρακτική οι άνθρωποι, εφάρμοζαν την προσθετική αρχή, με τη χρήση των δακτύλων

του ενός ή και των δύο χεριών, μία πρακτική που συνηθιζόταν στο εμπόριο.

Μία άλλη βασική αρχή της αρίθμησης, είναι η **ταξινόμηση και ομαδοποίηση** των ποσοτήτων (*ordering and grouping*), με σκοπό την ευκολία στη μέτρηση και τους υπολογισμούς. Η πρώτη πιθανή ομαδοποίηση είναι η δυάδα, όπως δηλώνει η ύπαρξη ξεχωριστής λέξης για το ζευγάρι (Menniger, 1969). Παράλληλα, οι διαδικασίες σύνδεσης των αριθμών με τα δάχτυλα των χεριών, οδήγησαν στην αρίθμηση αρχικά με βάση το πέντε και ύστερα με βάση το δέκα. Μία από τις πρώτες γραπτές αναφορές στην ομαδοποίηση με βάση το πέντε όπως επισημαίνει ο Menniger, (1969), υπάρχει στην Οδύσσεια (4, 412-413), με την λέξη «πεμπτάσσεται»

...αὐτὰρ ἐπὴν πάσας πεμπάσσεται ἡδὲ ἴδεται,
λέξεται ἐν μέσσησι, νομεὺς ὥς πώεσι μῆλων.

Η αρίθμηση με τα δάχτυλα έχει κάνει ανεξάρτητα την εμφάνιση της, σε διαφορετικούς πολιτισμούς. Για παράδειγμα, η φυλή των Ινδιάνων Dene-Dinjie σχηματίζει τις λέξεις για τους αριθμούς μέχρι το πέντε χρησιμοποιώντας λέξεις για τα δάχτυλα του χεριού, σε μία φυλή στην Ινδονησία, υπάρχει για την αρίθμηση η ομαδοποίηση με βάση το 20 και παράλληλα με την προσθήκη της λέξης «χέρι» στον βασικό αριθμό του συστήματος, εκφράζεται το 100 ($100=5 \times 20$) (Menniger, 1969), ενώ κάποιοι άλλες φυλές έχουν για τον αριθμό «δύο» τη φράση «δύο δάχτυλα» (Hughes, 1996). Η παράσταση των αριθμών με σχηματισμό των δακτύλων παρέμεινε σε εκδόσεις βιβλίων μέχρι τον 18^ο αιώνα (Menniger, 1969). Η ομαδοποίηση των αριθμών, εφαρμόζεται σταδιακά τόσο στη συμβολική παράσταση, όσο και στις λέξεις που τους περιγράφουν. Αυτό γίνεται φανερό, από το γεγονός ότι οι περισσότερες γλώσσες, σύγχρονες και μη, δομούν τις λέξεις για τους αριθμούς με βάση το 5, το 10 και το 20. Για παράδειγμα, οι λέξεις για τον αριθμό 18 έχουν ως συνθετικά, τις λέξεις «δέκα» και «οκτώ» - *achtzehn*, στα Γερμανικά - ή «είκοσι» πλην «δύο» - *duo-de-viginti*, στα Λατινικά (Menniger, 1969).

Οι διαφορετικές ανάγκες αρίθμησης, που πηγάζουν κυρίως από τις μελέτες φαινομένων, το εμπόριο και τις συναλλαγές, ήταν οι αιτίες για ομαδοποιήσεις κατά 20 ή κατά 60 μονάδες ή κατά μία ιδιαίτερη ενότητα π.χ. 12 μονάδες (ντουζίνα-δωδεκάδα). Επιπλέον, κάποιες προλήψεις για τη «μαγική- υπερφυσική» δύναμη των αριθμών, οδήγησαν στη χρήση των αριθμών αυτών για το μέτρημα σε ομάδες. Για παράδειγμα, ο αριθμός επτά, παρότι στις μέρες μας έχει χάσει την υπερφυσική του

δύναμη, παραμένει ζωντανό μέτρο ομαδοποίησης, με την εβδομάδα των επτά ημερών. Σε αυτό το αρχικό στάδιο αρίθμησης, οι λέξεις φαίνεται να εκφράζουν ένα χαρακτηριστικό για το πλήθος των μονάδων συγκεκριμένης ομάδας αντικειμένων και οι αριθμοί να περιγράφουν το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου. Για παράδειγμα περιγράφονται τα «πέντε ζώα» ως ένα σύνολο και το «πέντε» ως χαρακτηριστικό του συνόλου, αλλά όχι με την αφηρημένη έννοια (*abstract concept*) του αριθμού «πέντε» (Menniger, 1969).

Η αρχή της ένα προς ένα αντιστοιχίας, η οποία αποτελεί τη βάση για τη χρήση των δακτύλων, αποτελεί παράλληλα την προϋπόθεση για την πιο βασική μορφή γραπτής αναπαράστασης, αυτή των γραμμών. Οι επαναλαμβανόμενες γραμμές, είναι από τις παλαιότερες γνωστές μεθόδους αναπαράστασης αριθμών. Σημάδια πάνω σε κόκαλα, εγκοπές πάνω σε ραβδιά, κόμποι δεμένοι στη σειρά, και συλλογές από διάφορα βότσαλα ή όστρακα, συγκαταλέγονται επίσης, ανάμεσα στις πιο πρωτόγονες αναπαραστάσεις που έχουν βρεθεί. Τις περισσότερες φορές, οι γραμμές που αναπαριστούν αριθμούς είναι διευθετημένες σε σειρές και ταξινομημένες σε ομάδες των πέντε (Struik, 1966). Διάφορα συστήματα γραμμών έχουν χρησιμοποιηθεί μέσα στους αιώνες και χρησιμοποιούνται ακόμη και σήμερα σε κάποια μέρη της Αφρικής και της Ασίας. Σε απλές περιπτώσεις, οι γραμμές χρησιμοποιούνται σήμερα στις σύγχρονες κοινωνίες για πρακτικούς κυρίως λόγους, σε διάφορες δραστηριότητες. Για παράδειγμα χρησιμοποιούνται για ανάγκες καταγραφής σε στατιστικούς ελέγχους, όπου μία μονάδα καταγράφεται με μία γραμμή και η πεντάδα συνήθως παρουσιάζεται με την πέμπτη γραμμή πλάγια ώστε να είναι εμφανής η ομάδα των πέντε παρατηρήσεων όπως στο επόμενο σχήμα  (Hughes, 1996, Struik, 1966).

Το επόμενο βήμα στην ανάπτυξη της παράστασης των αριθμών, είναι η εισαγωγή συμβόλων και η δημιουργία των αριθμητικών συστημάτων. Τα σύμβολα που υιοθετούνται δεν έχουν πάντα προφανή σχέση με την εικονική αναπαράσταση των αριθμών με γραμμές, αλλά βασίζονται στην αρχή της ομαδοποίησης και της προσθετικής αρχής. Οι αναπαραστάσεις των αριθμών από το 1 μέχρι το 5, σχεδόν σε όλα τα πρώτα συστήματα, βασίζονται στις γραμμές, ενώ για τους μεγαλύτερους αριθμούς γίνεται εισαγωγή «κομβικών» αριθμών με σύμβολα τα οποία δεν παραπέμπουν με κάποιο τρόπο στην αξία του αριθμού (Hughes, 1996). Για παράδειγμα, το Αιγυπτιακό σύστημα όπως και το Ρωμαϊκό, ακολουθεί την

Egyptian:		Roman:	
1	Ordering	V= =V	1
10 𐪎	1. Grouping	X	10
𐪎𐪎𐪎𐪎𐪎𐪎𐪎𐪎	Ordering	L = XXXXX XXXXX = L	50×2
100 𐪏	2. Grouping	C	100
𐪏𐪏𐪏𐪏𐪏𐪏𐪏𐪏	Ordering	D=CCCCC CCCCC = D	500×2
1000 𐪑	3. Grouping	(I)	1000
𐪑𐪑𐪑𐪑𐪑𐪑𐪑𐪑	Ordering	((I) = (I)(I)(I)(I)(I) (I)(I)(I)(I)(I) = I))	5000×2
10 000 𐪓	4. Grouping	((I))	10 000
	42 374		

Στα δύο συστήματα υπάρχει μία διαφοροποίηση. Συγκεκριμένα, ενώ στο Αιγυπτιακό σύστημα, κάθε αριθμός εκτός των κομβικών, προκύπτει από τον προηγούμενο του με προσθήκη μίας γραμμής, στο Ρωμαϊκό χρησιμοποιείται σε κάποιες περιπτώσεις η έννοια της αφαίρεση (Πίνακας 1).

Σύγχρονη γραφή	Αιγυπτιακά ιερογλυφικά	Ρωμαϊκά
8		VIII (5+3)
9		IX (10-1)
19		XIX (10+9)

Παράλληλα, στο Αιγυπτιακό σύστημα υπάρχει ειδικό σύμβολο για την παράσταση των κλασματικών μονάδων, κλάσματα δηλαδή με αριθμητή τη μονάδα. Αυτή είναι η αιτία ύπαρξης στην υπολογιστική τέχνη των Αιγυπτίων, του λογισμού με σκοπό την αναγωγή σε κλάσματα της μορφής $1/a$ (Van der Wearden, 2003, Struik, 1966). Οι κλασματικές μονάδες συμβολίζονταν με το σύμβολο του αριθμού και την

προσθήκη ενός ειδικού συμβόλου στο πάνω μέρος του αριθμού, που σημαίνει μέρος. Για παράδειγμα, το $1/12$ συμβολίζεται ως $\overline{\text{IIII}}$ (Van der Wearden, 2003).

Οι Αιγύπτιοι χρησιμοποιούσαν αρχικά το ιερογλυφικό σύστημα, ενώ αργότερα το σύστημα αυτό εξελίχθηκε σε μία κρυπτογραφημένη έκδοση, η οποία ονομάζεται *ιερατική γραφή*. Η ιερατική γραφή, ήταν σύμφωνα με τον Cajori (1928), αποτέλεσμα της γρήγορης γραφής των ιερογλυφικών, με ένα είδος ραβδογλύφου πάνω σε πάπυρο. Μία Τρίτη μορφή αιγυπτιακής γραφής, (Σχήμα 3), η οποία ονομάστηκε *δημώδης* ή *λαϊκή*, αναπτύχθηκε γύρω στο 800 π.Χ. και είναι αυτή, που οδήγησε στην εκλαΐκευση της γραφής των αριθμών (Cajori, 1928).

	Einer			Zehner			Hunderte			Tausende			
1	⏏	⏏	⏏	⏏	⏏	⏏	⏏	⏏	⏏	⏏	⏏	⏏	⏏
2	⏏⏏	⏏⏏	⏏⏏	⏏⏏	⏏⏏	⏏⏏	⏏⏏	⏏⏏	⏏⏏	⏏⏏	⏏⏏	⏏⏏	⏏⏏
3	⏏⏏⏏	⏏⏏⏏	⏏⏏⏏	⏏⏏⏏	⏏⏏⏏	⏏⏏⏏	⏏⏏⏏	⏏⏏⏏	⏏⏏⏏	⏏⏏⏏	⏏⏏⏏	⏏⏏⏏	⏏⏏⏏
4	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏
5	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏
6	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏
7	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏
8	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏
9	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏	⏏⏏⏏⏏
	hierogl.	hierogl.	hierogl.	hierogl.	hierogl.	hierogl.	hierogl.	hierogl.	hierogl.	hierogl.	hierogl.	hierogl.	hierogl.

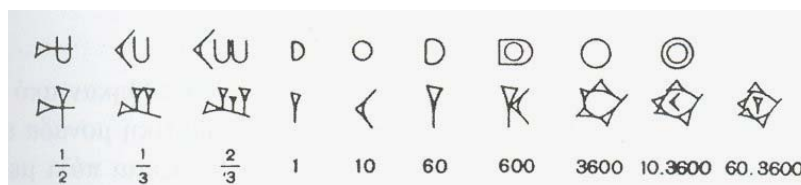
Σχήμα 3. Οι τρεις διαφορετικές γραφές ιερογλυφική, ιερατική και δημώδης, για το αριθμητικό σύστημα των Αιγυπτίων (Cajori, 1928, σελ. 12)

Οι υπολογισμοί των Αιγυπτίων, έχουν ως κυρίαρχο στοιχείο την πρόσθεση. Έτσι, τα κλάσματα γράφονται ως άθροισμα κλασματικών μονάδων και η πράξη του πολλαπλασιασμού, μία γραπτή πράξη, γράφεται και αυτή ως ένα είδος πρόσθεσης. Οι πρακτικοί υπολογισμοί γίνονταν περίπλοκοι ενώ η τάξη των γραφένων ασχολείται με αυτούς. Παράλληλα με τους πρακτικούς υπολογισμούς, στην Αίγυπτο υπήρξε και θεωρητικό ενδιαφέρον για την αριθμητική, γνωστό ως «υπολογισμοί αχά». Οι υπολογισμοί αυτοί, αντιστοιχούν σε γραμμικές εξισώσεις με ένα άγνωστο, τις οποίες

όπως και τις δυνωμικές εξισώσεις, οι Αιγύπτιοι με την επίπονη και πρωτόγονη υπολογιστική τεχνική τους, δεν μπόρεσαν να υπερβούν με επιτυχία (Van der Wearden, 2003).

Το ίδιο πολύπλοκοι και χρονοβόροι είναι οι υπολογισμοί με το Ρωμαϊκό σύστημα. Βέβαια η χρήση των αβάκων – αρχαίων υπολογιστικών μηχανών - διευκόλυναν τις διαδικασίες υπολογισμών. Οι υποστηρικτές της χρήσης ρωμαϊκών ψηφίων και του άβακα έναντι των ινδό-αραβικών, για την εκτέλεση των υπολογισμών κατά τον Μεσαίωνα, ονομάστηκαν *αβακιστές*. Τα ρωμαϊκά ψηφία διατηρήθηκαν τουλάχιστον μέχρι τα τέλη του 15^{ου} αιώνα, όπου και αντικαταστάθηκαν σταδιακά από τα σημερινά ψηφία, του ινδό-αραβικού συστήματος. Η διαμάχη ανάμεσα στους *αβακιστές*, και στους *αλγοριστές*, υποστηρικτές των ινδό-αραβικών ψηφίων και των αλγορίθμων για τους υπολογισμούς, κράτησε πάνω από 400 χρόνια (Eves, 1981).

Σε αντίθεση με τους Αιγυπτίους, οι Βαβυλώνιοι είχαν έναν θαυμάσιο συμβολισμό για τους ακεραίους και για τα κλάσματα, ο οποίος τους επέτρεπε να κάνουν υπολογισμούς με κλάσματα τόσο εύκολα όσο και με ακεραίους. Αυτό τους έδωσε τη δυνατότητα να αναπτύξουν σε υψηλό βαθμό την άλγεβρα. Οι Βαβυλώνιοι χρησιμοποιούσαν το εξηκονταδικό σύστημα και τα εξηκονταδικά κλάσματα. Το σύστημα αυτό το παρέλαβαν από τους προγενέστερους τους Σουμερίους, οι οποίοι αρχικά, δεν είχαν συστηματικό θεσιακό σύστημα για όλες τις δυνάμεις του 60 και τα πολλαπλάσια τους. Τα πρώτα σύμβολα, τα σχημάτιζαν με το άκρο στρογγυλής γραφίδας, ενώ αργότερα τα σύμβολα επιμερίστηκαν σε αποτυπώματα σφηνών (Van der Wearden, 2003). Το σχήμα του «1» και του «60» είναι το ίδιο αλλά το σχήμα του 60 έχει μεγαλύτερο μέγεθος (Σχήμα 4). Όπως παρατηρεί ο Van der Wearden (2003, σελ.33), αυτό συνέβαινε, προφανώς «επειδή το έβλεπαν σαν “μεγάλη μονάδα”».



Σχήμα 4. Σύμβολα παράστασης αριθμών από την ύστερη σουμεριακή περίοδο (Van der Wearden, 2003, σελ. 33)

Στο σύστημα των Βαβυλωνίων, οι αριθμοί γράφονταν με το συνήθη δεκαδικό συμβολισμό χρησιμοποιώντας δύο σύμβολα. Η απλή κατακόρυφη σφήνα ∇ , έχει την τιμή 1, ενώ η σφήνα με δύο άκρα $\swarrow$, την τιμή 10. Για παράδειγμα ο αριθμός 35 γραφόταν $\swarrow\swarrow\swarrow\nabla\nabla$. Το ξεχωριστό στοιχείο του συστήματος αυτού, είναι το γεγονός ότι, για τον αριθμό 60 υπάρχει πάλι το σύμβολο του αριθμού 1, οπότε παρόμοια, το σύμβολο για το 10 μπορεί να σημαίνει και τον αριθμό 10×60 . Με τα ίδια σύμβολα παριστάνονται και τα κλάσματα. Για παράδειγμα, το σύμβολο ∇ , για το 1, μπορεί να παριστάνει το 60, το 60^2 αλλά και το $1/60$ ή $1/60^2$ κλπ. Η τιμή ενός συμβόλου εξαρτάται, από τη θέση του συμβόλου μέσα στον αριθμό και για το λόγο αυτό το σύστημα χαρακτηρίζεται θεσιακό. Οι ανώτερες δυνάμεις του 60 τοποθετούνται στην αρχή και οι κατώτερες στο τέλος. Για παράδειγμα, η τιμή του συμβόλου $\nabla\swarrow\swarrow\nabla$, μπορεί να είναι $60+20+4=84$ ή $1+24/60=84/60$ ή και κάποια άλλη τιμή. Η αναγνώριση της τιμής των συμβόλων βασιζόταν στο πλαίσιο στο οποίο αναφερόταν, κάτι που αποτελούσε ένα από τα βασικά μειονεκτήματα του συστήματος αυτού κυρίως για θεωρητικά προβλήματα (Van der Wearden, 2003, Bunt, 1981). Επιπλέον, η έλλειψη ενός συμβόλου για τη μηδενική τιμή σε μία δύναμη του 60, δημιουργούσε μία ακόμη σύγχυση στην αξία ενός συμβόλου. Η έλλειψη αυτή, διορθώθηκε μερικώς αργότερα, με την εισαγωγή στη συγκεκριμένη θέση ενός συμβόλου $\swarrow$, για τη μηδενική τιμή. Για παράδειγμα, το σύμβολο $\nabla\swarrow\nabla$ με το νέο διαχωριστικό σύμβολο, δηλώνει τον αριθμό $1 \times 60^2 + 0 \times 60 + 4 = 3604$ ενώ χωρίς το διαχωριστικό θα μπορούσε να δηλώνει και τον αριθμό $1 \times 60 + 4 = 64$ (Van der Wearden, 2003).

Αντίθετα με το ευφύες σύστημα των Βαβυλωνίων, ο Ελληνικός συμβολισμός, είναι απλοϊκός και δύσχρηστος. Το αρχικό σύστημα Ελλήνων, το Ηρωδιανικό, μοιάζει με αυτό των Ρωμαίων, αλλά με χρήση των γραμμάτων στο σχηματισμό των συμβόλων (Σχήμα 5). Είναι φανερό ότι χρησιμοποιούνται τα γράμματα Π, Δ, Χ και Μ τα οποία είναι τα αρχικά γράμματα των λέξεων *Πέντε*, *Δέκα*, *Χίλιοι*, και *Μύριοι*, και το Η, για το *Εκατό*. Το σύστημα αυτό, το χρησιμοποιούσαν αποκλειστικά για πληθικούς αριθμούς (Van der Wearden, 2003, Heath, 2001).

Ι	Γ	Δ	Ε	Η	Θ	Χ	Ψ	Μ	Ρ
1	5	10	50	100	500	1000	5000	10 ⁴	5 · 10 ⁴

Σχήμα 5. Ο συμβολισμός των Ελλήνων, ο οποίος καλείται *Ηρωδιανικό* σύστημα (Van der Wearden, 2003, σελ. 42).

Αργότερα, εισήχθη ένας πιο σύντομος, αλφαβητικός συμβολισμός με τα 24 γράμματα του αλφαβήτου και τα σύμβολα **²** **³** και **μ** (Πίνακας 2). Με συνδυασμούς των γραμμάτων και των συμβόλων, μπορούσαν να παριστάνουν τους αριθμούς μέχρι το 999, καθώς και με την προσθήκη μίας γραμμής στο κάτω μέρος να πολλαπλασιάζουν επί χίλια την αξία της συμβολικής παράστασης για τα πρώτα 9 σύμβολα. Για να διακρίνονται οι αριθμοί από τις λέξεις, προσθέτανε ένα τόνο στο τέλος ή τοποθετούσαν μία παύλα πάνω από τα γράμματα. Για παράδειγμα ο αριθμός 1305 συμβολίζεται ,ατε´ ή ,ατε , ο αριθμός ,γ´ είναι 3.000, ενώ ο ,δτηβ´ είναι 4.352. Η αλλαγή αυτή σύμφωνα με τον Cajori (1928) οφείλεται στις εμπορικές συναλλαγές των Ελλήνων, με Φοίνικες, Σύριους και Άραβες.

A=1	I=10	P=100
B=2	K=20	Σ=200
Γ=3	Λ=30	T=300
Δ=4	M=40	Υ=400
E=5	N=50	Φ=500
² =6	Ξ=60	X=600
Z=7	O=70	Ψ=700
H=8	Π=80	Ω=800
Θ=9	³ =90	μ =900

Πίνακας 2. Η παράσταση των αριθμών με γράμματα και σύμβολα από τους Έλληνες

Το σύμβολο **²** ονομάστηκε Στίγμα, το σύμβολο **³** είναι το αρχαίο Κόππα και το σύμβολο **μ** είναι το αρχαίο Σαμπί (Heath, 2001).

Για αριθμούς μεγαλύτερους της μυριάδας $M=10.000$, οι Έλληνες χρησιμοποιούσαν το σύμβολο M με τον αριθμό για την δύναμη στο πάνω μέρος, δηλαδή ο αριθμός $M^{\kappa\epsilon}$ μγ' είναι ο 250043 (Van der Wearden, 2003). Για αριθμούς με μεγαλύτερες δυνάμεις του *Μύρια* ο Αρχιμήδης και ο Απολλώνιος ανέπτυξαν ένα σύστημα, το οποίο δεν συνδέεται με τον συνηθισμένο αριθμητικό συμβολισμό και έπαιξε περισσότερο ρόλο γυμνάσματος (Heath, 2001). Το βασικό μειονέκτημα του αλφαβητικού συμβολικού συστήματος, ήταν το γεγονός ότι, καθιστούσε τις σχέσεις ανάμεσα στους αριθμούς ασαφείς. Για παράδειγμα, δεν υπήρχε φανερός συσχετισμός ανάμεσα στους αριθμούς, τέσσερα (δ'), σαράντα (μ') και τετρακόσια (υ'). Επιπλέον, καθώς το σύστημα δεν χρησιμοποιούσε την αξία θέσης, μπορούσε να λειτουργεί χωρίς μηδέν, με αποτέλεσμα κάποιες ιδιότητες των πολλαπλασίων του 10, να μην είναι φανερές. Για παράδειγμα, η πρόσθεση του 3 με το 4 δίνει 7, αλλά αυτό δεν φανερώνει, ότι η πρόσθεση του 30 με το 40 έχει αποτέλεσμα το 70 (Hughes, 1996). Παρόλο που οι Έλληνες έκαναν με αρκετά μεγάλη ευκολία υπολογισμούς με το σύστημα αυτό, σύμφωνα με τον Van der Wearden (2003, σελ. 43) *«η χρήση γραμμάτων για την παράσταση καθορισμένων αριθμών δεν ήταν επωφελής για την ανάπτυξη της άλγεβρας στην Ελλάδα»*, αφού δεν παρείχε τη δυνατότητα παράστασης των άγνωστων ποσοτήτων με τα ίδια γράμματα. Αργότερα, η διατήρηση των πρώτων εννέα ψηφίων και η προσθήκη ενός συμβόλου «Ϸ» για το μηδέν από τους σοφούς του Βυζαντίου, σύμφωνα με τους Boyer & Merzbach (1997), καθιστούσε το σύστημα με τα γράμματα εξίσου λειτουργικό με το σημερινό, αφού οι μορφές των αριθμών ήταν παρόμοιες. Για παράδειγμα ο αριθμός 3520 γραφόταν ως «γεβϷ».

Η παράσταση των αριθμών στην Κίνα και την Ιαπωνία ακολουθεί αρχικά παρόμοιους κανόνες επανάληψης γραμμών για τους μικρούς αριθμούς αλλά η παράσταση των μεγαλύτερων χρησιμοποιεί ιδιαίτερα σχήματα. Στην Κίνα όμως, πριν το 221 π.Χ., έχει γίνει αποδεκτό ένα διαφορετικό σύστημα παράστασης αριθμών, με χρήση μόνο οριζοντίων και καθέτων γραμμών (Lam Lay-Yong, 1986, Cajori, 1928).

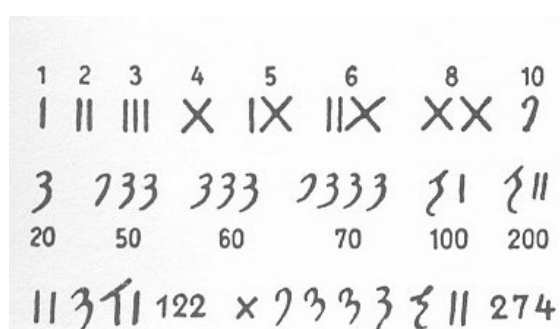
Στο Κινέζικο αυτό σύστημα παράστασης αριθμών (Πίνακας 3), υπάρχει η παράσταση με κατακόρυφες γραμμές για τις μονάδες, με οριζόντιες γραμμές για τις δεκάδες, πάλι με κατακόρυφες γραμμές για τις εκατοντάδες, πάλι με οριζόντιες γραμμές για τις χιλιάδες, και ούτω καθ' εξής, όπως φαίνεται στον επόμενο πίνακα:

Θέση	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Μονάδες						⏟	⏟⏟	⏟⏟⏟	⏟⏟⏟⏟
Δεκάδες	—	=	≡	≡≡	≡≡≡	⏟	⏟⏟	⏟⏟⏟	⏟⏟⏟⏟

Πίνακας 3. Η παράσταση των αριθμών σύμφωνα με ένα κινέζικο σύστημα (Lay-Yong, 1986).

Στο σύστημα αυτό που χρησιμοποιούσαν οι Κινέζοι από τη δυναστεία του Shang, υπάρχει η αρχή της αξίας θέσης, σύμφωνα με την οποία ένα ψηφίο έχει αριθμητική τιμή, ανάλογα με τη θέση του στην παράσταση του αριθμού. Για παράδειγμα ο αριθμός 94571 συμβολίζεται « $\overline{\text{||||}} \equiv \text{|||||} \underline{\text{||}} |$ ». Επιπλέον, υπήρχε δυνατότητα παράστασης του μηδενός, για μία δύναμη του δέκα, αφήνοντας κενή την αντίστοιχη θέση (Lay-Yong, 1986).

Η εξέλιξη του αριθμητικού συμβολισμού στην Ινδία, ακολούθησε τον ίδιο δρόμο που ακολούθησε και στην Ελλάδα. Οι χαράξεις της πρώτης περιόδου, παρουσιάζουν κατ' αρχήν απλές κατακόρυφες γραμμές ταξινομημένες σε ομάδες. Τον τρίτο π.Χ. αιώνα οι Ινδοί, χρησιμοποιούσαν ένα σύστημα που θύμιζε το Ηρωδιανικό. Στο νεώτερο αυτό σύστημα διατηρήθηκε η αρχή της επανάληψης και υπήρχαν καινούρια σύμβολα για το τέσσερα, το δέκα, το είκοσι και το εκατό. Το σύστημα αυτό είναι γνωστό ως γραφή Kharosti (Boyer & Merzbach, 1997, σελ. 237).



Σχήμα 6. Ταξινομημένοι αριθμοί με γραφή Kharosti (Menniger, 1969, σελ. 50).

Η γραφή Kharosti αντικαταστάθηκε σταδιακά από το σύστημα με χαρακτήρες Brahmi (Σχήμα 7), παρόλο που λείπει το σύμβολο για το μηδέν και το σύστημα δεν είναι θεσιακό, υπάρχουν στοιχεία ικανά να δικαιολογήσουν τη μετέπειτα ανάπτυξη, όπως για παράδειγμα, το γεγονός ότι κάθε αριθμός μικρότερος του 10 παριστάνεται

με ένα μόνο σύμβολο και όχι με σύμπλεγμα συμβόλων, ενώ με γρήγορή γραφή τα σύμβολα για το δύο και το τρία παραπέμπουν στα σημερινά (Van der Wearden, 2003, Menniger, 1969).

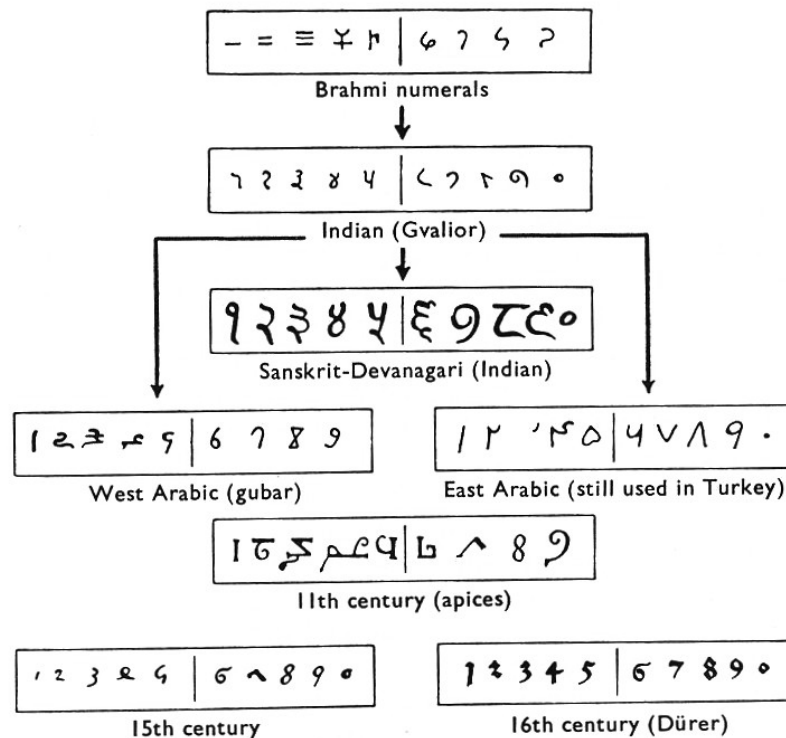
Units	Digits	— 1	= 2	≡ 3	𑀵 4	𑀶 5	𑀷 6	𑀸 7	𑀹 8	𑀺 9
Tens	Enciphering	𑀭 10	𑀮 20	𑀯 30	𑀰 40	𑀱 50	𑀲 60	𑀳 70	𑀴 80	𑀵 90
Hundreds and Thousands	Place-value notation	𑀭𑀭 100	𑀭𑀮 2H	𑀭𑀯 3H	𑀭𑀰 4H	𑀭𑀱 5H	𑀭𑀲 1000	𑀭𑀳 4Th	𑀭𑀴 70Th	

Σχήμα 7. Αριθμοί με γραφή Brahmi (Menniger, 1969, σελ. 395).

Η εξέλιξη που ακολούθησαν οι χαρακτήρες Brahmi, οδήγησαν στο σημερινό θεσιακό σύστημα με τα γνωστά σύμβολα Gvalior για τα εννέα ψηφία και την προσθήκη ειδικού συμβόλου για το μηδέν (Menniger, 1969). Ειδικά για το σύμβολο και την έννοια του μηδενός, ο Freudenthal, όπως αναφέρει ο Van der Wearden (2003) πιστεύει, ότι υπάρχει σχέση ανάμεσα στο σημερινό μηδέν και αυτό που χρησιμοποιούσαν οι Βαβυλώνιοι και οι Έλληνες. Η προέλευση του συμβόλου «0» σύμφωνα με τους Menniger, (1969) και Cajori (1928), μπορεί να είναι το αρχικό γράμμα «ο-όμικρον» της λέξης «ουδέν» το οποίο χρησιμοποιούσαν στα εξηκονταδικά κλάσματα ή το σύμβολο 𑀭 για τον αριθμό δέκα στη γραφή Brahmi (Σχήμα 7). Βασικό στοιχείο του νέου συστήματος, είναι η αρχή της αξίας θέσης για κάθε ψηφίο του αριθμού. Είναι πολύ πιθανό οι Ινδοί αστρονόμοι και υπολογιστές, να γνώριζαν την αρχή αυτή, αφού τη χρησιμοποιούσαν στους ποιητικούς και συλλαβικούς αριθμούς (Van der Wearden, 2003). Πολλοί ιστορικοί εκφράζουν την άποψη, ότι αυτή η εξέλιξη των συμβόλων και η αξιοποίηση της αρχής του θεσιακού συστήματος για την παράσταση των αριθμών από τους Ινδούς, πιθανόν να προήλθε από την αξιοποίηση στοιχείων από την Ελληνική αστρονομία, τη Βαβυλωνιακή και Κινέζικη μέθοδο παράστασης των αριθμών (Van der Wearden, 2003, Boyer & Merzbach, 1997, Lay-Yong, 1986, Struik, 1966).

Τα σύμβολα Gvalior, εξελίχθηκαν σε (α) Δυτικά Αραβικά (*gubar*), τα οποία εξελίχθηκαν στα σημερινά σύμβολα και (β) Ανατολικά Αραβικά, τα οποία χρησιμοποιούνται σήμερα σε αρκετές αραβικές χώρες. Τα σύμβολα Brahmi, όπως

φανερώνει και ο πίνακας του Σχήματος 8, είναι ο πρόγονος πολλών τοπικών μορφών στην Ινδία οι οποίες χρησιμοποιούνται ακόμη και σήμερα (Menniger, 1969)



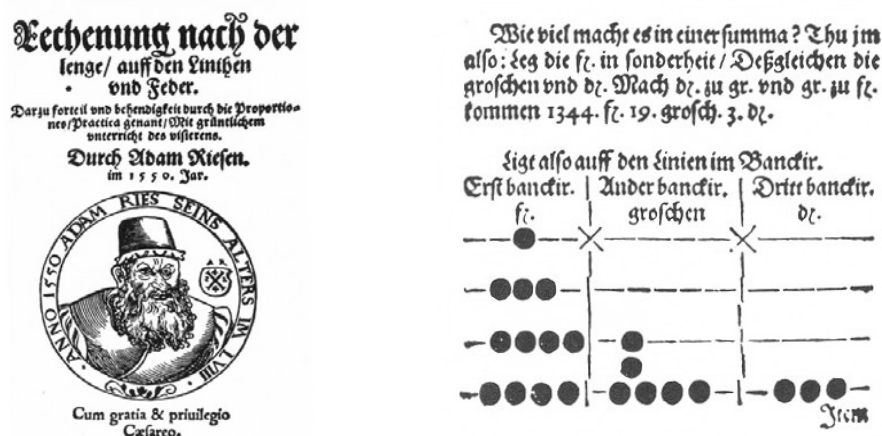
Σχήμα 8. Η εξέλιξη των ψηφίων μέχρι τη σημερινή τους μορφή σε διάφορες ενδιάμεσες μορφές, σύμφωνα με τον Menniger, (1969, σελ.418)

Η συμβολή των Αράβων στην εξέλιξη και διάδοση του σημερινού συστήματος αρίθμησης, είναι καθοριστικής σημασίας και περιγράφεται από τον Menniger, (1969, σελ. 406) με τη φράση «οι αριθμοί των Ινδών στα χέρια των Αράβων» (*The Indian numerals in Arab hands*). Στον ισλαμικό επιστημονικό κόσμο, πριν υιοθετηθεί το ινδικό σύστημα παράστασης, συνυπήρχαν το ελληνικό σύστημα και τοπικά αλφαριθμητικά συστήματα αρίθμησης παρόμοια με το ελληνικό (Cajori, 1928, Struik, 1966, Lay-Yong, 1986). Η πρώτη γνωστή αναφορά στα ινδικά ψηφία, είναι αυτή του Σύριου επισκόπου Severus Sebokht (Σεβέριου Σέμποκτ) σε μία εργασία του γραμμένη το 622 μ.Χ.. Σε αυτή την εργασία, ο επίσκοπος αναφέρεται στα επιτεύγματα των Ινδών και «τις πολύτιμες υπολογιστικές μεθόδους τους και τους υπολογισμούς τους που ξεπερνούν τη φαντασία. Θέλω μόνο να πω ότι, αυτοί οι υπολογισμοί γίνονται με εννέα μόνο ψηφία». Προφανώς, τα ψηφία αυτά ήταν ήδη σε χρήση, κάτι που μαρτυρεί μία ινδική επιγραφή του έτους 595 και η οποία αναφέρεται

στο έτος «346» (Boyer & Merzbach, 1997, Struik, 1966) Η γνώση των ινδικών ψηφίων και του συστήματος αρίθμησης από τους Άραβες, φαίνεται να άρχισε από μία αστρονομική πραγματεία (Σιδχάντα), μεταφρασμένη από τα Σανσκριτικά στα Αραβικά (Menniger, 1969). Η χρήση των ψηφίων αυτών είχε σαν αποτέλεσμα την εξάπλωσή τους σε όλα τα Αραβικά κέντρα πολιτισμού και επιστημών της εποχής, από τον Ινδό ποταμό μέχρι και τα Πυρηναία. Επιπλέον, κατά τη διάρκεια των 8^{ου} και 9^{ου} αιώνων η αραβοκρατούμενη Ισπανία, αποτελούσε κέντρο εκπαίδευσης για την υπόλοιπη Ευρώπη και πολλοί ήταν οι Ευρωπαίοι που σπούδαζαν σε πόλεις της Ισπανίας. Με τον τρόπο αυτό, μεταφέρθηκαν αραβικές και ελληνικές επιστημονικές γνώσεις, οι οποίες ήταν άγνωστες μέχρι τότε στην Ευρώπη (Menniger, 1969, Van der Wearden, 2003). Από την Ισπανία γίνεται και η εισαγωγή του ινδό-αραβικού συστήματος αρίθμησης στην Ευρώπη, με πρώτη προσπάθεια από ένα μικρό βιβλίο του εκκλησιαστικού μαθηματικού Gerbert (αργότερα Πάπας Σιλβέστρος Β΄) τον 10 αιώνα. Στη συνέχεια, το 12^ο αιώνα, τα εννέα ψηφία μαζί με το μηδέν, εμφανίζονται στην Ευρώπη σε μεταφρασμένα έργα του Al Khwarizmi. Συγκεκριμένα, τα νέα ψηφία εμφανίζονται σε λατινική μετάφραση ενός έργου ειδικά για τον ινδικό λογισμό, με τίτλο «*Algorithmi de numero Indorum*», καθώς και στη μετάφραση του βιβλίου αριθμητικής «*Hisab aljabr w'almuqabala*». Και οι δύο αυτές μεταφράσεις, συνεισφέρουν στη διάδοση του νέου συστήματος (Boyer & Merzbach, 1997, Van der Wearden, 2003, Menniger, 1969, Struik, 1966).

Τη σημαντικότερη συμβολή στη διάδοση του νέου συστήματος κατά τη μεταβατική διαδικασία, παρείχε το έργο του Leonardo di Pisa *Liber abaci*, το οποίο έκανε την εμφάνισή του το 1202 στην Ιταλία και αναφέρεται στους αριθμούς και τους υπολογισμούς χωρίς τον άβακα, παρά τον παραπλανητικό τίτλο του. Συγκεκριμένα, περιγράφει τα εννέα ινδικά ψηφία, το σύμβολο 0, καθώς και μια πλήρη μελέτη αλγεβρικών μεθόδων και προβλημάτων στα οποία συνιστάται η χρήση των ινδό-αραβικών ψηφίων (Boyer & Merzbach, 1997). Κατά τα χρόνια του Βυζαντίου, ο Μάξιμος Πλανούδος, έγραψε ένα έργο για το ινδικό σύστημα αρίθμησης, το οποίο είχε γίνει πλέον γνωστό και στον ελληνικό κόσμο, μάλλον από τον Leonardo di Pisa. Αργότερα ο ίδιος ο Πλανούδος, αντικατέστησε τα δυτικά, με τα ανατολικά- αραβικά ψηφία (Boyer & Merzbach, 1997, Vogel, 1996).

Η διάδοση και η εδραίωση του νέου ινδό-αραβικού συστήματος και των αλγορίθμων, έναντι του ρωμαϊκού και του άβακα, δεν ήταν μια απλή υπόθεση, αφού τα νέα ψηφία ήταν εύκολο να αλλοιωθούν και να διαφοροποιηθεί η αξία των μεγεθών που περιέγραφαν (Van der Wearden, 2003). Σε μερικές περιπτώσεις έχουν βρεθεί και παραστάσεις με μία ενδιάμεση μορφή όπως για παράδειγμα η II^mIII^cXV για τον αριθμό 2315 (Struik, 1966). Τα πλεονεκτήματα του νέου συστήματος, έγιναν σιγά-σιγά αντιληπτά σε ολόκληρη την Ευρώπη. Παρόλο που η επικράτηση του νέου συστήματος χρειάστηκε πάνω από 400 χρόνια, τελικά όλοι αυτοί που εμπλέκονταν στις διαδικασίες υπολογισμών, το υιοθέτησαν. Παράλληλα, υπήρξε πληθώρα βιβλίων αριθμητικής, με επεξηγήσεις για τους υπολογισμούς με το νέο σύστημα, με πιο φημισμένη αυτήν, του Adam Riese (Σχήμα 9) στη Γερμανία.



Σχήμα 9. Το εξώφυλλο και μία σελίδα από τη άλγεβρα του Adam Riese (Menniger, 1969, σελ. 437 & 352)

Η τελική η επικράτηση του ινδό-αραβικού συστήματος αρίθμησης ήρθε μετά τον 15^ο αιώνα και η χρήση του διαδόθηκε τόσο στον εμπορικό κόσμο όσο και στον απλό λαό. Η λέξη «ινδό-αραβικό» σύστημα, αποδίδει την Ινδική προέλευσή του συστήματος αυτού και τη συμβολή των Αράβων στη εξέλιξη και διάδοσή του. Χαρακτηριστική είναι η άποψη του Van der Wearden, (2003, σελ. 55) σύμφωνα με την οποία, «Οι Ινδοί ανέπτυξαν τον τελειότερο συμβολισμό των αριθμών που γνωρίζουμε» και η δήλωση του Menniger, (1969, σελ. 55), «Η γλώσσα μας είναι Γερμανική, η γραφή μας Ρωμαϊκή, και οι αριθμοί μας Ινδικοί».

3.2 Σύμβολα στη γεωμετρία και την άλγεβρα

Τα σύμβολα στη Γεωμετρία και την Άλγεβρα, αναπτύσσονται παράλληλα. Ο διαχωρισμός τους στις δύο αυτές ενότητες, είναι μόνο για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας και όπως είναι φυσικό, οι δύο αυτοί τομείς έχουν πολλά κοινά σύμβολα.

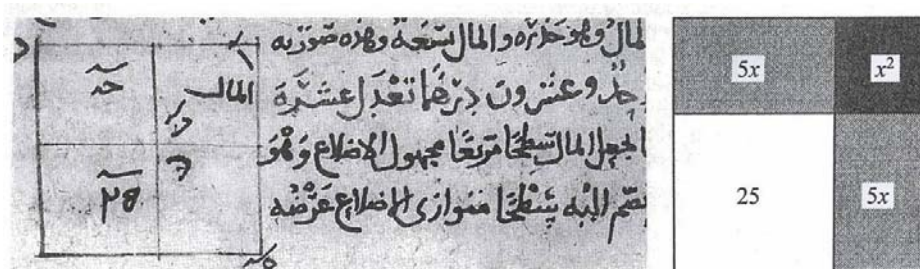
3.2.1 Σύμβολα στη Γεωμετρία

Η ενασχόληση του ανθρώπου με τα γεωμετρικά σχήματα καθώς επίσης και με ορισμένες από τις ιδιότητες τους χάνεται στο βάθος των αιώνων. Γεωμετρικά σχήματα έχουν βρεθεί ως διακοσμητικά σε αγγεία, υφάσματα και καλάθια σε διάφορα μέρη της γης, τα οποία προέρχονται από διαφορετικούς πολιτισμούς. Ορισμένες φορές μάλιστα, διάφορα μαγικά στοιχεία συνδέονται με τις αντιλήψεις των ανθρώπων για τα γεωμετρικά σχήματα, όπως επίσης και για τους αριθμούς. Αυτού του είδους οι αντιλήψεις, οδήγησαν στο χαρακτηρισμό των σχημάτων «πεντάλφα» και «σβάστικά» και των αριθμών 3, 4 και 7 ως «μαγικών» (Struik, 1966).

Οι πηγές που διαθέτουμε σχετικά με τη συστηματική μελέτη των ανθρώπων για τα σχήματα και το χαρακτηρισμό αυτής της δραστηριότητας ως «γεωμετρία», είναι περιορισμένες. Σύμφωνα με μαρτυρίες, τις οποίες παρέχουν ο Ηρόδοτος, ο Δημόκριτος, ο Εύδημος, ο Ήρωνας και άλλοι αρχαίοι Έλληνες συγγραφείς, η γεωμετρία είναι δημιούργημα των Αιγυπτίων (Χριστιανίνδης, 2003). Η Αιγυπτιακή γεωμετρία για πολλούς ερευνητές είναι απλώς εφαρμοσμένη αριθμητική που εξυπηρετούσε ανάγκες της καθημερινότητας και ως εκ τούτου, η δημιουργία της γεωμετρίας ως επιστήμη της μελέτης των ιδιοτήτων του χώρου είναι αποκλειστικό έργο των αρχαίων Ελλήνων (Σταμάτης, 1975, Van der Waerden, 2003). Το αρχαιότερο σωζόμενο δείγμα μαθηματικού έργου, γραμμένο με μεγάλη συνέπεια σε αξιωματική-παραγωγική μορφή, είναι τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη. Στο έργο αυτό κυρίως, οφείλεται η διάδοση και η επικράτηση της γεωμετρικής σκέψης και της αποδεδεικτικής διαδικασίας στην επιστήμη μέχρι το 17^ο αιώνα (Χριστιανίνδης, 2003).

Τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη, άσκησαν καθ' όλη τη διάρκεια των μαθηματικών ανακαλύψεων μεγάλη επίδραση τόσο στη γεωμετρική σκέψη και εποπτεία, όσο και

στην επίλυση αλγεβρικών προβλημάτων. Μέθοδοι με τις οποίες τα γεωμετρικά σχήματα περιγράφουν «μεγέθη», δηλαδή τους σημερινούς πραγματικούς αριθμούς, παρατηρούνται στη λύση και την απόδειξη πολλών αλγεβρικών προβλημάτων στα *Στοιχεία*, καθώς και σε μεταγενέστερα κείμενα. Σε αραβικό χειρόγραφο (Σχήμα 10) του 1342, παρουσιάζεται η γεωμετρική επίλυση της εξίσωσης $x^2+10x=39$ με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου, όπως δείχνει η σύγχρονη έκφραση της.



Σχήμα 10. Αραβικό χειρόγραφο με γεωμετρική επίλυση τετραγωνικής εξίσωσης και σύγχρονη έκφραση (Hairer et al., 2000)

Ακόμη και μέχρι τον 16^ο μ.Χ. αιώνα φαίνεται να γίνεται αντιστοίχιση μεγεθών, όπως όγκος, εμβαδόν, μήκος κλπ. σε εκφράσεις με σύγχρονη παράσταση x^2 , x^3 , $6x$ κλπ όταν πρόκειται να βρεθεί η λύση εξισώσεων μέχρι και 3^{ου} βαθμού. Για παράδειγμα, ο Cardano στο έργο του *Ars Magna* ενώ αναφέρεται σε αλγεβρικές εξισώσεις, σκέφτεται γεωμετρικά για τη λύση της εξίσωσης $x^3 + 6x = 20$, γράφοντας «έστω ο κύβος και το εξαπλάσιο της πλευράς του ισούται με 20» (Boyer & Merzbach, 1997).

Στη γεωμετρία των αρχαίων Ελλήνων, η παράσταση των γεωμετρικών αντικειμένων γίνεται με την απεικόνιση της εικόνας τους (Σπύρου, 2005), κάτι που εξακολουθεί να γίνεται και αργότερα στη μελέτη της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Συνεπώς, κάθε φορά που χρειάζεται να γίνει αναφορά σε κάποιο αντικείμενο όπως η ευθεία, το ευθύγραμμο τμήμα, το τρίγωνο, το τετράγωνο, ο κύκλος κλπ. σχεδιάζεται ένα αντίστοιχο σχήμα. Οι λέξεις της φυσικής γλώσσας, βρίσκονται πάντα στην έκφραση και τον μετασχηματισμό ενός συλλογισμού για να δηλώσουν το συγκεκριμένο αντικείμενο-σχήμα και τα τμήματα που το αποτελούν. Τα κεφαλαία γράμματα χρησιμοποιούνται για να παραστήσουν σημεία και συγκεκριμένα γεωμετρικά σχήματα, άλλοτε μόνα τους και άλλοτε σε σύμπλεγμα δύο και περισσότερων γραμμάτων. Αυτό φαίνεται καθαρά από την πρώτη κιόλας πρόταση των *Στοιχείων* του Ευκλείδη.

Ευκλείδη Στοιχεία, Πρόταση 1η

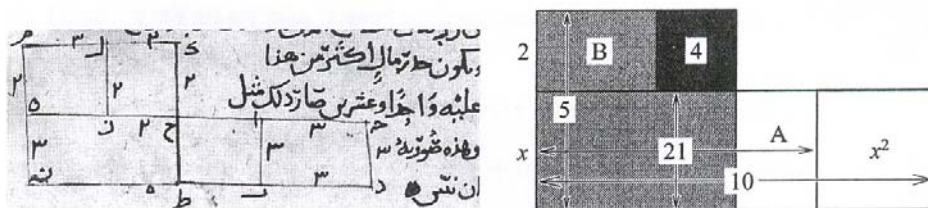
Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ AB .

Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς AB εὐθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Κέντρῳ μὲν τῷ A διαστήματι δὲ τῷ AB κύκλος γεγράφθω ὁ $BΓΔ$, καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ B διαστήματι δὲ τῷ BA κύκλος γεγράφθω ὁ $ΑΓΕ$, καὶ ἀπὸ τοῦ $Γ$ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ A, B σημεία ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ $ΓΑ, ΓΒ$.

Καὶ ἐπεὶ τὸ A σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $ΓΔΒ$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ $ΑΓ$ τῇ $ΑΒ$. πάλιν, ἐπεὶ τὸ B σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $ΓΑΕ$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ $ΒΓ$ τῇ $ΒΑ$. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ $ΓΑ$ τῇ $ΑΒ$ ἴση· ἑκάτερα ἄρα τῶν $ΓΑ, ΓΒ$ τῇ $ΑΒ$ ἐστὶν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ $ΓΑ$ ἄρα τῇ $ΓΒ$ ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ $ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

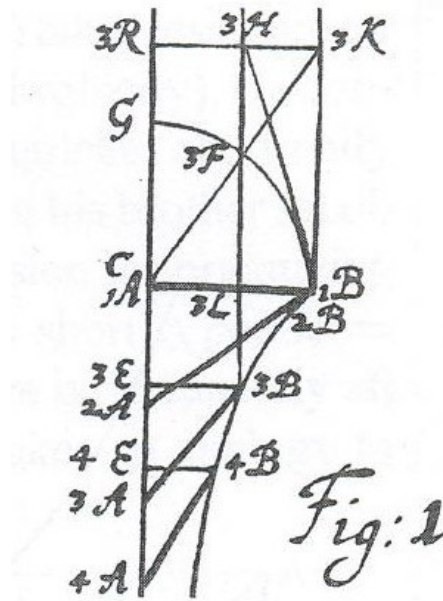
Ἡ μέθοδος παράστασης, σύμφωνα με την οποία τα σημεία, οι ευθείες και γενικά τα γεωμετρικά σχήματα παριστάνονται με γράμματα, υιοθετήθηκε αργότερα τόσο από Άραβες, όσο και από Δυτικοευρωπαίους μαθηματικούς για τις γεωμετρικές εφαρμογές και μελέτες. Σε αραβικό χειρόγραφο του 1342 (Σχήμα 11), φαίνονται σε σχήμα σημειωμένες διαστάσεις και σημεία, έτσι ώστε να γίνει σαφέστερο το κείμενο που αναφέρεται σε επίλυση εξίσωσης 2^{ου} βαθμού.



Σχήμα 11. Αραβικό χειρόγραφο με σημειωμένες διαστάσεις σε γεωμετρικό σχήμα (Hairer et al., 2000).

Ο Leonardo di Pisa και ο Regiomontanus χρησιμοποιούσαν τα πεζά λατινικά γράμματα εκτός των c και f , ενώ ο Stevin το 1634 χρησιμοποιεί κεφαλαία γράμματα με κουκίδα, δηλαδή $\dot{B}$, $\ddot{B}$, $\ddot{\ddot{B}}$, για τις κορυφές ενός τριγώνου. Ο Leibniz το 1676 χρησιμοποιεί τα κεφαλαία και μικρά γράμματα με ένα μικρό αριθμό στα δεξιά, δηλαδή ${}_1B$, ${}_2B$, ${}_3B$, ${}_1D$, ${}_2D$, ${}_3D$ και ${}_1b$, ${}_2b$, ${}_3b$ για σημεία του ίδιου σχήματος και για

κινούμενα σημεία σε μία καμπύλη. Ο συμβολισμός αυτός του Leibniz, μοιάζει με αυτόν που θα εισάγει ο ίδιος για τα στοιχεία μίας ορίζουσας. Στο Σχήμα 12, φαίνεται ο συμβολισμός του Leibniz για σημεία σε μία καμπύλη.



Σχήμα 12. Ο συμβολισμός του Leibniz για σημεία καμπύλης (Hairer et al., 2000).

Για τις κορυφές τριγώνου ο Euler, χρησιμοποιεί γράμματα με τόνους, δηλαδή x' , x'' , x''' και y' , y'' , y''' , ενώ είναι υπεύθυνος για την εισαγωγή ενός ιδιαίτερου συμβολισμού των στοιχείων ενός τριγώνου, σύμφωνα με τον οποίο χρησιμοποιούνται τα πεζά γράμματα a , b , c , για τις πλευρές του τριγώνου και τα κεφαλαία A , B , C , για τις απέναντι των αντίστοιχων πλευρών, γωνίες του. Ο ίδιος, εισάγει τα σύμβολα r , R και s για την ακτίνα του εγγεγραμμένου, του περιγεγραμμένου κύκλου και την ημιπερίμετρο του τριγώνου, αντίστοιχα. Ο τύπος $4rRs=abc$ που συνδέει τα έξι μήκη σε ένα τρίγωνο, είναι ένα από τα στοιχειώδη αποτελέσματα που αποδίδεται στον Euler, μολονότι οι αρχαίοι Έλληνες είχαν διατυπώσει ισοδύναμες προτάσεις (Boyer & Merzbach, 1997).

Οι σχέσεις των γεωμετρικών αντικειμένων και των μεγεθών που εκφράζουν, όπως η ισότητα, η ανισότητα, η παραλληλία, η καθετότητα κλπ., εκφράζονται και αυτές αρχικά με λέξεις, όπως με λέξεις γίνεται αρχικά και η αναφορά σε συγκεκριμένα σχήματα. Αργότερα, για το σκοπό αυτό, κάνουν την εμφάνιση τους σύμβολα. Μερικά από τα σύμβολα αυτά είναι γραφική αναπαράσταση σχημάτων (ιδεογράμματα), ενώ κάποια άλλα είναι δανεισμένα από την άλγεβρα. Ο Ήρων στο

έργο του Διόπτρα το 150 μ.Χ. γράφει $\triangle$ για το τρίγωνο, $\underline{\text{ου}}$ για τις παράλληλες, $\underline{\text{ρ}}$ για το παραλληλόγραμμο, $\square$ για το τετράγωνο και $\odot$ για τον κύκλο. Ανάλογα, ο Πάππος τον 5^ο αιώνα μ.Χ. γράφει $\odot$ και $\bigcirc$ για τον κύκλο, Δ ή ∇ για το τρίγωνο, $\perp$ για την ορθή γωνία, $\underline{\text{ου}}$ ή $=$ για τις παράλληλες και $\square$ για το τετράγωνο (Cajori, 1928).

Ορισμένες γεωμετρικές φιγούρες που χρησιμοποιήθηκαν στην αστρολογία όπως $\oint$, $\odot$, Δ , $\square$, $*$, χρησιμοποιήθηκαν και για να δηλώσουν γεωμετρικά σχήματα και μεγέθη. Οι Βαβυλώνιοι με το σύμβολο $*$ αναφέρονται στις μοίρες μιας γωνίας. Ο Maurolykus χρησιμοποιεί το 1555 τα σύμβολα Δ , $\square$, $*$ για το τρίγωνο το τετράγωνο και το εξάγωνο, αντίστοιχα και πέντε κουκίδες σε σχήμα $\cdot \cdot \cdot$ για το πεντάγωνο. Το 1634 ο Herigone στο έργο του *Cursus mathematicus* αναφέρει πληθώρα συμβόλων τα οποία κατανοούνται εύκολα από τη μορφή τους και μόνο:

$<$, $\square$, Δ , $\bigcirc$, $\perp$, $=$, $\diamond$, $\cap$, ∇ , $\perp$, $—$, ενώ χρησιμοποιεί τα σύμβολα 5< και 6<, για το πεντάγωνο και το εξάγωνο αντίστοιχα (Cajori, 1928).

Για την ισότητα γεωμετρικών σχημάτων, σε συνάφεια με το σύμβολο της ισότητας από την άλγεβρα, εμφανίστηκαν ορισμένα ιδιαίτερα σύμβολα όπως $\overline{\overline{=}}$ για την ισότητα τμημάτων, $\overline{\overline{=}}^{\vee}$ για την ισότητα γωνιών και $=^{\circ}$ για την ισότητα γωνιών σε μοίρες (Cajori, 1928). Αργότερα, εμφανίζεται από τον Herigone το 1634 το σύμβολο $\perp$ για τις κάθετες και από τον Oughtred το 1667 το σύμβολο $\parallel$ για τις παράλληλες ευθείες. Το σύμβολο της ομοιότητας $\sim$ εισάγεται από τον Leibniz. Στα χειρόγραφα της *Characteristica Geometrica*, η οποία δεν τυπώθηκε από τον ίδιο, γράφει: “*similitudinem ita notabimus: a \sim b*”. Σε ανώνυμο άρθρο που του αποδίδεται, παρουσιάζεται το σύμβολο $\smile$ για την ομοιότητα και το σύμβολο $\cong$ για τη σύγκλιση. Το ίδιο σύμβολο $\smile$ καθώς και το ανεστραμμένο S δηλαδή το σύμβολο $\smile$ χρησιμοποιήθηκε αργότερα με τον όρο «similar» σε πολλές γεωμετρικές μελέτες. Ο Leibniz χρησιμοποιούσε το σύμβολο $\sim$ για τη σύγκλιση (προσέγγιση) και τη σύμπτωση (congruent, coincidence). Αργότερα για τη σύγκλιση και τη σύμπτωση χρησιμοποιήθηκαν τα σύμβολα $\simeq$ και $\equiv$. Για τον ίδιο σκοπό, χρησιμοποιήθηκε και το σύμβολο $\equiv$, το οποίο εισήγαγε πρώτος ο Riemann για την ταυτότητα ή την

έννοια «ταυτίζεται» (*identity*). Το σύμβολο $\sim$ χρησιμοποιήθηκε στην Αγγλία για να δηλώσει το «διάφορο», ενώ η ομοιότητα αναφερόταν με την έκφραση «είναι όμοιο-*is simil.*» (Cajori, 1928).

Έναν σύνολο αξιοσημείωτων γεωμετρικών συμβολισμών (Πίνακας 4), παρουσίασε ο Cantor το 1801 στο έργο του *De la Correlation des figures de geometrie* και αναφέρει ο Cajori, (1928) :

A, B, C,	για τον συμβολισμό σημείων
$\overline{AB}$, $\widehat{AB}$	για ευθύγραμμο τμήμα και τόξο κύκλου, αντίστοιχα
$\overline{BCD}$	για τμήμα που ορίζεται από τρία σημεία
$\overline{AB} \cdot \overline{CD}$	για να δηλώσει το σημείο τομής δύο ευθυγράμμων τμημάτων
$\widehat{ABCD}$	για να δηλώσει τέσσερα σημεία σε ένα κυκλικό τόξο
$\widehat{AB} \bullet \widehat{CD}$	για να δηλώσει το σημείο τομής δύο τόξων
F $\overline{AB} \cdot \overline{CD}$	για να δηλώσει την ευθεία που ορίζεται από το σημείο F και το σημείο τομής των τμημάτων AB και CD
$= =$	για την ισοδυναμία ή την ταυτότητα δύο αντικειμένων
$\wedge_{ABC}$	για τη γωνία που ορίζεται από τα τμήματα AB και BC με κορυφή το B
$\wedge_{ABCD}$	για τη γωνία που ορίζεται από τα τμήματα AB και BC
$\triangle ABC$	για το τρίγωνο ABC
$\triangleleft ABC$	για το ορθογώνιο τρίγωνο ABC
$\overline{\overline{ABC}}$	για το εμβαδόν του τριγώνου ABC

Πίνακας 4. Ο γεωμετρικός συμβολισμός που πρότεινε ο Cantor το 1801 (Cajori, 1928, σελ. 422).

3.2.2 Σύμβολα στην Άλγεβρα

Από τα στοιχεία που αναφέρθηκαν, είναι φανερό, ότι πολλά από τα σύμβολα στη γεωμετρία πήραν τη σημερινή μορφή τους μέχρι το 18^ο αιώνα. Τα περισσότερα από αυτά, γίνονται εύκολα κατανοητά από την αντιστοιχία που παρουσιάζει το σχήμα τους, με το γεωμετρικό σχήμα ή την έννοια που συμβολίζουν. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο με πολλά από τα βασικά σύμβολα της Άλγεβρας, όπου το σχήμα και η μορφή των συμβόλων δεν φαίνεται να παραπέμπει στην έννοια που συμβολίζουν και να συνδέεται με αυτήν. Μέχρι τον 18^ο αιώνα, πολλά είναι τα σύμβολα που ξεχώρισαν και είχαν ήδη εδραιωθεί, παρότι μερικές διαδικασίες εξακολουθούσαν να παρουσιάζονται με διπλό συμβολισμό. Παρακάτω, θα δούμε την ιστορική προέλευση και εξέλιξη μερικών βασικών συμβόλων της Άλγεβρας, κάποια από τα οποία χρησιμοποιούνται στην οριστική τους μορφή ακόμη και σήμερα από μικρούς μαθητές.

Η έννοια της ισότητας δύο αντικειμένων, είτε ως αποτέλεσμα σύγκρισης, είτε ως εξαγόμενο μιας διαδικασίας, είναι ταυτόχρονη της μαθηματικής σκέψης, ακόμη και στις απλές διαδικασίες υπολογισμών. Παρόλο που στις περισσότερες περιπτώσεις η εποπτεία και η νόηση οδηγούν σε μία σαφή αντίληψη για την ισότητα, ο ορισμός και η πλήρης σχέση των αντικειμένων που συνδέονται με τη σχέση αυτή δεν ήταν πάντα αυστηρά οροθετημένη στα μαθηματικά. Η ισότητα αναφέρεται από τον Ευκλείδη ως κοινή έννοια: *«Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν»*. Ο Frege, για έναν σαφή και αυστηρό ορισμό της ισότητας, επικαλείται και συμπλέει με την άποψη του Leibniz: *«Ο Leibniz ορίζει «Ίδια είναι τα πράγματα, όταν η αντικατάσταση του ενός από το άλλο δεν διαταράσσει την αλήθεια». Αυτό θα υιοθετήσω ως ορισμό της ταυτότητας. Δεν έχει καμία σπουδαιότητα αν χρησιμοποιούμε όπως ο Leibniz τη λέξη «ίδιο» ή «ταυτίζεται». Το «ίδιος» [dasselbe] φαίνεται να εκφράζει την πλήρη συμφωνία, το «ταυτίζεται» [gleich] μόνο ως προς αυτόν ή εκείνο τον παράγοντα»* (Χριστοδουλίδης, 1993, σελ. 52). Στα πλαίσια της μαθηματικής λογικής, ο Russell δίνει τον ακόλουθο ορισμό για την ταυτότητα: $x=y.=(\varphi):\varphi!x.\supset\varphi!yDf$. Ο ορισμός αυτός δηλώνει ότι, λέμε πως τα x και y ταυτίζονται όταν κάθε κατηγορηματική συνάρτηση που ικανοποιείται από το x, ικανοποιείται και από το y (Χριστοδουλίδης, 1993).

Μέχρι τον 15^ο αιώνα, η δήλωση της ισότητας σε γραπτό κείμενο ήταν συνήθως

με λέξη, ενώ ορισμένες φορές με σύμβολο ή συντομογραφία. Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι, χρησιμοποιούσαν ένα ιδιαίτερο σύμβολο για να εκφράσουν την έννοια «δίνει» (it gives) σε μία διαδικασία υπολογισμού (Cajori, 1928). Οι αρχαίοι Έλληνες χρησιμοποιούν τη λέξη «ίσος» και οι μαθηματικοί της Δυτικής Ευρώπης, λέξεις της φυσικής γλώσσας όπως *aequales*, *aequantur*, *eguale*, *esgale*, *faciunt*, *ghelijck*, *gleich* (Cajori, 1928). Οι συντομογραφίες που παρουσιάστηκαν κατά καιρούς, δεν έτυχαν ευρείας αποδοχής. Πιο συγκεκριμένα, ο Διόφαντος έγραφε «ι^ς» ή «ι» ή «ις» (από τη λέξη ίσος) για να δηλώσει την ισότητα, αν και σε ανατύπωση του έργου του εμφανίζεται και ένα σύμβολο περίπου της μορφής Υ για να δηλώσει την ίδια έννοια. Οι Ινδοί είχαν ως σύμβολο ισότητας τη συντόμευση *pha* της λέξης *phala*, ενώ στον Άραβα Al-Qalasadi συναντάμε το σύμβολο « ω » το οποίο μοιάζει με το ι του Διόφαντου γραμμένο από δεξιά προς τα αριστερά (Cajori, 1928). Οι Regiomontanus και Pacioli (Σχήμα 13), χρησιμοποιούν μία απλή μεγάλη οριζόντια γραμμή (—) όταν θέλουν να δηλώσουν την ισότητα, ενώ ο Cardano αφήνει ένα μεγάλο κενό για την ίδια έννοια (Cajori, 1928).

Summa (Part I, fol. 91A)			Modern Equivalents	
$\bar{p}^a$	1. co. $\bar{m}$. 1. $\bar{q}^a$		1st	$x - y$
3^a	1. co. $\bar{p}$. 1. $\bar{q}^a$		3d	$x + y$
	1. co. $\bar{m}$. 1. ce. de. $\bar{q}^a$	36		$x^2 - y^2 = 36$
	<i>Rv.</i> 1. ce. $\bar{m}$ 36	1. ce. $\bar{d}e$ $\bar{q}^a$		$\sqrt{x^2 - 36} = y$,
	<i>Valor quantitatis.</i>			the value of y .
p^a	1. co. $\bar{m}$ <i>Rv.</i> 1. ce. $\bar{m}$ 36		1st	$x - \sqrt{x^2 - 36}$
2^a	6		2d	6
3^a	1. co. $\bar{p}$ <i>Rv.</i> 1. ce. $\bar{m}$ 36 .		3d	$x + \sqrt{x^2 - 36}$
	2. co. $\bar{p}$. 6. —	216	$2x + 6$	= 216
	2. co.	210		$2x = 210$
	<i>Valor rei.</i>	105		Value of $x = 105$
¹ Part I, fol. 67B.			² Part II, fol. 72B.	

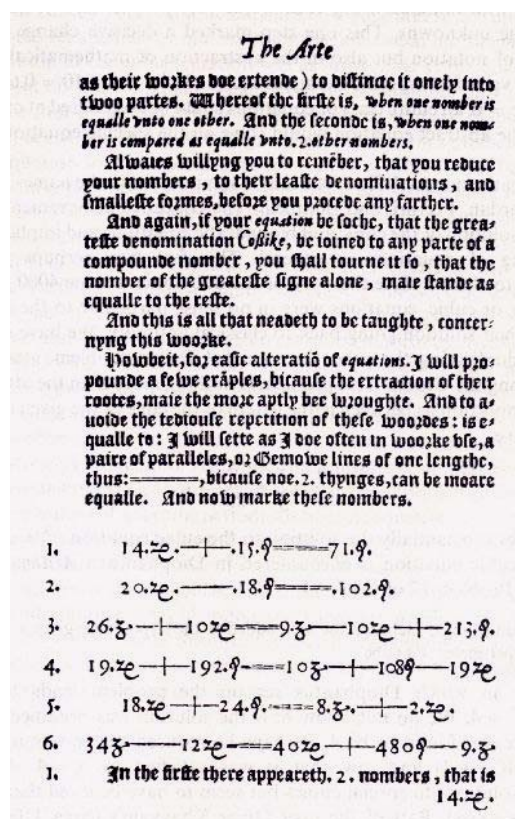
Σχήμα 13. Ο αλγεβρικός συμβολισμός για τις πράξεις, την ισότητα, τον άγνωστο και την τετραγωνική ρίζα από τη *Summa* του Pacioli και σε σύγχρονη έκφραση (Cajori, 1928, σελ. 110).

Το γνωστό σύμβολο της ισότητας « $=$ » εισήγαγε ο Robert Record το 1557 στο βιβλίο του *The Whetstone of Witte*, (Σχήμα 14), δηλώνοντας την ισότητα με δύο μεγάλες γραμμές παράλληλες, ίσες και κοντά η μία στην άλλη (Cajori, 1928). Έγραψε μάλιστα σχετικά: «χρησιμοποιώ συχνά δύο ίσου μήκους παράλληλες γιατί δεν

υπάρχουν δύο άλλα πράγματα που να είναι περισσότερο ίσα» (Eves, 1981, τόμος Ι, σελ. 150).

Το ίδιο σύμβολο δηλαδή, οι δύο ίσες παράλληλες ευθείες, που πιθανόν να χρησιμοποιήθηκε ανεξάρτητα για τον ίδιο σκοπό, βρίσκεται την ίδια χρονική περίοδο και σε ένα χειρόγραφο ανώνυμου μαθηματικού στη Μπολόνια (Cajori, 1928).

Την εποχή αυτή και τα επόμενα χρόνια, εμφανίζονται και άλλα σύμβολα για την ισότητα με κατακόρυφες γραμμές, όπως ήταν το $\lceil$, το $\parallel$, το $|$, το πιο παράξενο «2|2» από τον Herigone (1634), καθώς και άλλα. Ο Herigone πρότεινε αντίστοιχα τα σύμβολα $3|2$ και $2|3$ για να δηλώσει το «μεγαλύτερο από» και το «μικρότερο από». Το σύμβολο $\parallel$ για την ισότητα χρησιμοποιήθηκε από τον Γερμανό Wilhelm Holzmann, γνωστό ως Xylander σε μία έκδοση του 1571 των *Αριθμητικών* του Διόφαντου. Για το σύμβολο αυτό, ο Cantor υποθέτει ότι προέρχεται από τη λέξη «ίσοι», συντόμευση της οποίας χρησιμοποιούσε ο Xylander στα χειρόγρατά του ως «ii» (Cajori, 1928).



Σχήμα 14. Μία σελίδα του βιβλίου του Robert Record με τα σύμβολα των πράξεων και της ισότητας (Πηγή: <http://members.aol.com/jeff94100/witte.jpg>)

Ο μεγάλος ανταγωνιστής του νέου συμβόλου «=» ήταν το σύμβολο $\propto$, το οποίο εικάζεται ότι προέρχεται από τη συλλαβή $\mathfrak{ae}$ ή $\mathfrak{ae}$, σύντμηση της

συντομογραφίας *ae* για τη λατινική λέξη *aequales*, που σημαίνει «ίσον» και χρησιμοποιήθηκε κατά καιρούς για το σκοπό αυτό (Cajori, 1928). Το σύμβολο ∞ , το χρησιμοποιούσαν μαζί με τον Descartes (1637) και άλλοι μαθηματικοί της εποχής, κυρίως στην Ολλανδία και τη Γαλλία, όπως ο Huygens το 1646, ο M. Rolle μέχρι το 1690 και αργότερα ο Jac. Bernoulli το 1713 (Cajori, 1928).

Η επικράτηση του συμβόλου «=», φαίνεται ότι δεν ήταν μία εύκολη υπόθεση. Σύμφωνα με τους Boyer & Merzbach (1997), το σύμβολο της ισότητας χρειάστηκε πάνω από ένα αιώνα για να καθιερωθεί, αφού οι μαθηματικοί της εποχής χρησιμοποιούσαν διαφορετικά μεταξύ τους σύμβολα για τον ίδιο σκοπό. Ύστερα από την πρώτη εκτύπωσή του σε βιβλίο το 1557, εμφανίστηκε πάλι τυπωμένο το 1618 και έτυχε ευρείας αναγνώρισης μετά την έκδοση των εργασιών *Artis analyticae praxis* του T. Harriot, *Clavis mathematicae* του W. Oughtred και *Trigonometria* του R. Norwood (Cajori, 1928). Παράλληλα, ένα ακόμη γεγονός που οδήγησε σε αποδοχή του συγκεκριμένου συμβόλου, φαίνεται πως ήταν η χρήση του, από τους Newton και Leibniz στις καθοριστικές για τον διαφορικό λογισμό εργασίες τους, οι οποίες διαβάστηκαν και συζητήθηκαν από πολλούς μαθηματικούς (Cajori, 1923a, Cajori, 1928). Στην αρχή του 18^{ου} αιώνα, όλοι σχεδόν οι μαθηματικοί συμβόλιζαν την ισότητα με το σύμβολο αυτό. Μοναδική ίσως διαφοροποίηση ήταν ο Jac. Bernoulli, ο οποίος στο έργο του *Ars Conjectandi*, το 1713 (Σχήμα 15), χρησιμοποιεί ακόμη το διαφορετικό σύμβολο ∞ για τη ισότητα (Cajori, 1928).

Summa Potestatum.

$$\begin{aligned}
 \sum n & \infty \frac{1}{2}nn + \frac{1}{2}n. \\
 \sum nn & \infty \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}nn + \frac{1}{6}n. \\
 \sum n^3 & \infty \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}nn. \\
 \sum n^4 & \infty \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 * - \frac{1}{30}n. \\
 \sum n^5 & \infty \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{1}{2}n^4 * - \frac{1}{12}nn. \\
 \sum n^6 & \infty \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 * - \frac{1}{6}n^3 * + \frac{1}{42}n. \\
 \sum n^7 & \infty \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{1}{2}n^6 * - \frac{7}{24}n^4 * + \frac{1}{12}nn. \\
 \sum n^8 & \infty \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{1}{2}n^7 * - \frac{7}{15}n^5 * + \frac{2}{9}n^3 * - \frac{1}{30}n. \\
 \sum n^9 & \infty \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{1}{4}n^8 * - \frac{7}{10}n^6 * + \frac{1}{2}n^4 * - \frac{1}{12}nn. \\
 \sum n^{10} & \infty \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{1}{6}n^9 * - 1n^7 * + 1n^5 * - \frac{1}{2}n^3 * + \frac{5}{66}n.
 \end{aligned}$$

Quin imò qui legem progressionis inibi attentius inspexerit, eundem etiam continuare poterit absq; his ratiociniorum ambagibus: Sumtâ enim c pro potestatis cujuslibet exponente, fit summa omnium n^c feu

$$\sum n^c \infty \frac{1}{c+1} n^{c+1} + \frac{1}{2} n^c + \frac{c}{2} A n^{c-1} + \frac{c \cdot c-1 \cdot c-2}{2 \cdot 3 \cdot 4} B n^{c-3} + \frac{c \cdot c-1 \cdot c-2 \cdot c-3 \cdot c-4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} C n^{c-5} + \frac{c \cdot c-1 \cdot c-2 \cdot c-3 \cdot c-4 \cdot c-5 \cdot c-6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} D n^{c-7} \dots \&c$$

Σχήμα 15. Αντίγραφο από την εργασία του Jac. Bernoulli (Hairer et al., 2000).

Η παρουσία του συμβόλου ∞ στην έκδοση αυτή, ήταν ίσως η τελευταία του έντυπη εμφάνιση πριν τη ολοκληρωτική επικράτηση του « $=$ » για τη δήλωση της ισότητας. Ο Record, ο οποίος έμεινε στην ιστορία για το παγκόσμιο αυτό σύμβολο, δεν πρότεινε κανένα άλλο σύμβολο στα μαθηματικά (Eves, 1981).

Τα σύμβολα $>$ και $<$ για το «μεγαλύτερο από» και το «μικρότερο από» εισήγαγε ο T. Harriot στο έργο του *Artis analyticae praxis to 1631*, (Cajori, 1928, Boyer & Merzbach, 1997), ενώ στον μεγάλο πίνακα συμβόλων του Oughtred, τα $\sqsupset$ και $\sqsubset$, ήταν σύμβολα για την ίδια έννοια. Ο Isaac Barrow (1630-1677), στο βιβλίο του *Lectiones Opticae & Geometricae* (London 1674), χρησιμοποιεί αυτά τα σύμβολα όπως ακολούθως: $A \sqsupset B$ «A major est quam B» και $A \sqsubset B$ «A minor est quam B» (Cajori, 1928).

Οι πρώτες διαδικασίες για μετρήσεις και υπολογισμούς, είναι η πρόσθεση και η αφαίρεση. Το φαινόμενο της συντομογραφίας για τις πράξεις αυτές, παρουσιάστηκε σε ορισμένες από τις πρώτες γραπτές εκφράσεις τους στους αρχαίους χρόνους. Οι Βαβυλώνιοι, είχαν ένα ιδεόγραμμα για να εκφράζουν το μείον, ενώ οι αιγυπτιακοί πάπυροι έχουν δύο πόδια (Σχήμα 16), να έρχονται εμπρός για να δηλώσουν την πρόσθεση και να απομακρύνονται για την αφαίρεση.

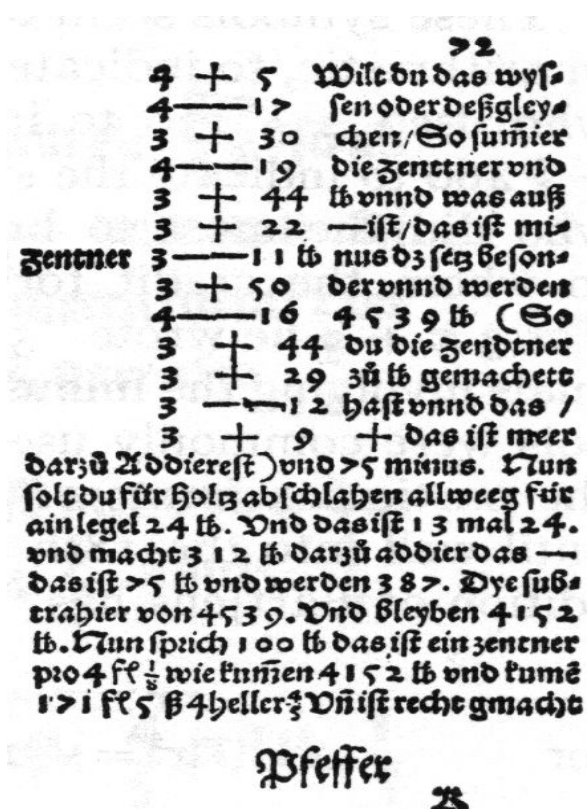


Σχήμα 16. Σύμβολα των Αιγυπτίων για την πρόσθεση και την αφαίρεση (Cajori, 1928)

Ο Διόφαντος, με τον ιδιαίτερο συμβολισμό του για τις εξισώσεις, εκφράζει την πρόσθεση με την παράθεση αριθμών και μεγεθών, ενώ την αφαίρεση με το σύμβολο Λ . Ο ακριβής όρος για την αφαίρεση είναι *λειψις* ενώ με τον όρο *ὑπαρξιν*, ο οποίος χρησιμοποιείται για την πρόσθεση, συμβολίζει έναν θετικό αριθμό. Το συγκεκριμένο σύμβολο Λ , γράφεται στο κείμενο ως «*ψ ανεστραμμένο και περικομμένο*», αλλά μάλλον η περιγραφή αυτή αποτελεί μεταγενέστερη προσθήκη του κειμένου. Το ίδιο σύμβολο εμφανίζεται και στα *Μετρικά* του Ήρωνα. όπου σε κάποιο σημείο του χειρογράφου του αναφέρεται η έκφραση «*οδ Λ ι δ'*» δηλαδή $74 - 1/14$ (Heath, 2001). Σε Ινδικό χειρόγραφο, γνωστό ως *Arithmetic Bakhshali* γραμμένο μεταξύ 8^{ου} και 10^{ου} μ.Χ. αιώνα, η αφαίρεση δηλώνεται με ένα « $+$ » μετά από τον αριθμό που αφαιρείται. Για παράδειγμα η έκφραση $12 \ 7+$ δηλώνει την αφαίρεση $12-7$ και η πρόσθεση δηλώνεται με τη συντομογραφία *yu*, από τη λέξη *yuta*, που σημαίνει πρόσθεση (Cajori, 1928). Το σύμβολο αυτό, δεν βρίσκεται σε άλλα ινδικά κείμενα, όπου η

αρνητική ποσότητα δηλώνεται με μία κουκίδα πάνω στο αριθμητικό ψηφίο και η πρόσθεση με παράθεση των αριθμών. Συνεπώς η έκφραση «3 4» έχει ως αποτέλεσμα 7 ενώ η έκφραση «3 $\dot{4}$ » έχει αποτέλεσμα $\dot{1}$. Οι Άραβες, τον 15^ο αιώνα, δηλώνουν την πρόσθεση με απλή παράθεση, ενώ χρησιμοποιούν ένα ιδιαίτερο σχήμα, ∇ , για την αφαίρεση (Cajori, 1928).

Τα γνωστά σημερινά σύμβολα για την πρόσθεση και αφαίρεση, «+» και «-», εμφανίζονται για πρώτη φορά τυπωμένα, στο βιβλίο *Mercantile Arithmetic* ή *Behende und hüpsche Rechenung auf allen Kauffmanschafft* του Johannes Widmann, το οποίο τυπώθηκε στη Λειψία το 1489. Ωστόσο, στο βιβλίο αυτό τα σύμβολα αναφέρονταν όχι σε πρόσθεση και αφαίρεση αριθμών, αλλά σε πλεόνασμα και έλλειμμα για εμπορικά προβλήματα. Πιο συγκεκριμένα ο Widmann στο βιβλίο του (Σχήμα 17), γράφει "4 centner + 5 pfund" και "5 centner - 17 pfund," και εξηγεί "Was - ist / das ist minus ... und das + das ist mer." που δείχνει πλεόνασμα ή έλλειμμα ποσότητας κιβωτίων ή δεμάτων (Cajori, 1928).



Σχήμα 17. Σελίδα από το βιβλίο του Widmann, με τα νέα για την εποχή σύμβολα, έκδοση του Augsburg το 1526. (Πηγή: <http://members.aol.com/jeff94100/widman.jpg>)

Σχετικά με την προέλευση του συμβόλου «+», η επικρατέστερη εκδοχή αναφέρει ως πρωταρχική αιτία τη λέξη *et*. Σε μαθηματικά χειρόγραφα που γράφτηκαν στη Γερμανία τον 15^ο αιώνα, ορισμένα μάλιστα από αυτά πριν το 1486, η λέξη *et* χρησιμοποιείται για να δηλώσει πρόσθεση. Σύμφωνα με τον Cajori, η λέξη *et* φαίνεται να είναι η αρχή του συμβόλου της πρόσθεσης, γιατί μοιάζει με το σύμβολο + όταν είναι γραμμένη γρήγορα και ως σύμπλεγμα γραμμάτων, αν και η οριζόντια γραμμή του t είναι προς τα κάτω (⋈) και όχι κατακόρυφη, όπως φαίνεται σε χειρόγραφο του 1417. Είναι πιθανόν, κάποια από αυτά τα χειρόγραφα να διάβασε ο Widman στη βιβλιοθήκη της Δρέσδης, όταν δίδασκε στο πανεπιστήμιο της Λειψίας, με αποτέλεσμα να υιοθετήσει το νέο αυτό σύμβολο (Cajori, 1928).

Την ίδια εποχή που εμφανίζονται τα σύμβολα αυτά από τον Widman, σε ανώνυμο λατινικό χειρόγραφο παρουσιάζεται ο κανόνας προσήμων με τα σύμβολα + και - για την πρόσθεση και την αφαίρεση. Μάλλον το χειρόγραφο αυτό χρησιμοποίησαν ο Henricus Grammateus στο *Rechnenbuch* το 1518 και ο Rudolf στο *Coss* το 1525, όπου έκαναν χρήση των νέων συμβόλων «+» και «-», προκειμένου να δηλώσουν με μία τεχνική έννοια την πρόσθεση και την αφαίρεση (Cajori, 1928). Στην Αγγλία, τα σύμβολα + και - έγιναν ευρέως γνωστά μετά την κυκλοφορία του έργου του Robert Recorde *The Whetstone of Witte*, το 1557 (Boyer & Merzbach, 1997). Πολλοί μαθηματικοί, ανάμεσα τους ο Ιταλός Pacioli και ο Γάλλος Chuquet, το 1484, χρησιμοποιούν κατά τη μεσαιωνική παράδοση, συντομογραφίες των λέξεων *plus* και *minus*, συγκεκριμένα p ή $\tilde{p}$ για την πρόσθεση και m ή $\tilde{m}$ για την αφαίρεση (Cajori, 1928, Boyer & Merzbach, 1997). Ο Regiomontanus το 1460, χρησιμοποιεί το «-» για την ισότητα και ένα σύμβολο περίπου $\overline{i9}$ για το μείον (Σχήμα 18). Πιθανόν το σύμβολο αυτό, να είναι καλλιγραφική μορφή (florescentform) για το σύμβολο $\tilde{m}$ (Cajori, 1928).

The image shows a handwritten manuscript page with two columns of mathematical work. The left column contains several lines of calculations using symbols for addition and subtraction. The right column shows a more formal algebraic derivation.

Left column (handwritten):

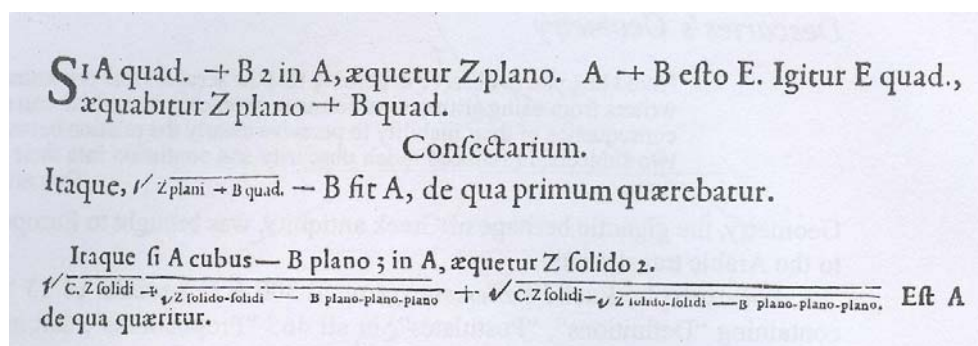
$$\begin{array}{r} 1\text{tr} \cdot \\ 10\text{tr} 1\text{tr} \\ 100\text{tr} 10\text{tr} \\ 1\text{tr} 10\text{tr} \\ 1\text{tr} \\ 2\text{tr} 100\text{tr} 20\text{tr} \\ 10\text{tr} 1\text{tr} \end{array}$$

Right column (handwritten):

$$\begin{array}{r} x \quad 10 - x \\ 10 - x \quad x \\ 100 - 10x \\ x^2 - 10x \\ x^2 \\ 2x^2 + 100 - 20x \\ 10x - x^2 \end{array}$$

Σχήμα 18. Χειρόγραφο του Regiomontanus με σύμβολα πράξεων και αγνώστων (Cajori, 1928).

Τον 16^ο αιώνα χρησιμοποιήθηκαν και τα δύο ζευγάρια συμβόλων με τα σύμβολα + και − να υπερτερούν τελικά στη Γαλλία, τη Γερμανία και την Ισπανία και αργότερα το πρώτο μισό του 17^{ου} αιώνα και στην Ιταλία (Cajori, 1928). Καθοριστική για την επικράτηση των σημερινών συμβόλων έναντι των ιταλικών p και m , ήταν η διάδοση των συμβόλων + και − μέσω των γερμανικών αλγεβρών των Rudolf (1525) και Stiefel (1544) (Boyer & Merzbach, 1997), καθώς και η επίδραση του Vieta, ο οποίος παρόλο που δεν χρησιμοποιούσε σύμβολο για τη ισότητα, χρησιμοποιούσε για την πρόσθεση τον λατινικό σταυρό $\dagger$ γραμμένο οριζόντια $\dashv$ (Σχήμα 19) και για την αφαίρεση το σύμβολο «−» (Cajori, 1919, Cajori, 1928).



Σχήμα 19. Τμήμα από εργασία του Vieta (Hairer et al., 2000, σελ. 7)

Παράλληλα με τη χρήση των συμβόλων + και − στη σημερινή μορφή, παρατηρήθηκαν και άλλες μορφές αυτών, άλλοτε για λόγους διάκρισης και άλλοτε για πρακτικούς, τυπογραφικούς λόγους. Υπάρχουν τυπωμένα έργα με το σύμβολο του σταυρού σε διαφορετικές εκδοχές όπως $\boxtimes$ και $\boxplus$ τον λατινικό σταυρό $\dagger$ γραμμένο οριζόντια, κλπ. για την πρόσθεση. Αντίστοιχα, για το μείον χρησιμοποιήθηκαν σύμβολα όπως $\div$, $\dot{-}$, $\ddot{-}$ κυρίως, επειδή η απλή παύλα είχε και άλλες χρήσεις όπως αυτές του διαχωρισμού των φράσεων, της αναλογίας και άλλων. Εναλλακτικά, για την αφαίρεση ο Herigone χρησιμοποιεί το σύμβολο $\sim$, ο Descartes στο έργο του *Geometrie* δύο ή τρεις τελείες και ορισμένοι μαθηματικοί τρεις μικρές παύλες. Σε μαθηματικό περιοδικό στις αρχές του 18^{ου} αιώνα, γράφεται η έκφραση «1---R---11» για τον αριθμό $1 - \sqrt{-11}$ (Cajori, 1928).

Τα σύμβολα $+$ και $-$, εκτός από την πρόσθεση και την αφαίρεση, δείχνουν σήμερα και το πρόσημο ενός αριθμού, καθώς επίσης και το αν μία ποσότητα είναι θετική ή αρνητική. Προκειμένου να αποφύγουν τη σύγχυση ανάμεσα στην πράξη της πρόσθεσης ή της αφαίρεσης και το πρόσημο των αριθμών, ορισμένοι μαθηματικοί πρότειναν διαφορετικά σύμβολα για το πρόσημο. Εμφανίζονται έτσι σύμβολα, όπως $\vdash$ ή $\ulcorner$ για τους θετικούς και $\dashv$ ή $\neg$ για τους αρνητικούς, ή το $+a$ γράφεται a ενώ το $-a$ γράφεται $\bar{a}$. Ο Wolfgang Bolyai το 1832 χρησιμοποιεί για το πρόσημο των αριθμών τα σύμβολα $+$ και $-$ πιο έντονα γραμμένα (Cajori, 1928).

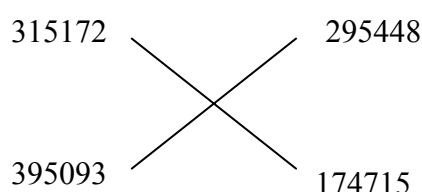
Το σύμβολο $\pm$ χρησιμοποιείται αρχικά από τον Albert Girard το 1626, αλλά με την παρεμβολή της λέξης *ou*, δηλαδή $\overset{+}{ou}$, για να δηλώσει το «συν ή πλην». Αργότερα, το 1631 ο Oughtred παρουσιάζει στο *Cavis mathematicae*, το σύμβολο όπως το συναντάμε και σήμερα, το οποίο στη συνέχεια υιοθετούν και οι Wallis, Jones και άλλοι. Για την ίδια έννοια, ο Schooten χρησιμοποιεί το σύμβολο $\&$, ενώ ο Newton τα σύμβολα $\perp$ και $\top$, ανάλογα με τη σειρά εμφάνισης του πρόσημου, δηλαδή $\pm$ ή $\mp$. Επιπλέον, το σύμβολο Σ για το άθροισμα πολλών όρων εισήγαγε ο Euler, το 1755 (Cajori, 1928).

Για τις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης, έχουμε αντίστοιχα μία πληθώρα συμβόλων και μία ανάλογη πορεία καθιέρωσης τους. Στους πρώτους βαβυλωνιακούς πίνακες, υπήρχε ένα ιδεόγραμμα (A-DU), το οποίο συμβόλιζε το «φορές». Αντίστοιχα, από τον πάπυρο Rhind, φαίνεται ότι οι Αιγύπτιοι είχαν ένα σύμβολο για να δηλώσουν τον πολλαπλασιασμό. Οι αρχαίοι Έλληνες, χρησιμοποιούν λέξεις, ενώ ο Διόφαντος δίνει το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού χωρίς κάποιο εισαγωγικό βήμα. Σε ινδικά χειρόγραφα του 8^{ου}, 9^{ου} και 10^{ου} αιώνα, χαρακτηρισμένα ως Bakhshali, ο πολλαπλασιασμός δηλώνεται με απλή παράθεση των αριθμών («*indicated by placing numbers side-by-side*»). Τον ίδιο τρόπο χρησιμοποιεί και ο al-Qalasadi τον 15^ο αιώνα, καθώς και μερικά ανώνυμα χειρόγραφα της ίδιας εποχής (Cajori, 1928).

Σε ινδικά χειρόγραφα του Bahaskara και των σχολιαστών του, για ένα γινόμενο που δηλώνεται με τη συντομογραφία *bha*, υπάρχει μία τελεία ανάμεσα στους παράγοντες, χωρίς όμως καμία άλλη εξήγηση. Ο Vieta, για να δηλώσει τον πολλαπλασιασμό των A και B , γράφει « A in B » και αργότερα ο Stifel, το 1545, στην

άλγεβρα του «*Deutsche Arithmetica*» χρησιμοποιεί το γράμμα M (**M**) για τον πολλαπλασιασμό και το γράμμα D (**D**) για τη διαίρεση. Τον ίδιο συμβολισμό με τον Stifel ακολουθεί και ο Stevin, ο οποίος για την έκφραση $3xyz^2$ γράφει $3\textcircled{M} \text{sec}\textcircled{M} \text{ter}\textcircled{D}$, όπου sec και ter σημαίνουν δεύτερη και τρίτη άγνωστη ποσότητα, αντίστοιχα. Το 1553, ο Stifel σε μία αναθεωρημένη έκδοση της γνωστής άλγεβρας *Coss* του Rudolff, δηλώνει τον πολλαπλασιασμό με απλή παράθεση των αριθμών και επαναλαμβάνει τα γράμματα προκειμένου να δηλώσει τη δύναμη. Κάποια άλλα σύμβολα που παρουσιάστηκαν για το γινόμενο χωρίς επιτυχία, ήταν από τον Herigone, το τετράγωνο για το γινόμενο δύο παραγόντων οι οποίοι διαχωρίζονται από ένα κόμμα, το «*» από τον Rahn και αργότερα από τον Banker στη μετάφραση της *Teutsche Algebra* του Rahn, καθώς επίσης και αρκετά ακόμη σύμβολα κυρίως το 17^ο αιώνα (Cajori, 1928).

Το σύμβολο «x» για τον πολλαπλασιασμό, (ο σταυρός του Αγίου Ανδρέα κατά τον Cajori (1928)), εισάγει ο William Oughtred στο βιβλίο του «*Clavis Mathematicae*» - Κλειδί των Μαθηματικών - σε λατινική έκδοση το 1631 και σε αγγλική το 1647. Η συμβολή του Oughtred στη μαθηματική γνώση είναι μεγάλη. Μαθητές του ήταν ο μαθηματικός John Wallis και ο αστρονόμος Seth Ward. Ο Oughtred δίνει έμφαση στη χρήση συμβόλων και για το λόγο αυτό, παρουσιάζει σε πίνακα πάνω από 150 σύμβολα για πολλές από έννοιες, διαδικασίες και ιδιότητες στα μαθηματικά. Κάποια από τα σύμβολα αυτά, όπως έχει ήδη αναφερθεί παραμένουν μέχρι σήμερα. Σε παράρτημα ανωνύμου ("*Appendix to the Logarithmes*") στην μετάφραση του *Descriptio* του John Napier, που τυπώθηκε το 1618, για την ίδια πράξη υπάρχει το γράμμα X. Αυτό το παράρτημα είναι πολύ πιθανό να έχει γραφτεί από τον Oughtred. Η προέλευση του συμβόλου αυτού, εικάζεται ότι βρίσκεται στη μέχρι τότε κυρίαρχη χρήση του στον υπολογισμό γινομένων «χιαστί» για διάφορα προβλήματα, όπου η κάθε μία γραμμή του X δημιουργούσε το γινόμενο σε ζευγάρια αριθμών, τα οποία ήταν ταξινομημένα σε μία τετράδα, όπως φαίνεται παρακάτω (Cajori, 1928, σελ. 251):



Προηγούμενες χρήσεις του συμβόλου αυτού, ήταν στη λύση προβλήματος με διαδικασία δύο εσφαλμένων θέσεων, στη λύση προβλημάτων απλής προόδου η οποία περιλάμβανε κλάσματα, στη διαίρεση κλασμάτων και αλλού (Cajori, 1928).

Η εισαγωγή της τελείας ($\alpha \cdot \beta$) για τον πολλαπλασιασμό έγινε από τον Leibniz, ο οποίος εξέφρασε παράλληλα την αντίρρηση του για το σύμβολο του Oughtred, λόγω της σύγχυσης ανάμεσα στο σταυρό του πολλαπλασιασμού $\times$ και το γράμμα x που χρησιμοποιούσε για τη μεταβλητή. Σε γράμμα που απευθύνει στον John Bernoulli γράφει: *"I do not like (the cross) as a symbol for multiplication, as it is easily confounded with x ; often I simply relate two quantities by an interposed dot and indicate multiplication by $ZC \cdot LM$ ".* Πιθανόν ο Leibniz, να μην γνώριζε ότι ο Harriot στο βιβλίο του «*Artis analyticae praxis*» το 1631 χρησιμοποίησε και αυτός την τελεία για να δηλώσει πολλαπλασιασμό στην έκφραση $aaa-3 \cdot bba=+2 \cdot ccc$ (Cajori, 1928). Ο Cajori (1928) ισχυρίζεται, ότι μάλλον η τελεία που χρησιμοποίησε ο Harriot, αλλά και ο Gibson το 1655 στο έργο «*Syntaxis mathematica*», είναι μία τελεία που συνήθως χρησιμοποιούσαν οι συγγραφείς μετά από τους αριθμούς ως διαχωριστικό, στα χειρόγραφα και τα πρώτα τυπωμένα βιβλία της εποχής. Ο Leibniz στο πρώτο του βιβλίο «*De arte combinatoria*» το 1666, χρησιμοποίησε το κεφαλαίο γράμμα C ανεστραμμένο στη θέση $\cap$ για τον πολλαπλασιασμό και στη θέση $\cup$ για τη διαίρεση. Η γενική αποδοχή της τελείας στην Ευρώπη για τη δήλωση του πολλαπλασιασμού τον 18^ο αιώνα, οφείλεται κυρίως στον Γερμανό Cristian Wolf, ενώ το σύμβολο της τελείας χρησιμοποιήθηκε αργότερα και από τον Euler (Cajori, 1928). Σήμερα είναι γνωστό ότι η τελεία, η οποία συχνά παραλείπεται, αποτελεί το σύνθετο σύμβολο του πολλαπλασιασμού για την έντυπη δήλωση της πράξης. Σε χρήση όμως βρίσκονται ακόμη τα σύμβολα « $\times$ » και « $\cdot$ », κυρίως στις αριθμομηχανές και τους υπολογιστές, όπου η τελεία ανάμεσα σε αριθμούς έχει άλλη λειτουργία.

Το σύμβολο « Π » για το γινόμενο πολλών παραγόντων το εισήγαγε ο Rene Descartes, κατά τον Gullberg (Miller, 2004). Ο Cajori (1928), ισχυρίζεται ότι αυτό έγινε από τον Gauss, το 1812.

Η πράξη της διαίρεσης, συνδέεται με την έννοια του λόγου με συνέπεια, συχνά να παρουσιάζονται κοινά σύμβολα για να δηλώσουν τη διαίρεση, το λόγο και κατ' επέκταση τα κλάσματα. Οι Βαβυλώνιοι είχαν ένα ιδεόγραμμα για τη διαίρεση, ενώ οι

αρχαίοι Έλληνες, εκτός του συμβολισμού με την προσθήκη του τόνου για τα κλάσματα, δεν έχουν σύμβολο για τη διαίρεση. Αργότερα, ο Διόφαντος χωρίζει το διαιρετέο από τον διαιρέτη με τη λέξη «έν μορί%» ή «μορίου», όπως στην έκφραση $\Delta^Y \xi \overset{\circ}{M}$, βφκ έν μορί% $\Delta^Y \Delta \alpha \overset{\circ}{M}$ μ $\Lambda \Delta^Y \xi$, δηλαδή $(60x^2+2520)/(x^4+900-60x^2)$ (Heath, 2001). Κατά το τέλος της Αλεξανδρινής εποχής, αντιστράφηκε η ελληνική συνήθεια γραφής των κλασμάτων, με τον αριθμητή κάτω από τον παρονομαστή. Οι Ινδοί πιθανόν αντιγράφοντας αυτή τη συνήθεια, γράφουν συχνά τον διαιρέτη κάτω από το διαιρετέο χωρίς διαχωριστική γραμμή και τον παρονομαστή κάτω από τον αριθμητή (Boyer & Merzbach, 1997), ενώ στην αριθμητική των Bakhshali η διαίρεση δηλώνεται με τη συντομογραφία *bhā* από τη λέξη *bhāga* που σημαίνει τμήμα (“part”)(Cajori, 1928). Ο Άραβας συγγραφέας al Hassar του 12^{ου} αιώνα, αναφέρει τη χρήση της οριζόντιας γραμμής για τη δήλωση του κλάσματος και ο Leonardo di Pisa στη συνέχεια, με το έργο του *Liber abbaci*, βοηθά στη διάδοσή της (Cajori, 1928). Η χρήση της οριζόντιας γραμμής γενικεύθηκε το 16^ο αιώνα και το σύμβολο / για τα κλάσματα προτάθηκε πολύ αργότερα, το 1845, από τον De Morgan (Boyer & Merzbach, 1997).

Επιπλέον, για τη διαίρεση χρησιμοποιούνται μία ή δύο παρενθέσεις στην *Arithmetica integra* του Stifel το 1544 και από τον Oughtred σε μία έκδοση του *Clavis mathematicae* ως εξής: για να δηλωθεί η διαίρεση 24:8 γράφεται 8)24 ή 8)24(. Αργότερα ο Stifel και ο Stevin, όπως έχει αναφερθεί, χρησιμοποιούν το γερμανικό γράμμα D (**D**) για το σκοπό αυτό. Ο Rahn στο έργο του *Teusche Algebra*, εισάγει για τη διαίρεση το σύμβολο « ÷ », ένα σύμβολο που μέχρι τότε πολλοί μαθηματικοί το χρησιμοποιούσαν για την αφαίρεση. Η μετάφραση του έργου του Rahn στα αγγλικά, βρήκε μία ευνοϊκή αποδοχή και πολλοί Άγγλοι συγγραφείς, όπως οι Wallis και Barrow, υιοθέτησαν το συμβολισμό αυτόν, ο οποίος καθιερώθηκε στην Αγγλία και στην Αμερική, αλλά όχι στην υπόλοιπη Ευρώπη (Cajori, 1928).

Ο Leibniz, όπως έχει ήδη αναφερθεί, πρότεινε στο *De arte combinatoria* το κεφαλαίο γράμμα C ανεστραμμένο στη θέση $\cap$ για τον πολλαπλασιασμό και στη θέση $\cup$ για τη διαίρεση. Το 1684, στο *Acta eruditorum*, περιλαμβάνει το σύμβολο «:» ως σύμβολο διαίρεσης, δηλώνοντας ότι η έκφραση $x:y$ δηλώνει τη διαίρεση του x με το y και τον λόγο $\frac{x}{y}$. Το σύμβολο αυτό, επικράτησε στη μη αγγλόφωνη Ευρώπη

με ελάχιστες εξαιρέσεις (Cajori, 1928).

Η διάταξη των αριθμών διαιρετέου, διαιρέτη και πηλίκου σε μία τέλεια διαίρεση παρουσιάζεται αρχικά με τη βοήθεια παρενθέσεων, ως εξής: $36)116(3$, δηλαδή $116:36=3$, κάποιες φορές ως: $116)36(3$ και αργότερα από τον Bezout, το 1833, στη γνωστή μας διάταξη:

$$\begin{array}{r|l} 14464 & 8 \\ \hline & 1808 \end{array}$$

Ο Miller (2004), αναφέρει παρουσίαση της διαδικασίας της διαίρεσης με δύο ακόμη τρόπους. Ο ένας τρόπος αναφέρεται σε συνοπτική παρουσίαση της διαίρεσης, το 1882, στο *Complete Graded Arithmetic* του James B. Thomson, όπου μία παρένθεση χωρίζει διαιρέτη και διαιρετέο, ενώ το πηλίκο χωρίζεται με μία οριζόντια γραμμή και γράφεται κάτω (Σχήμα 20).

$$\begin{array}{r} \text{OPERATION.} \\ \text{Divisor. } 4 \) \ 6272 \text{ Dividend} \\ \hline 1568 \text{ Quotient} \end{array}$$

Σχήμα 20. Παρουσίαση του αλγορίθμου της διαίρεσης

Ο δεύτερος τρόπος για αναλυτική παρουσίαση της διαίρεσης, το 1888 στην έκδοση διδασκόντων του βιβλίου *The Elements of Algebra* από τον G. A. Wentworth (Σχήμα 21). Εδώ το πηλίκο γράφεται πάνω από τον διαιρετέο και κάτω από αυτόν γίνεται η ανάλυση της διαδικασίας.

$$\begin{array}{r} 5. \quad \quad \quad -21.7 \\ -49.) \overline{1063.3} \\ \quad \quad 98 \\ \quad \quad \underline{83} \\ \quad \quad \quad 49 \\ \quad \quad \quad \underline{343} \\ \quad \quad \quad \quad 343 \\ \quad \quad \quad \quad \underline{000} \end{array}$$

Σχήμα 21. Παρουσίαση του αλγορίθμου της διαίρεσης

Σημαντική από άποψη έννοιας αλλά και συμβολισμού είναι και η τετραγωνική ρίζα, καθώς επίσης και οι ρίζες ανώτερης τάξης. Η δήλωση του αποτελέσματος της τετραγωνικής ρίζας γίνεται από τους αρχαίους Έλληνες, αρχικά μέσα από την

γεωμετρική της ερμηνεία, ως πλευράς τετραγώνου. Σε δύο Αιγυπτιακούς παπύρους, εμφανίζεται για την τετραγωνική ρίζα το σύμβολο $\sqrt{\quad}$. Μέχρι τον 16ο αιώνα, όπου η άλγεβρα χαρακτηρίζεται *ρητορική* και *συγκεκριμένη*, η δήλωση της τετραγωνικής ρίζας γίνεται συνήθως περιγραφικά π.χ. Radix, quadrata ή με απλές συντομογραφίες των R και ra, από τη λέξη radix και ℓ , από τη λατινική λέξη latus (Cajori, 1928). Οι Άραβες, δηλώνουν την τετραγωνική ρίζα βάζοντας πριν από την ποσότητα τη συντομογραφία ka, η οποία προέρχεται από τη λέξη karana που σημαίνει άρρητος (Eves, 1981).

Η πρώτη χρήση συμβόλου για την τετραγωνική ρίζα, ήταν το 1220 από τον Leonardo di Pisa στο έργο *Practica geometriae*, όπου πιο συγκεκριμένα χρησιμοποίησε το σύμβολο R (Cajori, 1928). Το ίδιο σύμβολο εμφανίζεται και σε άλλα έργα, όπως για παράδειγμα στο *Ars Magna* του Cardano. Ο Chuquet παρουσιάζει το ίδιο σύμβολο ως R^2 με διαφοροποίηση μάλιστα των αριθμών, ανάλογα με την τάξη της ρίζας (Boyer & Merzbach, 1997, Cajori, 1928), ενώ ο Bombeli χρησιμοποιεί τα σύμβολα R_q και R_c για την τετραγωνική και για την κυβική ρίζα αντίστοιχα (Eves, 1981). Την ίδια εποχή, παρουσιάζονται παράλληλα τα σύμβολα RQ για την τετραγωνική και τα Rcu και RC για την κυβική ρίζα. Το 1525 στην άλγεβρα *Die Coss* του Christoff Rudolff εμφανίζεται το σύμβολο $\sqrt{\quad}$ χωρίς την οριζόντια παύλα για να συμβολίσει την έννοια της τετραγωνικής ρίζας, χωρίς να χρησιμοποιείται για ρίζες ανώτερης τάξης (Cajori, 1928). Συχνά, προτείνεται ως εξήγηση αυτού του συμβόλου η αρχική μορφή του γράμματος r , του πρώτου γράμματος της λέξης *radix*. Αυτή η άποψη υπάρχει και στο *Institutiones calculi differentialis* (1775) του Euler, ενώ ο Cajori (1928), έχει αντίθετη άποψη, υποστηρίζοντας ότι η προέλευση του οφείλεται στην εξέλιξη ενός συμβόλου με τελεία, όπως το επόμενο $\sqrt{\quad}$, το οποίο υπήρχε σε γερμανικά χειρόγραφα για την τετραγωνική ρίζα. Το 1637, ο Descartes στο βιβλίο του *La Geometrie*, χρησιμοποιεί το σύμβολο $\sqrt{\quad}$, προσθέτοντας στο προηγούμενο σύμβολο μία οριζόντια παύλα, η οποία καθόριζε το υπόριζο. Η τοποθέτηση των δεικτών για τη δήλωση ριζών τρίτης τάξεως προτάθηκε από τον Albert Girard το 1629 στο *Invention nouvelle*, γράφοντας $\sqrt[3]{3}.20+\sqrt{392}$ για την έκφραση $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}$ (Cajori, 1928). Ο Stevin, χρησιμοποιεί το

σύμβολο $\textcircled{\frac{1}{2}}$ κατά αντιστοιχία με τις δυνάμεις για την τετραγωνική ρίζα (Boyer & Merzbach, 1997) και το σύμβολο $\sqrt{}$ ακολουθούμενο από το $\textcircled{3}$ για την κυβική ρίζα (Cajori, 1928). Σύμφωνα με τον Cajori (1928), τον συμβολισμό του Girard αποδέχονται και εξελίσσουν ο John Wallis, ο οποίος χρησιμοποιεί τον δείκτη χωρίς παρένθεση $\sqrt[3]{20}$ για το $\sqrt[3]{20}$ και ο Michel Rolle (1652-1719), ο οποίος το 1690 στο έργο του *Traité d' Algèbre* τοποθετεί και αυτός δείκτες στο σύμβολο των ριζών. Η διάδοση του συμβόλου ήταν ραγδαία και έτσι καθιερώνεται γρήγορα σε όλη την Ευρώπη. Παράλληλα, για το ίδιο σκοπό κάνουν την εμφάνιση τους και οι κλασματικές δυνάμεις, τις οποίες πρώτος ο Newton τις χρησιμοποιεί για να δηλώσει τις αντίστοιχες ρίζες στο γνωστό ανάπτυγμα του διωνύμου (Cajori, 1919).

Με τα πρώτα βήματα της συμβολικής άλγεβρας, αναδύεται η ανάγκη για ομαδοποίηση τμημάτων πράξεων γινομένου και κυρίως τετραγωνικής ρίζας. Παρουσιάζονται έτσι κάποια ιδιαίτερα σύμβολα, με σκοπό να καθορίσουν την προτεραιότητα και τη σειρά των πράξεων. Αυτό που σήμερα είναι προφανές και δεδομένο και γίνεται με την χρήση των παρενθέσεων, αγκύλων, άγκιστρων κλπ., άργησε να εμφανιστεί και να γίνει καθολικά αποδεκτό.

Ένας αρχικός τρόπος ομαδοποίησης πράξεων ήταν η παρεμβολή ενός γράμματος, ενός τμήματος λέξης, μίας τελείας, ενός κόμματος προκειμένου να δηλώσουν την αρχή ενός ομαδοποιημένου τμήματος που ακολουθεί. Μία τέτοια μέθοδος ομαδοποίησης πράξεων με το γράμμα «u ή v ή n», όπως αναφέρουν οι Cajori (1928) και Eves (1981), παρουσιάζεται από τον Pacioli στο έργο του *Summa*, σε εκδόσεις του 1494 και του 1523 ως: «Ru7pR14», για να δηλώσει το $\sqrt{7+\sqrt{14}}$, όπου το Ru αναφέρεται ως ρίζα καθολική (radix universalis ή universalis) και δηλώνει ότι η τετραγωνική ρίζα αναφέρεται σε όλη την έκφραση που ακολουθεί.

Την ίδια εποχή, κάποιοι συγγραφείς χρησιμοποιούν μία οριζόντια γραμμή κάτω από το υπό ομαδοποίηση τμήμα. Η πρώτη χρήση αυτής της μεθόδου σύμφωνα με τον Cajori (1928), παρουσιάζεται στη *Le Triparty en la Science des Nombres* του Chuquet το 1484. Ο Chuquet γράφει « $\overline{R^2.14. \overline{p}. R^2.180}$ » για την έκφραση $\sqrt{14+\sqrt{180}}$. Το παράδειγμά του ακολουθούν και άλλοι συγγραφείς, όπως οι Alexander, Bombeli και άλλοι (Cajori, 1928).

Η ομαδοποίηση πράξεων με γραμμή πάνω από το υπό ομαδοποίηση τμήμα παρουσιάζεται από τον Frans van Schooten, ο οποίος διορθώνοντας κάποιες εργασίες του Vieta τοποθετεί μία οριζόντια γραμμή, αντί των σημερινών παρενθέσεων. Έτσι, σε έκδοση του 1646 παρουσιάζεται η έκφραση $\overline{B \text{ in } D \text{ quad.} + B \text{ in } D}$, για να δηλώσει την παράσταση $B(D^2 + BD)$ κάτι που ο Vieta το έγραφε

$$B \text{ in } \left\{ \begin{array}{l} D. \text{quadratum} \\ + B \text{ in } D \end{array} \right.$$

Τον ίδιο τρόπο με μία οριζόντια γραμμή υιοθετούν πολλοί συγγραφείς. Ο Newton, στο έργο *Analysi per Aequationes numero terminorum Infinitas*, γράφει $\overline{y - 4 \times y + 5 \times y - 12 \times y + 17 = 0}$ για να αναπαραστήσει την έκφραση $\{[(y-4)y-5]y-12\}y+17=0$. Νωρίτερα, το 1631 ο Harriot, εκφράζει την ομαδοποίηση για τετραγωνική ρίζα με οριζόντιο άγκιστρο $\smile$ (Cajori, 1928).

Οι παρενθέσεις, εμφανίζονται σπάνια τον 16ο και 17ο αιώνα κυρίως από τον Tartaglia και από τον Cardano, σε μία μεταγενέστερη έκδοση της *Ars magna*, όπως τυπώθηκε στην *Opera* το 1663, ενώ στην άλγεβρα του Stifel χρησιμοποιούνται μάλλον ως σύμβολο διαχωρισμού. Οι αγκύλες [] εμφανίζονται σε χειρόγραφα της άλγεβρας *Algebra* του Bombelli, περίπου το 1550 (Cajori, 1928). Ο Bombelli, για να δηλώσει $\sqrt{7+\sqrt{14}}$ έγραφε «R[7pR14]» (Eves, 1981). Ο Cajori (1928), ισχυρίζεται ότι οι αγκύλες μαζί με τα άγκιστρα εμφανίζονται το 1593 στο έργο *Zetetica* του Vieta. Κατά τη διάρκεια του 18^{ου} αιώνα οι παρενθέσεις, οι αγκύλες και τα άγκιστρα, χρησιμοποιούνται ευρέως, όχι μόνο για να δηλώσουν ομαδοποιημένα τμήματα υπολογισμών αλλά και για άλλες μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες, όπως για παράδειγμα οι συνδυασμοί και οι διατάξεις.

Η ομαδοποίηση των ψηφίων για μεγάλους αριθμούς, παρουσιάζεται με τελείες, με κόμματα, με οριζόντιες και κάθετες γραμμές, με άνω και κάτω τελεία και άλλους τρόπους. Το 1202 στο *Liber Abaci* του Leonardo di Pisa, οι εκατοντάδες και τα πολλαπλάσια τους μαρκάρονται με ένα τόνο στο πάνω μέρος και οι χιλιάδες και τα πολλαπλάσια τους με ένα τόνο στο κάτω μέρος. Ακολουθούν στην πορεία πολλοί και διαφορετικοί τρόποι με τα σύμβολα που αναφέρθηκαν. Το πιο πρόσφατο παράδειγμα για το σημερινό τρόπο γραφής, όπου τα ψηφία χωρίζονται σε τριάδες με ένα κόμμα εμφανίζεται σύμφωνα με τον Cajori (1928), το 1795, στο άρθρο του Charles Hutton "Numeration" στο περιοδικό "*Mathematical and Philosophical Dictionary*". Ο

σημερινός τρόπος γραφής των αριθμών και η δήλωση του δεκαδικού μέρους με κόμμα, συνδέεται και με την διάδοση των δεκαδικών κλασμάτων για τον λογισμό των ρητών αριθμών το 16^ο αιώνα (Cajori, 1928). Σημαντική ήταν η συμβολή του Vieta στη χρήση των δεκαδικών κλασμάτων και όχι των εξηνταδικών. Στους πίνακες υπολογισμού του χρησιμοποιούσε δεκαδικά κλάσματα γραμμένα ως $141.421.\overline{356.24}$, $314.159.\overline{265.35}$ και $314.159.265.35$ γράφοντας με έντονο τρόπο το ακέραιο μέρος (Boyer & Merzbach, 1997). Τα δεκαδικά κλάσματα εισάγει το 1585 ο Stevin με το βιβλίο του *La disme* (Η δεκάτη - The Tenth) (Arcavi et al 1991, Struik, 1966). Μέχρι το τέλος του 16^{ου} αιώνα, τα δεκαδικά κλάσματα έχουν γίνει ήδη αποδεκτά, ενώ παίρνουν τη σημερινή τους μορφή, με μία υποδιαστολή να διαχωρίζει το δεκαδικό από το ακέραιο μέρος, το 1616, στην αγγλική μετάφραση του *Descriptio* του Napier (Boyer & Merzbach, 1997).

Οι ανάγκες για τη δήλωση συγκεκριμένων εννοιών, διαδικασιών και αριθμών με σύμβολα παρουσιάζεται εντονότερη λόγω της πολύπλευρης ανάπτυξης των μαθηματικών και τις ανακαλύψεις σε νέους τομείς. Παρουσιάζονται ιδιαίτερα σύμβολα για την παράσταση των λογαρίθμων, του απείρου, και πολλών σταθερών όπως το e , το π , το i και άλλων. Ο Wallis εισήγαγε το σημερινό σύμβολο ∞ για το άπειρο, ενώ ο Barrow χρησιμοποιεί το γράμμα π για να δηλώσει την περιφέρεια του κύκλου και αργότερα ο Jones για να δηλώσει το σταθερό λόγο περιφέρειας προς διάμετρο. Το σύμβολο αυτό, δεν χρησιμοποιήθηκε με αυτή την έννοια μέχρι που το υιοθέτησε ο Euler (Eves, 1981). Ο Euler, σύμφωνα με τους Boyer & Merzbach (1997), είναι υπεύθυνος σε μεγάλο βαθμό για τη σημερινή μορφή των μαθηματικών και την εφεύρεση και καθιέρωση πολλών συμβόλων. Χρησιμοποιεί το γράμμα e , προκειμένου να δηλώσει τη βάση του συστήματος των φυσικών λογαρίθμων, παρουσιάζει το i για τη φανταστική μονάδα, παρότι μέχρι τότε το χρησιμοποιούσε για το άπειρο. Το i , καθιερώθηκε ως το σύμβολο της μιγαδικής μονάδας από τον Gauss, ο οποίος το χρησιμοποίησε στα έργα του. Τα τρία σύμβολα π , e και i για τα οποία ως ένα βαθμό ο Euler είναι υπεύθυνος, συνδυάζονται με τους δύο βασικούς αριθμούς 0 και 1 για τη διάσημη ισότητα $e^{\pi i} + 1 = 0$. Το πιο σημαντικό σύμβολο που εισάγει ο Euler, είναι το σύμβολο $f(x)$ για να δηλώσει μία συνάρτηση του x , το οποίο υπάρχει στα *Σχόλια* της Πετρούπολης από το 1734 έως το 1735 (Boyer & Merzbach, 1997).

Η ανάπτυξη και εξέλιξη του συμβολισμού μετά το 13^ο αιώνα ήταν τεράστια, όπως προκύπτει από τα προαναφερόμενα στοιχεία. Η εξέλιξη αυτή, ακολουθούσε την έκρηξη των ιδεών και τις μαθηματικές ανακαλύψεις των ερευνητών της εποχής. Ένα μεγάλο βήμα προς την κατεύθυνση αυτή, ήταν η εισαγωγή ιδιαίτερου συμβολισμού για την Άλγεβρα και την Αριθμητική, δηλαδή η καθιέρωση του Ινδό - Αραβικού συστήματος αρίθμησης, η εδραίωση συμβόλων για τις πράξεις, τις δυνάμεις, την ισότητα και άλλες διαδικασίες. Καθοριστικό όμως βήμα, ήταν ο συμβολισμός της άγνωστης ποσότητας και η συνεισφορά του Vieta σε αυτό είναι καθοριστική. Η εξέλιξη των σταδίων της Άλγεβρας και η εισαγωγή του εγγράμματος συμβολισμού, θα αναπτυχθεί στην επόμενη παράγραφο.

3.3 Το μεγάλο άλμα του Εγγράμματος Λογισμού

Η μελέτη προβλημάτων με αριθμούς κατά τη διάρκεια των αρχαίων χρόνων, παρουσίασε δύο όψεις: την ανίχνευση σχέσεων μεταξύ αριθμών και την ανάπτυξη της τέχνης των πρακτικών υπολογισμών. Κάτι τέτοιο οδήγησε τους αρχαίους Έλληνες στη διάκριση των δύο αυτών δραστηριοτήτων σε αριθμητική και λογιστική, μία διάκριση που διατηρήθηκε και καθ' όλη τη διάρκεια του Μεσαίωνα. Στη συνέχεια και οι δύο αυτές όψεις παρουσιάζονται κάτω από το κοινό όνομα *αριθμητική* ενώ σήμερα ονομάζονται Θεωρία Αριθμών και Άλγεβρα (Eves, 1981). Η ενασχόληση των μαθηματικών με τους υπολογισμούς, με τις σχέσεις των αριθμών και με την επίλυση εξισώσεων, παρουσιάζει σημαντική πρόοδο, ακόμη και σε περιόδους που υπήρχε έλλειψη συμβολικού συστήματος για το σκοπό αυτό. Για παράδειγμα, υπήρξε πρωτοφανής άνθηση της άλγεβρας κατά την πρώτη Βαβυλωνιακή Δυναστεία το 1700 π.Χ., ενώ αντίθετα η ανάπτυξη της αριθμητικής των Αιγυπτίων έγινε με αργούς ρυθμούς (Van der Waerden, 2003). Όπως είναι γνωστό, οι Βαβυλώνιοι έλυναν εξισώσεις και συστήματα εξισώσεων με συγκεκριμένη μέθοδο, διαφορετική από αυτή των Αράβων. Ερμήνευαν όμως κατά τη διαδικασία επίλυσης, το γινόμενο ως εμβαδόν και το τετράγωνο ως εμβαδόν τετραγώνου, κάτι που φαίνεται από την ορολογία που χρησιμοποιούσαν. Παρόλα αυτά, ο τρόπος σκέψης τους είναι πρωτίστως αλγεβρικός, αφού υπολογίζουν το ζητούμενο χωρίς απόδειξη ή γεωμετρική κατασκευή, χρησιμοποιούν προσεγγίσεις για τους άρρητους και με ευκολία πολλαπλασιάζουν δύο επιφάνειες ή προσθέτουν την επιφάνεια xy με το μήκος $x-y$, κάτι που δεν έκαναν ποτέ οι αρχαίοι Έλληνες (Van der Waerden, 2003). Σύμφωνα με τον Van der Waerden (2003), οι αρχαίοι Έλληνες για τη μελέτη προβλημάτων με αριθμούς, δεν υιοθέτησαν τη βαβυλωνιακή άλγεβρα όπως ήταν, αλλά έθεσαν σε γεωμετρική μορφή, τόσο τη σκέψη και τη μέθοδο, όσο και την ερμηνεία των προβλημάτων. Αυτό συνέβη, όχι μόνο για την απόλαυση του ορατού κατά την ενασχόληση τους με τη λύση του προβλήματος, αλλά κυρίως γιατί η ανακάλυψη της ασυμμετρίας τους οδήγησε σε γεωμετρική παράσταση μεγεθών, ώστε να επιτύχουν τη λογική αυστηρότητα που επιθυμούσαν. Η έννοια του αριθμού για αυτούς, δεν περιελάμβανε τους σημερινούς άρρητους, αφού «αριθμός» ήταν μόνο ο φυσικός αριθμός. Ο ορισμός του αριθμού για τον Ευκλείδη είναι σαφής (Ευκλείδη, Βιβλίο Ζ, Ορισμός 2):

«Ἀριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος,
ποσότητα συγκείμενη ἀπὸ μονάδες» (Σταμάτης, 1975)

Παρότι φαίνεται ὅτι κάποιοι Ἕλληνες μαθηματικοί, ὅπως ο Θεαίτητος καὶ ο Απολλώνιος, ἦταν κατὰ βάθος αλγεβριστές, περιέβαλαν τοὺς συλλογισμοὺς τοὺς με γεωμετρικὸ ἔνδυμα. Ἐτσι, ἡ ἐλληνικὴ ἀλγεβρα εἶναι μία θεωρία ευθυγράμμων τμημάτων καὶ χωρίων καὶ ὄχι ἀριθμῶν, χαρακτηρίζεται δε ὡς γεωμετρικὴ, ἀφοῦ ἡ γεωμετρικὴ μορφή κυριαρχεῖ στὴν παράσταση καὶ τὴν ἐρμηνεία τῶν ἀριθμῶν. Για παράδειγμα, τὴν εποχὴ τοῦ Πυθαγόρα υπήρχαν ο παραστατικοὶ ἀριθμοὶ τρίγωνος, τετράγωνος, ὀρθογώνιος κλπ., ἡ ἀπόδειξη τῆς σχέσης $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$ γινόταν με τὴ βοήθεια τοῦ γνώμονα, ἡ ἐξίσωση $x^2=a(a-x)$ λυνόταν με τὴ βοήθεια τῆς παραβολῆς χωρίων καὶ ἡ ἐρμηνεία τῶν λύσεων μίας ἐξίσωσης ἀντιστοιχοῦσε πάντα σὲ ἓνα γεωμετρικὸ μέγεθος (Van der Waerden, 2003). Παρά τὴ μεγάλη ἀνάπτυξη τῆς ἀλγεβρας, τὰ σύμβολα ποὺ χρησιμοποιοῦν μέχρι τότε ο μαθηματικοὶ (Βαβυλώνιοι, Αἰγύπτιοι, Ἕλληνες κλπ.) περιορίζονται σὲ κάποιες συντομογραφίες γιὰ τὶς πράξεις καὶ τὰ σχήματα καὶ παράλληλα, ο λέξεις τῆς φυσικῆς γλώσσας περιγράφουν τὴ διαδικασία καὶ τοὺς μετασχηματισμοὺς κατὰ τὴν επίλυση τῶν ἐξισώσεων. Για τὸ λόγο αὐτό, ἡ Ἀλγεβρα τὴν εποχὴ αὐτὴ χαρακτηρίζεται ἀπὸ τὸν Nesselmann ὡς «ρητορική» (Spangolo 2006, Eves, 1981, Heath, 2001). Τὰ ἀρχαῖα ἐλληνικὰ μαθηματικά, κυρίως με τὸ ἔργο τοῦ Εὐκλείδη, ἀσκήσαν μεγάλη ἐπιρροή στὴν περαιτέρω ἀνάπτυξη τῶν μαθηματικῶν καὶ ἡ γεωμετρικὴ ἐποπτεία κυριάρχησε στὴ μαθηματικὴ σκέψη μέχρι τὸν 17^ο αἰῶνα. Πολλοὶ ἦταν ο μαθηματικοὶ ποὺ σὲ αλγεβρικές διαδικασίες, εἶχαν ἐγκλωβιστεῖ στὴ γεωμετρικὴ ἐρμηνεία με ἀποτέλεσμα, νὰ περιορίζουν τὸ πεδίο τῆς ἀλγεβρας καὶ νὰ μὴν δέχονται ἔτσι, ἀρνητικούς ἀριθμοὺς γιὰ συντελεστές καὶ λύσεις ἐξισώσεων (Boyer & Merzbach, 1997).

Ο πρῶτος σημαντικὸς σταθμὸς γιὰ τὴν Ἀλγεβρα, σχετικὰ με τὴ συμβολικὴ παράσταση τῶν ἐξισώσεων, ἦταν ἡ καινοτομία τοῦ Διόφαντου γιὰ τὸ συμβολισμό τῶν ἀγνώστων, με τὴν εἰσαγωγή καὶ χρῆση συντομογραφιών. Για τὴν Bashmakova (1999a), μία σημαντικὴ γιὰ τὴν ἐξέλιξη τῆς ἀλγεβρας περίοδος ξεκινᾷ με τὴν εἰσαγωγή **εγγράμματος συμβολισμοῦ** ἀπὸ τὸν Διόφαντο καὶ τελειώνει με τὴ δημιουργία τοῦ **εγγράμματος λογισμοῦ** ἀπὸ τὸν Vieta. Ο Διόφαντος ὁ ὁποῖος πιθανολογεῖται ὅτι ἐζήσε στα μέσα τοῦ 3ου μ.Χ. αἰῶνα, ἔγραψε τρεῖς μαθηματικές ἐργασίες. Τὰ *Αριθμητικά*, ἐργασία ἀπὸ τὴν ὁποία ἔχουν σωθεῖ μόνο ἑξὶ ἀπὸ τὰ

δεκατρία βιβλία, *Για τους Πολυγωνικούς Αριθμούς*, εργασία από την οποία υπάρχει μόνο ένα μέρος και τα *Πορίσματα*, εργασία που έχει χαθεί (Eves, 1981). Το πιο σημαντικό έργο του Διόφαντου είναι τα *Αριθμητικά*, με 189 προβλήματα. Το πρώτο βιβλίο περιέχει εξισώσεις με έναν άγνωστο, ενώ τα άλλα βιβλία ασχολούνται με αόριστες εξισώσεις πρώτου και δευτέρου βαθμού με δύο ή τρεις αγνώστους, καθώς επίσης και με μία πολύ ειδική κυβική εξίσωση. Ο Διόφαντος δεχόταν μόνο θετικές και ρητές λύσεις και στις περισσότερες των περιπτώσεων ήταν ικανοποιημένος όταν έβρισκε μία λύση σε ένα πρόβλημα, έστω και αν αυτό δεχόταν και άλλες λύσεις (Χριστιανίδης, 2003, Eves, 1981).

Για τη λύση των εξισώσεων ο Διόφαντος χρησιμοποιούσε μεθόδους από την άλγεβρα των Βαβυλωνίων, τις οποίες συναντάμε αργότερα και στην άλγεβρα του al-Khowarizmi (Van der Waerden, 2003). Ο Heath (2001), ισχυρίζεται ότι είναι λίγες οι γενικές μέθοδοι επίλυσης του Διόφαντου, λόγω της ποικιλίας και της πληθώρας των τεχνασμάτων και των επινοήσεων που χρησιμοποιεί ξεχωριστά για κάθε ένα πρόβλημα. Παράλληλα, ο Eves (1981) παρατηρεί την εντυπωσιακή απουσία γενικών μεθόδων σε όλες τις λύσεις των προβλημάτων, ενώ αντίθετα, ο Χριστιανίδης (2003) και η Bashmakova (1999a), ισχυρίζονται ότι υπάρχει μία συγκεκριμένη στρατηγική που ακολουθούσε ο Διόφαντος για να επιλύσει τις εξισώσεις με δύο αγνώστους, η οποία, όπως και άλλες μέθοδοι των αρχαίων Ελλήνων, δεν διατυπώνεται ξεκάθαρα.

Ο Διόφαντος δεν ήταν ο πρώτος που πραγματεύτηκε εξισώσεις με αλγεβρικό τρόπο. Σε έργα του Ήρωνα, η αριθμητική επίλυση εξισώσεων είναι καθιερωμένη. Το γεγονός ότι ο Ήρωνας θεωρεί ένα ευθύγραμμο τμήμα ως αριθμό και όχι ως γεωμετρικό μέγεθος γίνεται φανερό από τον τύπο $E = \sqrt{\rho(\rho - \alpha)(\rho - \beta)(\rho - \gamma)}$, ο οποίος υπολογίζει το εμβαδόν ενός τριγώνου από τις πλευρές του. Ο αριθμός που βρίσκεται κάτω από τη ρίζα είναι μη αποδεκτός για τη γεωμετρική άλγεβρα των αρχαίων Ελλήνων, αφού το γινόμενο τεσσάρων αριθμών δεν συνδέεται με γεωμετρικό μέγεθος (Bashmakova 1999a). Σύμφωνα με τον Heath (2001), αυτό που διαφοροποιεί το Διόφαντο στην επίλυση των εξισώσεων, είναι το γεγονός ότι προχώρησε ένα βήμα προς τον αλγεβρικό συμβολισμό.

Στην αρχή του πρώτου βιβλίου των Αριθμητικών ο Διόφαντος, προτάσσει μία εισαγωγή, η οποία έχει χαρακτηριστεί από πολλούς ιστορικούς των μαθηματικών ως το αρχαιότερο εγχειρίδιο άλγεβρας στην ιστορία των μαθηματικών (Χριστιανίδης,

2003). Στην εισαγωγή αυτή ο Διόφαντος, παρουσιάζει μία ειδική ορολογία, καθώς επίσης και μία σειρά από συντομογραφίες, για την παράσταση των διαδοχικών δυνάμεων του αγνώστου, των «ειδών» όπως αναφέρει ο ίδιος. Συγκεκριμένα παριστάνει τον άγνωστο με ένα σύμβολο όμοιο με το γράμμα «ς», σύμβολο για το οποίο πιστεύεται ότι προέρχεται από τη συγχώνευση των δύο πρώτων γραμμάτων της λέξης αριθμός α και ρ ή από το τελευταίο της γράμμα (Heath, 2001, Van der Waerden, 2003). Είναι δε πιθανό, το σύμβολο αυτό να έχει χρησιμοποιηθεί για να συμβολίσει τον άγνωστο και πριν από τον Διόφαντο (Bashmakova 1999a, Van der Waerden, 2003). Επιπλέον, ο Διόφαντος χρησιμοποιεί ειδικές ονομασίες και τις αντίστοιχες συντομογραφίες τους για τις θετικές και αρνητικές δυνάμεις του αγνώστου «ς», όπως παρακάτω: *δύναμις*, Δ^Y για το x^2 , *κύβος*, K^Y για το x^3 , *δυναμοδύναμις* $\Delta^Y\Delta$ για το x^4 , *δυναμοκύβος* ΔK^Y για το x^5 και ούτω καθεξής. Αντίστοιχες ονομασίες και συντομογραφίες παρουσιάζει για τις αρνητικές δυνάμεις, επισυνάπτοντας ένα χ στον εκθέτη δηλαδή, *αριθμοστόν*, ζ^x για το $1/x=x^{-1}$, *δυναμοστόν*, $\Delta^Y\chi$ για το $x^{-2}=1/x^2$ και ούτω καθεξής. Η μηδενική δύναμη του αγνώστου ονομάζεται *μονάς* και παριστάνεται με $\overset{\circ}{M}$, σύμβολο το οποίο σύμφωνα με την Bashmakova (1999a), προέρχεται από τα δύο πρώτα γράμματα της λέξης «μονάς». Οι αριθμητικοί συντελεστές που δηλώνουν το πλήθος των ειδών γράφονται με το γνωστό αλφαριθμητικό σύστημα μετά τη συντομογραφία του αγνώστου. Έτσι, το μονώνυμο $2x^5$ γράφεται $\Delta K^Y \beta'$ ενώ το $2/x^5$ γράφεται $\Delta K^Y \chi \beta$. Για την περιγραφή των διαδικασιών, ο Διόφαντος χρησιμοποιεί για την ισότητα τη λέξη «ἴσος» ή τη συντομογραφία «ἴσ» ή «ι^ς» και για την αφαίρεση το σύμβολο Λ που προφέρεται *λεῖμις*. Η πρόσθεση, δηλώνεται με απλή σε σειρά παράθεση των συντομογραφιών, πρώτα όλων των θετικών ποσοτήτων και μετά το σύμβολο της αφαίρεσης, των αρνητικών ποσοτήτων.

Έτσι η εξίσωση $x^3-2x^2+10x-1=5$ γράφεται :

$$K^Y \alpha' \zeta \iota' \Lambda \Delta^Y \beta' \overset{\circ}{M} \alpha' \text{ ἴστιν ἴσος } \overset{\circ}{M} \epsilon'$$

Παράλληλα με την αναφορά των συντομογραφιών στην εισαγωγή του πρώτου βιβλίου των Αριθμητικών, ο Διόφαντος διατυπώνει τον κανόνα για τον πολλαπλασιασμό μεταξύ προστιθέμενων και αφαιρούμενων ειδών. Για τον κανόνα αυτό, ο Χριστιανίδης (2003, σελ. 110), υποστηρίζει ότι δεν είναι ο γνωστός κανόνας των προσημών, αφού «στο αριθμητικό σύμπαν του Διόφαντου δεν είχαν θέση οι

αρνητικοί αριθμοί». Στα Αριθμητικά ο Διόφαντος, διατυπώνει δύο επιπλέον κανόνες που αφορούν (α) στη μεταφορά ενός όρου από το ένα μέρος της εξίσωσης στο άλλο, αλλάζοντας πρόσημο και (β) στην αναγωγή ομοίων όρων. Αυτοί οι δύο κανόνες έγιναν ιδιαίτερα γνωστοί αργότερα, από το βιβλίο του al-Khowarizmi, με τα ονόματα al-jabr και al-muqabala, ενώ από τη λατινική μετάφραση του όρου al-jabr προήλθε η λέξη algebra - άλγεβρα (Χριστιανίδης, 2003). Ο κανόνας της αντικατάστασης προκειμένου ένα πρόβλημα να γίνει πιο απλό, δεν διατυπώνεται ρητά στο έργο του Διόφαντου. Η Bashmakova (1999a), αναφέρει τον κανόνα πολλαπλασιασμού ως κανόνα προσήμων και τον κανόνα της μεταφοράς αρνητικού ως τον κανόνα $-(-a)=a$. Παρουσιάζει δε ως παράδειγμα εφαρμογής του, το πρόβλημα VI₁₄, όπου το $90-15x^2$ αφαιρείται από το 54 και το αποτέλεσμα είναι $15x^2-36$. Υπάρχει δηλαδή αφαίρεση του $-15x^2$ από το μηδέν. Για το λόγο αυτό, ισχυρίζεται ότι ο Διόφαντος χρησιμοποιεί τους αρνητικούς αριθμούς σε ένα ενδιάμεσο στάδιο υπολογισμών (*intermediate computations*), όπως έγινε αργότερα με τους μιγαδικούς αριθμούς από τον Bombeli.

Η εισαγωγή του συμβολισμού από τον Διόφαντο για την παράσταση και λύση των εξισώσεων, ήταν ένα μεγάλο βήμα στην εξέλιξη της Άλγεβρας. Ο Nesselmann ονομάζει την άλγεβρα του Διόφαντου «συγκεκριμένη» (Klein, 1968, Eves, 1981). Η καινοτομία του Διόφαντου, σύμφωνα με την άποψη του Hultsch, την οποία αναφέρει ο Χριστιανίδης (2003, σελ. 108-109), δεν βρίσκεται τόσο στην επινόηση των συντομογραφιών, η οποία χαρακτηρίζεται σημαντική έτσι και αλλιώς. Βρίσκεται κυρίως στο γεγονός ότι εισήγαγε τις συντομογραφίες αυτές στο λογιστικό μέρος της επιλυτικής διαδικασίας των προβλημάτων και ανέπτυξε με τα «είδη» και τους κανόνες έναν λογισμό, καθιστώντας έτσι το συμβολισμό αυτό χρήσιμο εργαλείο εφαρμογής. Το γεγονός αυτό, του επέτρεπε να λύνει ένα μεγάλο πλήθος προβλημάτων της αριθμητικής και της άλγεβρας, ανάγοντας καθορισμένα και αόριστα (*determinate and indeterminate*) προβλήματα σε εξισώσεις. Κάτι αντίστοιχο έκανε αργότερα ο Descartes, ανάγοντας προβλήματα γεωμετρίας σε αλγεβρικές εξισώσεις, με τη βοήθεια των συντεταγμένων (Bashmakova, 1999a).

Η επίδραση που άσκησε το έργο του Διόφαντου στη γέννηση των νεότερων μαθηματικών από τους Vieta, Descartes, Fermat και τους άλλους μαθηματικούς του 17^{ου} αιώνα, είναι πολύ μεγάλη και θα μπορούσε να συνοψιστεί στα λόγια του J. Klein: «*Η νεότερη άλγεβρα και ο νεότερος φορμαλισμός αναπτύχθηκαν από την άμεση ενασχόληση του Vieta με τον Διόφαντο. Οι μεταγενέστεροι συγγραφείς απλώς*

επεξεργάστηκαν περαιτέρω και λεπτομερέστερα το έργο του Vieta» (Χριστιανίδης, 2003, σελ. 110). Επιπλέον για το ίδιο θέμα, η Bashmakova (1999a), αναφέρει τη σημαντική επίδραση που είχε η μέθοδος του Διόφαντου στις εργασίες του Poincaré, οι οποίες εμφανίστηκαν στις αρχές του 20^{ου} αιώνα σε ένα τομέα αλγεβρικών καμπυλών (algebraic curves), που αναπτύσσεται ακόμη και σήμερα.

Στη μετά τον Διόφαντο εποχή, η Άλγεβρα και ο συμβολισμός της εξελίσσονται με αργά βήματα. Οι Ινδοί, αναπτύσσουν την άλγεβρα εισάγοντας το γνωστό αριθμητικό σύστημα και κάποιες συντομογραφίες για τις πράξεις που έχουν ήδη αναφερθεί. Κατά την επίλυση των εξισώσεων αναζητούν μόνο ακέραιες λύσεις, θετικές και αρνητικές. Για παράδειγμα, ο Bhaskara έδινε ως ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 45x = 250$ τους αριθμούς 50 και -5 (Struik, 1966). Επιπλέον, ο Brahmagupta τον 7^ο αιώνα δήλωνε τον άγνωστο με *ya* από την λέξη *yavattavat* που σήμαινε «όσο» και τους σταθερούς ακέραιους με το πρόθεμα *ru* από τη λέξη *rupa* που σήμαινε απόλυτος αριθμός. Οι επιπλέον άγνωστοι, συμβολίζονταν με τις πρώτες συλλαβές λέξεων από χρώματα, όπως για παράδειγμα ο δεύτερος άγνωστος γραφόταν *ka* από τη λέξη *kalaca* που σήμαινε μαύρο, ο τρίτος *ni* από τη λέξη *nilaca* που σήμαινε μπλε, κλπ. Η πρόσθεση δηλωνόταν με τη συντομογραφία *yu* και η ισότητα με *pha* (Eves, 1981,

Cajori, 1928). Για παράδειγμα, η έκφραση $12 \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 7 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} yu$ σημαίνει $\frac{5}{1} + \frac{7}{1} = 12$

(Cajori, 1919). Στα χειρόγραφα Bakhshali η άγνωστη ποσότητα δηλωνόταν με τη λέξη *sunya* ή με μία κουκίδα. Επειδή η λέξη *sunya* σήμαινε εκτός από «κενός» (empty) και «μηδέν», υπάρχει η εικασία ότι από αυτόν το συμβολισμό εξελίχθηκε και ο συμβολισμός της κουκίδας για το μηδέν από τους Άραβες. Επιπλέον, το «κενό» ήταν σε αυτή την περίπτωση κενό, μέχρι να εξακριβωθεί ο αριθμός που θα οδηγούσε στη λύση της εξίσωσης (Cajori, 1919).

Τα μαθηματικά της ισλαμικής περιόδου φανερώνουν την ίδια ανάμιξη επιρροών που έχουμε συναντήσει στα μαθηματικά της Αλεξάνδρειας και της Ινδίας. Η πρώτη αραβική αριθμητική που γνωρίζουμε είναι αυτή του al Khwarizmi, γραμμένη περίπου το 825. Σε αυτήν, γίνεται μελέτη των γραμμικών και δευτεροβάθμιων εξισώσεων, χωρίς όμως κάποιον αλγεβρικό φορμαλισμό, καθώς απουσιάζουν οι συντομογραφίες του Διόφαντου και αυτές των προγενέστερων Ινδών. Όλες οι διαδικασίες, οι έννοιες, ακόμη και οι αριθμοί, περιγράφονται με πεζό λόγο (Struik, 1966, Eves, 1981, Cajori, 1928). Γενικά, η άλγεβρα αναπτύχθηκε σε μεγάλο

βαθμό από τους Άραβες, οι οποίοι ασχολήθηκαν με τη λύση εξισώσεων με επαναληπτική παρεμβολή, με τριγωνομετρικές μεθόδους και με τη μέθοδο που σήμερα αποκαλούμε *μέθοδο Horner*. Κάποιες από αυτές τις γνώριζαν ίσως από τους Κινέζους, οι οποίοι είχαν αναπτύξει και αυτοί μεθόδους επίλυσης εξισώσεων (Struik, 1966). Παρά την ανάπτυξη και τη χρήση κάποιων συντομογραφιών για τις πράξεις και για τις δυνάμεις των αγνώστων, η άλγεβρα των Αράβων και των Ινδών χαρακτηρίζεται ως ρητορική (Heath, 2001).

Την ίδια περίπου εποχή στο Βυζάντιο, δεν υπάρχει μία δημιουργική συνέχεια των μαθηματικών, παρόλο που οι Βυζαντινοί ενδιαφέρονται για τη μαθηματική παιδεία, τη σχετική με τις καθημερινές ανάγκες. Κατά τη διάρκεια των χρόνων αυτών, υπάρχει μία ενέργεια σχετική με την εμφάνιση αριθμητικών συμβόλων υπό μορφή γραμμάτων για την παράσταση των «γενικών αριθμών», η οποία οφείλεται στον Λέων, Πρύτανη του Πανεπιστημίου του Βάρδα. Ο Λέων, χρησιμοποιεί τα γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου όπως εμείς τους γενικούς αριθμούς όπως φαίνεται από ένα σχόλιο που κρατάει ένας μαθητής του από το 888 μ.Χ. σε ένα χειρόγραφο του Ευκλείδη. Στο σχόλιο αυτό, αποδεικνύονται ιδιότητες με τα γράμματα από το α ως και το κ χωρίς τα ς και ι, ακολουθούμενες από αριθμητικά παραδείγματα για συγκεκριμένες τιμές των γραμμάτων, όπως για παράδειγμα για $\alpha=4$, $\beta=5$ και $\gamma=6$ (Vogel, 1996).

Παράλληλα, στη λατινόφωνη Δύση, με την ανάπτυξη του εμπορίου και την επαφή δυτικών εμπόρων με τους Άραβες της Μεσογείου, τα υπολογιστικά μαθηματικά των Αράβων έκαναν την εμφάνιση τους κυρίως στην τάξη των εμπόρων των μεγάλων εμπορικών πόλεων. Ο πρώτος δυτικός έμπορος, του οποίου οι μαθηματικές μελέτες φανέρωναν μία ωριμότητα, ήταν ο Leonardo di Pisa. Το 1202, ο Leonardo έγραψε το *Liber Abaci*, ένα βιβλίο με άφθονο αριθμητικό και αλγεβρικό υλικό, τόσο με παραπομπές στην αραβική άλγεβρα του al Khowarizmi, όσο και σε νέα προβλήματα. Το *Liber Abaci*, αποτελεί ένα από τα μέσα, τα οποία βοήθησαν ώστε το ινδό - αραβικό σύστημα αρίθμησης να γίνει αποδεκτό στη Δυτική Ευρώπη (Struik, 1966). Στα δεκαπέντε κεφάλαια του βιβλίου, εξηγούνται η ανάγνωση και η γραφή των νέων συμβόλων, οι μέθοδοι υπολογισμού με ακεραίους και κλάσματα, οι υπολογισμοί τετραγωνικών και κυβικών ριζών, καθώς επίσης και η λύση γραμμικών και δευτεροβάθμιων εξισώσεων με τη μέθοδο της λαθεμένης παραδοχής και με άλλες αλγεβρικές μεθόδους. Τα κλάσματα γράφονται με κλασματική γραμμή και στην

περίπτωση των μικτών αριθμών, πριν από τον ακέραιο. Η λέξη *radices* ή *radix* χρησιμοποιείται για τον άγνωστο x , ενώ για το x^2 γράφεται η λέξη *census*. Έτσι, η έκφραση “*radices* $\frac{1}{2}12$ ” δηλώνει το $12\frac{1}{2}x$, ενώ το γινόμενο των α και β δηλώνεται με την έκφραση «*factus ex.α.β*». Η χρήση γραμμάτων για την παράσταση μη κατονομασμένων αριθμών, είναι μία από τις πρακτικές που ακολουθούνται στο βιβλίο αυτό. Αρνητικές και φανταστικές ρίζες εξισώσεων δεν αναγνωρίζονται, ενώ η άλγεβρα που παρουσιάζεται από τον Leonardo di Pisa είναι ρητορική (Eves, 1981, Cajori, 1928, Χριστιανίδης, 1996).

Στη συνέχεια, κατά τον 14^ο και 15^ο αιώνα, κυρίως Ιταλοί και Γερμανοί μαθηματικοί αναπτύσσουν τα μαθηματικά με τη βοήθεια μεταφράσεων Ελληνικών και Αραβικών έργων. Παρουσιάζονται τότε κάποια δείγματα συντομογραφιών για την άλγεβρα, όπως για παράδειγμα η δήλωση της άγνωστης ποσότητας ανάλογα με τη δύναμη. Συγκεκριμένα, ο Pacioli στη *Summa de Aritmetica* το 1494 χρησιμοποιούσε τις συντομογραφίες *co* για το x από τη λέξη *cosa* που σήμαινε «πράγμα», *ce* για το x^2 από τη λέξη *censo*, *cu* για το x^3 από τη λέξη *cuba*, *cece* για το x^4 από τη λέξη *censocenso* ενώ αντίστοιχα ο Stifel, για να συμβολίσει την άγνωστη ποσότητα και τις δυνάμεις της, χρησιμοποιεί συντμήσεις των γερμανικών λέξεων *coss*, *zensus*, *cubus* και *zenzizensus* (Cajori, 1919, Boyer & Merzbach, 1997). Ο Regiomontanus ο οποίος γνώριζε τόσο τα *Αριθμητικά* του Διόφαντου, όσο και αλγοριθμικές μεθόδους των Αράβων, ασχολήθηκε με την επίλυση εξισώσεων. Η άλγεβρα όμως που παρουσίασε ήταν ρητορική, παρά τη συστηματική χρήση γραμμάτων για τυχαίους αριθμούς στους αποδεικτικούς συλλογισμούς και την παρουσία κάποιων συντομογραφιών που έχουν ήδη αναφερθεί (Boyer & Merzbach, 1997, Χριστιανίδης, 1996). Το 1484, γράφτηκε στη Γαλλία ένα χειρόγραφο με τον τίτλο *Triparty* από τον μαθηματικό Chuquet. Στο έργο αυτό, αναφέρονται τα σύμβολα $\tilde{p}$ και $\tilde{m}$ για τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, R^2 για την τετραγωνική ρίζα, R^3 για την κυβική κοκ. και συντομογραφίες λέξεων *res*, *chose*, *cosa*, *coss* και *premier* για την άγνωστη ποσότητα και τις δυνάμεις της. Στο βιβλίο αυτό, αναφέρεται για πρώτη φορά, ο εκθετικός συμβολισμός που εφηύρε ο Chuquet για την παράσταση των πολλαπλασίων δυνάμεων. Συγκεκριμένα οι σύγχρονες εκφράσεις $5x$, $6x^2$ και $10x^3$ παριστάνονται ως « $.5.^1$ », « $.6.^2$ », και « $.10.^3$ ». Παράλληλα, οι μηδενικοί και αρνητικοί εκθέτες υπόκεινται και αυτοί στον ίδιο κανόνα με τους

θετικούς ακεραίους και έτσι το $9x^0$ έγινε « $9.^0$ » ενώ το $9x^{-2}$ έγινε « $9.^{2.m}$ » δηλαδή « $9.^{2.m}$ » (πλην δευτέρα). Ο συμβολισμός αυτός, αποκάλυψε στον Chuquet τους κανόνες των εκθετών και έτσι γράφει ότι «αν το $.72.^1$ διαιρεθεί με το $.8.^3$ δίνει αποτέλεσμα $.9.^{2.m}$ », δηλαδή $72x / 8x^3 = 9x^{-2}$. Μία ακόμη καινοτομία παρουσιάζει ο Chuquet όταν γράφει « $.4.^1$ ισούται με $\tilde{m} .2.^0$ », δηλαδή $4x = -2$, εκφράζοντας για πρώτη φορά ένα μεμονωμένο αρνητικό αριθμό σε μία αλγεβρική εξίσωση (Boyer & Merzbach, 1997, Cajori, 1928).

Η εποχή έχει πια ωριμάσει για την άλγεβρα και έτσι τον 16^ο αιώνα κάνουν την εμφάνιση τους εγχειρίδια αριθμητικής, στα οποία σύμβολα και λέξεις χρησιμοποιούνται για τις πράξεις, την ισότητα, τις τετραγωνικές ρίζες και άλλες έννοιες και διαδικασίες. Η ανάγκη και η αναζήτηση μετουσιώνεται σε ιδέα και αυτή σε συμβολική αναπαράσταση, προκειμένου να διευκολυνθούν διαδικασίες και υπολογισμοί. Για παράδειγμα, κυκλοφορούν πολλές γερμανικές άλγεβρες, εκ των οποίων οι πιο σημαντικές ήταν: η *Coss* του Rudolf, η *Rechnung* του Arrian και η *Arithmetica integra* του Stifel. Οι άλγεβρες αυτές, αναφέρονται με σαφή τρόπο στη χρήση των αρνητικών αριθμών, τα δεκαδικά κλάσματα, τις τετραγωνικές ρίζες και τις δυνάμεις. Είναι μαζί με τις άλλες άλγεβρες, το μέσο με το οποίο διαδόθηκαν τα σύμβολα «+» και «-» για την πρόσθεση και την αφαίρεση, το σύγχρονο σύμβολο της τετραγωνικής ρίζας $\sqrt{}$ και πολλά άλλα. Σε μία μεταγενέστερη μελέτη του ο Stifel προτείνει τη χρήση ενός γράμματος για τον άγνωστο και επανάληψη του γράμματος για τις δυνάμεις του αγνώστου, μία πρόταση που ακολούθησε αργότερα ο Harriot στο έργο του *Artis analyticae praxis* το 1631 (Boyer & Merzbach, 1997, Cajori, 1928).

Δύο ακόμη συγγράμματα, η *Ars magna* του Cardano και η *Algebra* του Bombeli είναι σημαντικά έργα όχι μόνο για το συμβολισμό που χρησιμοποίησαν, αλλά για τη συμβολή τους στην εξέλιξη νέων αντικειμένων της Άλγεβρας. Το πρώτο, η *Ars magna* – «Μεγάλη τέχνη», αναφέρεται στη λύση κυβικών και τετάρτου βαθμού εξισώσεων, παρουσιάζοντας τη λύση αναλυτικά για συγκεκριμένους αριθμητικούς συντελεστές, ενώ παράλληλα μνημονεύει ως εφευρέτη της τον Ferrari. Ο Cardano χρησιμοποιεί λίγες συντμήσεις, κάποια σύμβολα από τη *Summa* του Pacioli και πολλές λέξεις σε πεζό λόγο, ενώ η σκέψη του κατά την επίλυση των εξισώσεων είναι γεωμετρική. Τα σύμβολα για τις πράξεις πρόσθεση και αφαίρεση είναι τα p και m , ενώ για την τετραγωνική ρίζα το R . Σε ένα παράδειγμα το 1545, όπου ψάχνει δύο

μέρη για το 10 με γινόμενο 40, οι κανόνες τον οδηγούν στις λύσεις $5 + \sqrt{-15}$ και $5 - \sqrt{-15}$, Το παράδειγμα είναι τυπωμένο ως εξής:

$$\begin{array}{r} 5p:Rm:15 \\ 5m:Rm:15 \\ \hline 25m:m: 15 \tilde{q} \text{ d. est } 40 \end{array}$$

Σε επανέκδοση της *Ars magna* το 1663, η ίδια διαδικασία είναι τυπωμένη ως εξής:

$$\begin{array}{r} 5. \tilde{p} . R. \tilde{m} .15. \\ 5. \tilde{m} . R. \tilde{m} .15. \\ \hline 25.m.m. 15.quad. est. 40. \end{array}$$

Ο Cardano αναφέρθηκε σε αυτές τις «σοφιστικές» τετραγωνικές ρίζες και συμπέρανε ότι το αποτέλεσμα αυτό ήταν μυστηριώδες και άχρηστο. Οι αρνητικοί αριθμοί και οι ενασχόληση με αυτούς, είναι ένα από τα πεδία στα οποία έδωσε ώθηση το συγκεκριμένο έργο (Boyer & Merzbach, 1997, Cajori, 1928).

Με την *Algebra* που έγραψε γύρω στα 1560 ο Bombeli, συνεισφέρει και αυτός στη λύση κυβικών και τετάρτου βαθμού εξισώσεων, στην εύρεση τετραγωνικών ριζών καθώς και στη λύση γεωμετρικών προβλημάτων. Την εποχή αυτή, δεν είναι διαδεδομένα τα δεκαδικά κλάσματα και ο Bombeli αναπτύσσει τη μέθοδο εύρεσης τετραγωνικής ρίζας με τη χρήση συνεχών κλασμάτων. Στην έκδοση της *Algebra* του 1579, χρησιμοποιεί αποκλειστικά ρητορικό τρόπο για την περιγραφή της διαδικασίας (Arcavi et al., 1991). Μερικές φορές ο Bombeli έγραφε 1Zp.5Rm.4, δηλαδή 1 zenus συν 5 res μείον 4 για να εκφράσει την x^2+5x-4 , ενώ σε κάποια χειρόγραφα του, κάτω από την επίδραση των Αριθμητικών του Διόφαντου, αλλάζει το «τεχνικό» μέρος παράστασης των δυνάμεων (Boyer & Merzbach, 1997, Klein, 1968). Ο ίδιος χρησιμοποίησε άλλη μία μορφή έκφρασης, στην οποία ο εκθέτης του αγνώστου συμβολιζόταν απλώς με ένα αραβικό ψηφίο πάνω από ένα κυκλικό τόξο. Δηλαδή τα $2x$, $4x^2$ και $5x^3$ γράφονταν ως $2 \overset{(1)}{\curvearrowright}$, $4 \overset{(2)}{\curvearrowright}$ και $5 \overset{(3)}{\curvearrowright}$ (Boyer & Merzbach, 1997, Cajori, 1928). Παράλληλα, ο Bombeli χρησιμοποιώντας τον τύπο των ριζών για τη λύση κυβικής εξίσωσης καταλήγει σε «μία τρελή» ιδέα, αφού τα υπόρριζα για

συγκεκριμένες τιμές των συντελεστών παίρνουν αρνητικές τιμές. Η ιδέα της σχέσης που έχουν οι ίδιες οι ρίζες και οι συζυγείς μιγαδικοί στα υπόρριζα, απασχόλησε τον Bombeli και τον οδήγησε σε σωστά συμπεράσματα (Boyer & Merzbach, 1997).

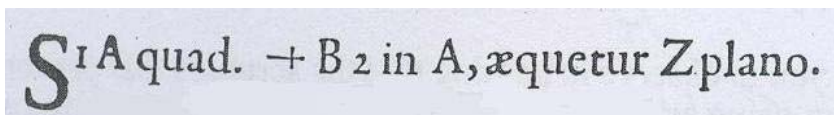
Το μεγάλο άλμα για τον εγγράμματο λογισμό στην άλγεβρα, έγινε από τον Vieta το 1591. Ο Vieta προσπαθεί να δημιουργήσει μία νέα επιστήμη που την αποκαλεί *ars analytica* και η οποία θα συνδυάζει την αυστηρότητα της γεωμετρίας των αρχαίων Ελλήνων με τη λειτουργικότητα της άλγεβρας. Αυτή η αναλυτική τέχνη, ήταν επαρκώς ικανή για να λύσει κάθε πρόβλημα ή όπως λέει ο ίδιος «*nullum non problema solvere*». Ο Vieta θέτει τα θεμέλια της νέας αυτής επιστήμης «στην εισαγωγή της τέχνης της ανάλυσης» - *In artem analyticam isagoge*, το 1591 (Bashmakova 1999b). Επειδή αντιπαθούσε τον αραβικό όρο «άλγεβρα», στον τίτλο χρησιμοποιεί τον όρο «ανάλυση» τον οποίο χρησιμοποιούσε ο Πάππος και οι αρχαίοι συγγραφείς, για μία διαδικασία εύρεσης του αγνώστου σε προβλήματα (Boyer & Merzbach, 1997, Klein, 1968).

Σύμφωνα με την Bashmakova (1999b), παρόλο που μέχρι τότε πολλές συντομογραφίες διευκόλυναν την παρουσίαση των εξισώσεων, το πρώτο βασικό και νέο βήμα μετά το Διόφαντο για τον εγγράμματο λογισμό στην άλγεβρα, έγινε από τον Vieta. Για παράδειγμα, ο Regiomontanus και ο Stifel στη Γερμανία, ο Leonardo και ο Cardano στην Ιταλία και ο Λέων στο Βυζάντιο, χρησιμοποίησαν πριν από τον Vieta γράμματα για την παράσταση αριθμών. Την εποχή αυτή, υπάρχουν τα σύμβολα των πράξεων, της ρίζας και της ισότητας. Ο Stifel για παράδειγμα, γράφει AAA για να εκφράσει την τρίτη δύναμη μιας άγνωστης ποσότητας, αλλά δεν υπάρχει συμβολισμός για να εκφράσει τη γενικότητα μιας εξίσωσης και να διακρίνει τη γνωστή από την άγνωστη ποσότητα. Ο Vieta, χρησιμοποίησε εγγράμματο συμβολισμό για παραμέτρους και για αγνώστους με την απλή συνθήκη, τα φωνήεντα να παριστάνουν τα άγνωστα μεγέθη και τα σύμφωνα τα μεγέθη που ήταν γνωστά. Το γεγονός αυτό, του έδωσε τη δυνατότητα να γράφει εξισώσεις και ταυτότητες στη γενική τους μορφή. Αν ο Vieta είχε υιοθετήσει και άλλα σύμβολα που υπήρχαν εκείνη την εποχή, θα μπορούσε να γράφει όλες τις εξισώσεις δευτέρου βαθμού ως $BA^2+CA+D=0$, όπου A είναι ο άγνωστος και B, C και D είναι οι παράμετροι (Boyer & Merzbach, 1997, Cajori, 1919). Παράλληλα, ο Vieta υιοθετεί τις βασικές αρχές της ελληνικής γεωμετρίας και την αρχή της ομοιογένειας. Σύμφωνα με την αρχή αυτή, μόνο ομοιογενή μεγέθη (homogeneous magnitudes) μπορούν να προστεθούν, να

αφαιρεθούν και να βρίσκονται σε λόγο. Για το λόγο αυτό, τα σύμβολα των μεγεθών ακολουθούνται από λέξεις που δηλώνουν τη μορφή τους, όπως *longitudo* (μήκος), ή *latitudove* (πλάτος), *planum* (επίπεδη επιφάνεια), *solidum* (στερεό) κλπ.(Σχήμα 22).

Η έκφραση: $\frac{A \text{ cubus} - B \text{ solido } 3}{C \text{ in } E \text{ quadratum}}$, διαβάζεται «Το A κύβος μείον 3 φορές το B στερεό, διαιρεμένο με το C φορές το E τετράγωνο, όπου A και E τα άγνωστα μεγέθη και B και C τα γνωστά. Έχει δε σύγχρονη γραφή $\frac{x^3 - 3b}{cy^2}$ με αγνώστους x, y και συντελεστές b, c (Klein, 1968).

Για την πρόσθεση και την αφαίρεση, ο Vieta χρησιμοποιεί τα σύμβολα των κοσσιστών (*cossist*) + και −, ενώ εισάγει το σύμβολο = για την απόλυτη τιμή της διαφοράς δύο μεγεθών δηλαδή $A=B$ σημαίνει $|A-B|$. Για τον πολλαπλασιασμό, χρησιμοποιεί τη λέξη «*in*», για τη διαίρεση τη λέξη «*applicare*», και για την ισότητα τη λέξη «*aequale*». Για τις δυνάμεις, χρησιμοποιεί τις λέξεις *quadratum*, *cubus* ή συντομογραφίες τους για την τετραγωνική ρίζα γράφει τη λέξη *radix* ή το γράμμα l συνοδευόμενο από μία κουκίδα «*ℓ*» το οποίο προέρχεται από τη λέξη *latus* δηλαδή γράφει $\ell 121$ για την $\sqrt{121}$. Το σύμβολο της ρίζας, εμφανίστηκε σε μετέπειτα έκδοση των έργων του από τον Van Schooten. Επιπλέον, χρησιμοποιεί την κλασματική γραμμή για τα κλάσματα (Cajori, 1928, Bashmakova, 1999b).



Σχήμα 22. Τμήμα εργασίας του Vieta για την έκφραση $A^2+2BA=Z^2$ (Hairer et al., 2000).

Στο έργο *In artem analyticam isagoge* βρίσκουμε (Cajori, 1928) την έκφραση:

«*B in A quadratum plus D plano in A æquari Z solido*» για την $BA^2+D^2A=Z^3$

Στην πραγματεία του *Ad Logisticen speciosam notae priores*, η οποία εμφανίστηκε το 1646 αναφέρει μερικές από τις πιο σημαντικές αλγεβρικές ταυτότητες (Bashmakova, 1999b). Στο βιβλίο αυτό (Cajori, 1928), για την παράσταση $A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$ υπάρχει η έκφραση:

«*A cubus, +A quadrato in B ter, +A in B quadratum ter, +B cubo,*»

Με τον **εγγράμματο λογισμό** του Vieta, παρουσιάζεται μια σημαντική εξέλιξη στην άλγεβρα, η οποία δεν οφείλεται αποκλειστικά στην εισαγωγή του συμβολισμού και τους κανόνες χειρισμού τους, αλλά και στην αναφορά των συμβόλων. Ο Vieta, έχοντας μελετήσει τόσο τη γεωμετρική ανάλυση των αρχαίων, όσο και την επιλυτική τεχνική του Διόφαντου, συνειδητοποιεί την ευρύτητα του κλάδου. Κατανοώντας ότι η άγνωστη ποσότητα, δεν είναι κάποιος ορισμένος αριθμός ή κάποιο γεωμετρικό μέγεθος, όπως παρουσιαζόταν μέχρι τότε, αλλά κάτι πιο γενικό, παρουσιάζει τα αντικείμενα αυτά στη νέα αναλυτική τέχνη- «ars analytica». Στο 5^ο κεφάλαιο της *Isagoge*, και συγκεκριμένα στους ζητητικούς νόμους (*Law of Zetetic-De Legibus Zeteticis*), διαχωρίζει την αναζήτηση των αγνώστων σε αριθμούς και σε «είδη» ή «μορφές». Παράλληλα, αναφέρει τους υπολογισμούς με αριθμούς ως *logistica numerosa* και τους υπολογισμούς με είδη που παριστάνουν γενικά μεγέθη, ως την ανώτερη *logistica speciosa*. Η όλη ιδέα, βασίζεται σε μία διαφορετική, πιο αφηρημένη σε σύγκριση με τους αρχαίους, αντίληψη της έννοιας του αριθμού. Για τον Vieta, ο άγνωστος x όπως και ο συντελεστής a , δεν είναι ένας ορισμένος αριθμός, με ορισμένο πλήθος μονάδων, αλλά ένας δυνάμει ορισμένος «γενικός αριθμός» (Χριστιανίδης, 1996). Ο γενικός αριθμός σύμφωνα με τον Klein (1968) κατανοείται και αναπαρίσταται ως φορέας είδους. Με τη διαφοροποίηση αυτή, η σύγχρονη έννοια του αριθμού έχει ήδη γεννηθεί- «*The modern concept of “number” is born*» (Klein, 1968, σελ. 175).

Επιπλέον, με τη νέα αυτή «αναλυτική τέχνη» για τον Vieta, ο συμβολισμός, αποκτά την αξία της εκφραστικής λιτότητας και έναν υψηλό βαθμό απόδοσης. Αυτό γίνεται λόγω της αόριστης οντολογικής υφής των συμβόλων, τα οποία έχουν λίγη προφανή σύνδεση με τις οντότητες και τις ιδέες που παριστάνουν. Η επιλυτική διαδικασία έχει αποδεσμευτεί από τη βασική πραγματολογική επιστήμη των προγενέστερων, αποκτώντας περισσότερο αφαιρετικό χαρακτήρα. Γίνεται έτσι δυνατή η μετάβαση για παράδειγμα, από την επίλυση **των** δευτεροβάθμιων εξισώσεων στην επίλυση **της** δευτεροβάθμιας εξίσωσης, και κατ' επέκταση στη διατύπωση μίας γενικής θεωρίας για το σκοπό αυτό (Klein, 1968, Χριστιανίδης, 1996). Κάτω από το νέο αυτό πλαίσιο, ο Vieta ήταν ο πρώτος ο οποίος εφάρμοσε αλγεβρικούς μετασχηματισμούς στην τριγωνομετρία, ιδιαίτερα σε πολλαπλάσια τόξων αλλά και τριγωνομετρικούς μετασχηματισμούς, για την επίλυση εξισώσεων (Cajori, 1919).

Ένα ακόμη παράδειγμα για τη γενικότητα που προσέδωσε ο συμβολισμός είναι αυτό της παράστασης των δυνάμεων του αγνώστου. Το 16^ο αιώνα, ο Stevin παριστάνει τις δυνάμεις με αριθμό σε έναν απλό κύκλο πάνω από το συντελεστή, ενώ ο Bürgi με ρωμαϊκούς αριθμούς, αντίστοιχα. Για παράδειγμα, την εξίσωση x^4+3x^2-7x θα την έγραφαν, ο μεν Stevin ως

$$\begin{array}{c} \textcircled{4} \quad \textcircled{2} \quad \textcircled{1} \\ 1 + 3 - 7 \end{array}$$

ο δε Bürgi ως

$$\begin{array}{c} \text{iv} \quad \text{ii} \quad \text{i} \\ 1 + 3 - 7 \end{array}$$

Ο Stevin δήλωσε σαφώς ότι $\frac{1}{2}$ σε κύκλο σημαίνει τετραγωνική ρίζα ενώ $\frac{3}{2}$ σε κύκλο τετραγωνική ρίζα κύβου (Boyer & Merzbach, 1997, Klein, 1968).

Στην αρχή του 17^{ου} αιώνα, πολλοί συγγραφείς εξακολουθούν να χρησιμοποιούν το σύμβολο « $\mathcal{X}$ » για την άγνωστη ποσότητα (ανάμεσα τους και ο Descartes), ενώ η παράσταση της δύναμης με επανάληψη του ίδιου γράμματος, εξελίσσεται μετά τον Stifel και από τον Harriot. Το 1634, ο Hérigone στο *Cursus mathematicus* έγραφε για τις δυνάμεις a, a2, a3, κλπ., ενώ το 1636 ο Hume στην *L'Algèbre de Viète d'une methode nouvelle, claire, et Facile* χρησιμοποιεί ρωμαϊκούς αριθμούς για εκθέτες γράφοντας για παράδειγμα « A^{iii} » για τη δύναμη A^3 (Cajori, 1928). Για το συμβολισμό του Hume, ο Boyer (1950) εκφράζει βάσιμες αντιρρήσεις λέγοντας ότι ο συμβολισμός για τη δύναμη A^3 ήταν « A_{ij} » και όχι « A^{iii} ». Στη συνέχεια, ο Descartes είναι αυτός που εισάγει πρώτος το συμβολισμό με τον αριθμό ως εκθέτη, δηλαδή την παράσταση x^3 αντί της xxx και υιοθετεί τη σύμβαση, τα πρώτα γράμματα του αλφαβήτου να παριστάνουν σταθερές ενώ τα τελευταία, αγνώστους. Ο Leibniz, αναφέρει πρώτος το συμβολισμό x^m βάζοντας τη μεταβλητή στον εκθέτη, ενώ ο Newton είναι αυτός που πρώτος ορίζει πλήρως και χρησιμοποιεί τις εκθετικές κλασματικές δυνάμεις (Cajori, 1928, Boyer, 1950).

Τον εγγράμματο λογισμό που εισήγαγε ο Vieta, τελειοποίησε ο Descartes ο οποίος απάλλαξε τις διαδικασίες από την αρχή της ομοιογένειας και έδωσε στον εγγράμματο λογισμό τη σύγχρονη μορφή. Στο έργο του *Geometry* πρώτος από όλους μετασχηματίζει το λογισμό μεγεθών του Vieta, κάνοντας έτσι την αναγωγή της

γεωμετρίας στην άλγεβρα. Αναπαριστά όλα τα μεγέθη με τμήματα (συντεταγμένες - *segments*) και κατασκευάζει ένα λογισμό τμημάτων (συντεταγμένων). Αρχικά, υπολογίζει μόνο θετικές τιμές, αλλά αργότερα εισάγει και αρνητικές συντεταγμένες με την αντίθετη κατεύθυνση, χωρίς να μπαίνει σε λεπτομέρειες για την περιγραφή των πράξεων με αρνητικούς αριθμούς (Bashmakova, 1999b). Με τον Descartes, η θεμελιώδης οντολογική επιστήμη των αρχαίων έχει αντικατασταθεί από μία μέθοδο συμβολισμού της οποίας οι οντολογικές προϋποθέσεις έχουν αφαιρεθεί ασαφείς (Klein, 1968). Το γεγονός αυτό, οδηγεί τον Descartes σε μία γενική θεώρηση της έννοιας του αριθμού, δημιουργώντας τον ισομορφισμό ανάμεσα στα τμήματα και τους πραγματικούς αριθμούς. Ο ίδιος δεν δίνει ένα γενικό ορισμό του αριθμού κάτι που έκανε αργότερα ο Newton με το *Universal Arithmetic* (Bashmakova, 1999b).

Ο εγγράμματος συμβολισμός του Vieta και η σύνδεση της άλγεβρας με τη γεωμετρία από τον Descartes και τον Fermat, συμβάλλουν αποφασιστικά στην εξέλιξη της μαθηματικής σκέψης τους επόμενους αιώνες. Θεμελιώδες στοιχείο στην πρόοδο αυτή χαρακτηρίζεται η εισαγωγή της έννοιας της μεταβλητής. Επιπλέον, οι ισότητες οι οποίες αποτελούν τις εκφράσεις με τις οποίες περιγράφονται οι σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών, αποτελούν το πρώτο βήμα για τον ορισμό της συνάρτησης. Παράλληλα, με τον νέο βελτιωμένο συμβολισμό παρέχεται στους μαθηματικούς ένας μεγάλος αριθμός παραδειγμάτων από καμπύλες για μελέτη, δηλαδή δυνητικές-λανθάνουσες συναρτήσεις (*potential function*) με μεθόδους οι οποίες οδηγούν στη «νέα ανάλυση, το λογισμό» (*were eventually recognized as forming a new analysis-the calculus*) (Kleiner, 1989, Boyer, 1959, σελ. 98).

3.4 Η εξέλιξη των συμβόλων στον Απειροστικό Λογισμό

Ο απειροστικός λογισμός σύμφωνα με τον Boyer (1959), γεννήθηκε από τις δυσκολίες που είχαν οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί, στην προσπάθεια τους να παραστήσουν τη διαισθητική ιδέα των λόγων μεγεθών, με την οποία είχαν μία ασαφή αντίληψη της έννοιας του συνεχούς. Η εξέλιξη της θεωρίας των λόγων, οδήγησε τον Εύδοξο, παρά την μη αποδοχή των άπειρων διαδικασιών, στη θεμελίωση των πραγματικών αριθμών και στη διατύπωση μίας αυστηρής αποδεικτικής διαδικασίας, γνωστής σήμερα ως «μέθοδος της εξάντλησης» (Νεγρεπόντης κ.ά., 1987). Στη συνέχεια, ο Αρχιμήδης και άλλοι μαθηματικοί, προκειμένου να υπολογίσουν εμβαδά και όγκους καμπυλόγραμμων σχημάτων, έφταναν πρώτα διαισθητικά στο ζητούμενο αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας απειροστά, άπειρες διαδικασίες και «όρια» και μετά έκαναν τη γεωμετρική απόδειξη, με τη μέθοδο της εξάντλησης, η οποία θεωρείται ο πρόδρομος του απειροστικού λογισμού (Γιαννακούλιας, 2005). Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιεί αθροίσματα εμβαδών, μεγαλύτερων και μικρότερων από τα καμπυλόγραμμα εμβαδά και όπως αναφέρει ο Bourbaki, θα ήταν ιστορικά δικαιότερο τα αθροίσματα Riemann, να ονομάζονταν αθροίσματα Ευδόξου – Αρχιμήδη (Νεγρεπόντης, κ.ά., 1987).

Μετά το 800 μ.Χ., αραβικές μεταφράσεις των έργων των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών, επηρεάζουν την εξέλιξη και συνεισφέρουν στην πρόοδο των μαθηματικών στις αραβικές χώρες που ακμάζουν την εποχή αυτή, ενώ στη Δυτική Ευρώπη, οι σχολαστικοί φιλόσοφοι ασχολούνται ανεξάρτητα, με τις έννοιες του απείρου, του απειροστού και του συνεχούς. Μέχρι και τον 15^ο αιώνα διατηρείται το φιλοσοφικό ενδιαφέρον για τις βασικές έννοιες του απείρου στα μαθηματικά, και παράλληλα καλλιεργείται ένα καθαρό μαθηματικό ενδιαφέρον για τη μελέτη της κίνησης και τις άπειρες διαδικασίες (Γιαννακούλιας, 2005).

Όταν έγιναν γνωστά τα έργα του Αρχιμήδη και των άλλων Ελλήνων μαθηματικών στη Δυτική Ευρώπη, στις αρχές του 16^ο αιώνα, αρχίζει μία ουσιαστική και γόνιμη προσπάθεια για τη δημιουργία του απειροστικού λογισμού. Παράλληλα, η ανακάλυψη της συμβολικής άλγεβρας από τον Vieta, και οι μελέτες των Decartes και Fermat, οδηγούν στη διαμόρφωση της αναλυτικής γεωμετρίας, με τη βοήθεια της οποίας, κάθε εξίσωση μπορούσε να δημιουργήσει μία νέα καμπύλη. Παρουσιάστηκε

έτσι για εξέταση, ένα τεράστιο πλήθος από καμπύλες, για τις οποίες οι παλιές ελληνικές μέθοδοι δεν ήταν πλέον επαρκείς (Γιαννακούλιας, 2005).

Πολλοί ήταν οι μαθηματικοί, οι οποίοι μέχρι τα μέσα του 17^{ου} αιώνα, με ευφυείς λύσεις στα διάφορα προβλήματα τα οποία σχετιζόταν με το κέντρο βάρους, την εφαπτομένη, το εμβαδόν, τα μέγιστα-ελάχιστα, και άλλα, προσέθεσαν σημαντικά στοιχεία στην οικοδόμηση του απειροστικού λογισμού. Για παράδειγμα, αρχικά οι Stevin, Γαλιλαίος, Kepler, Cavalieri, Torricelli, Fermat, Pascal και Roberval, και αργότερα οι Wallis, Gregory και Barrow, με τις μελέτες τους συνέβαλλαν σημαντικά, τόσο στη διάδοση των αρχών του απειροστικού λογισμού, όσο και στην εξέλιξή του (Γιαννακούλιας, 2005). Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούσαν, παρά την επιτυχία τους, δεν κατέστη δυνατόν να ενταχθούν σε ένα ενοποιημένο λειτουργικό σύστημα. Συχνά δε, προκαλούσαν αντιδράσεις και διαφωνίες, κυρίως για τον τρόπο θεώρησης και χρήσης των απειροελάχιστα μικρών ποσοτήτων. Η μέθοδος των αδιαιρέτων, είχε εφαρμοστεί σε πλήθος καμπυλών και στερεών, αν και βασιζόταν σε σαθρό έδαφος. Η αρχιμήδεια μέθοδος της εξάντλησης, σε μία αναθεωρημένη και σύγχρονη μορφή, έδωσε λύση στο πρόβλημα του τετραγωνισμού της οικογένειας καμπυλών του τύπου $y=x^n$. Κάθε πρόβλημα απαιτούσε διαφορετική προσέγγιση και η επιτυχία εξαρτιόταν από τη γεωμετρική εποπτεία, τις αλγεβρικές δεξιότητες και κατά μεγάλο ποσοστό, από την τύχη. Την εποχή αυτή, ήταν επιτακτική η ανάγκη για μια γενική και συστηματική μέθοδο, ένα σύνολο αλγορίθμων και κανόνων, που θα προσέφεραν μία γενική λύση των προβλημάτων με ευκολία και αποτελεσματικότητα. Τη μέθοδο αυτή παρουσίασαν ο Newton και ο Leibniz περίπου το 1675 (Maor, 2005).

Η εμφάνιση των Newton και Leibniz, χαρακτηρίζεται από την ταυτόχρονη περίπου απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού και με τον τρόπο αυτό, σηματοδοτεί μία νέα εποχή για τον απειροστικό λογισμό και το πεδίο του μαθηματικού συμβολισμού. Κυρίαρχη έννοια είναι πια η διαφορίση, ενώ το ολοκλήρωμα είναι απλώς το αντίστροφο της παραγώγου. Η τεράστια αλλαγή που συντελείται την εποχή αυτή, περιγράφεται χαρακτηριστικά από τους Νεγρεπόντη, κ.ά., (1987, σελ. 210): «*Η υπολογιστική δύναμη του νέου αυτού εργαλείου, που σχετίζει τη διαφορίση με το ολοκλήρωμα, καθώς και η χρησιμότητα του στις φυσικές εφαρμογές, είχε τόση εκθαμβωτική αποτελεσματικότητα, ιδίως σε σύγκριση με την ακαμψία που χαρακτήριζε τη μέθοδο της εξάντλησης και όλων των συναφών μεθόδων*

ολοκλήρωσης που είχαν αναπτυχθεί μέχρι τότε, ώστε σύντομα επικράτησε, δημιουργώντας ένα πολυσήμαντο ρήγμα σε μία παράδοση ανάπτυξης της Ολοκλήρωσης δύο χιλιάδων ετών». Καθοριστικό ρόλο στην ανακάλυψη και εξέλιξη αυτή, έπαιξε ο ευφυής συμβολισμός των εννοιών και των διαδικασιών, από τους Newton και Leibniz, παρά τις αβαρίες που απαιτούσε και η νέα αυτή θεώρηση. Ο Leibniz, αναφέρει χαρακτηριστικά: «Το μυστικό της ανάλυσης είναι η καθιέρωση κατάλληλης ορολογίας και συμβολισμού και η τέχνη της καλής χρήσης των συμβόλων» (Γιαννακούλιας, 2005, σελ. 59).

Για τον Newton, κάθε μεταβλητή ποσότητα x , y , ήταν μεταβλητή «ρέον» (*fluent*), ως προς το χρόνο και μάλιστα έτσι ώστε να ρέει ομοιόμορφα ως προς αυτόν. Έτσι προκύπτει ο όρος «ροή» (*fluxion*) για τον ρυθμό μεταβολής των μεταβλητών. Στο έργο του «*Methodus fluxionum*», ο Newton, αναφέρει το βασικό πρόβλημα της σχέσης των μεταβλητών και των ροών τους, καθώς και το αντίστροφο του προβλήματος. Για να δηλώσει το ρυθμό μεταβολής της μεταβλητής x ως προς το t , χρησιμοποιούσε το x με μία κουκίδα επάνω « $\dot{x}$ », το οποίο το ονόμαζε «σημαδεμένο γράμμα». Η πρώτη εμφάνιση του συμβόλου αυτού είναι σε ένα φύλλο με ημερομηνία 20 Μαΐου 1665. Το σύμβολο $\dot{x}$, είναι η παράγωγος του x ως προς το χρόνο, δηλαδή αυτό που σήμερα συμβολίζεται $x'(t)$ ή $\frac{dx}{dt}$. Έτσι για τις μεταβλητές x και y , τα σύμβολα $\dot{x}$ και $\dot{y}$ παριστάνουν τις ροές τους, ενώ τα σύμβολα $\ddot{x}$ και $\ddot{y}$ παριστάνουν τις ροές των $\dot{x}$ και $\dot{y}$ αντίστοιχα. Τον ίδιο τρόπο συμβολισμού, χρησιμοποιούσε για

τη «ροή» σε κλάσματα « $\frac{yy}{b-x}$ » και σε ρίζες « $\sqrt{aa-\dot{x}x}$ ». Επιπλέον, συμβόλιζε με $\dot{x}$

και $\dot{y}$ τις μεταβλητές, των οποίων οι ροές είναι οι x και y , ενώ με $\ddot{x}$ και $\ddot{y}$ τις μεταβλητές των οποίων οι ροές είναι $\dot{x}$ και $\dot{y}$ αντίστοιχα. Τα σύμβολα αυτά, εμφανίζονται τυπωμένα για πρώτη φορά σε μία λατινική έκδοση της *Algebra* του Wallis το 1693, ενώ ο ίδιος ο Newton, εξηγεί το συμβολισμό αυτό, στο έργο του *Quadratura curvarum* σε έκδοση του 1704 (Cajori, 1928, Boyer, 1959). Για τους υπολογισμούς του, συμβολίζει με « o » μία απείρως μικρή μεταβολή του χρόνου και με $\dot{x}o$ την ακαθόριστη αύξηση ή στιγμή (*moment*) της ρέουσας ποσότητας. Για τη

συνάρτηση $y=x^n$ το αποτέλεσμα είναι $\dot{y}=nx^{n-1}\dot{x}$. Μάλιστα, το αποτέλεσμα είναι ίδιο με αυτό των προγενέστερων του Newton, οι οποίοι χρησιμοποιούσαν στιγμές (*moment*), (*conatus*) και αδιαίρετα (*indivisible*), και γράμματα «E, e, a, o» για να δηλώσουν την απείρως μικρή μεταβολή της μίας μεταβλητής (Boyer, 1959). Αργότερα ο Newton, στο έργο του *Principia*, χρησιμοποιεί τα γράμματα x, y, z, για τις μεταβλητές και άλλα γράμματα p, q, r ή τα αντίστοιχα κεφαλαία, X, Y, Z, για τις «ροές» (Cajori, 1928). Για να δηλώσει το ολοκλήρωμα μίας μεταβλητής, ο Newton χρησιμοποιεί όπως έχει αναφερθεί, κάποιο από τα σύμβολα $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, x , y , $\overset{|}{x}$, $\overset{|}{y}$, $\overset{||}{x}$, $\overset{||}{y}$, ανάλογα τη υπό ολοκλήρωση μεταβλητή. Ένας άλλος συμβολισμός του Newton για το ολοκλήρωμα, ήταν ένα τετράγωνο γύρω από την υπό ολοκλήρωση συνάρτηση, όπως για παράδειγμα γράφει $\boxed{\frac{aa}{64x}}$ για το $\int \frac{aa \cdot dx}{64x}$ (Cajori, 1928). Σύμφωνα με τους Νεγρεπόντη, κ.ά. (1987), πριν τον Newton και άλλοι μαθηματικοί, χρησιμοποιούσαν το τετραγωνικό περίγραμμα για να δηλώσουν το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης. Ο συμβολισμός αυτός, σύμφωνα με τους ίδιους συγγραφείς, μας παραπέμπει στον όρο «τετραγωνισμός - *quadratura*» που χρησιμοποιούσαν οι αρχαίοι έλληνες μαθηματικοί, ιδιαίτερα ο Αρχιμήδης με την έννοια της ολοκλήρωσης, όπως για παράδειγμα, «*Τετραγωνισμός Παραβολής*».

Είναι φανερό ότι ο συμβολισμός του Newton, τόσο για την παράγωγο, όσο και για το ολοκλήρωμα, ήταν άβολος και μη λειτουργικός. Κάποιες φορές μάλιστα προκαλούσε δυσκολίες στη λογική διατύπωση, ενώ οδηγούσε ακόμη και σε σύγχυση, αφού εύκολα τα σύμβολα x , $\overset{|}{x}$, $\overset{||}{x}$, λογίζονταν ως συντεταγμένες x , x' , x'' . Ειδικότερα, ο συμβολισμός του Newton για τον ολοκληρωτικό λογισμό, δεν έγινε ποτέ δημοφιλής, ούτε καν στην Αγγλία. Ένα δείγμα από τον συμβολισμό αυτόν, υπάρχει στο βιβλίο του B. Taylor *Methodus incrementorum* τυπωμένο το 1715, όπου γράφει: « $\dot{p} = -r \dot{s}$ adeoque $p = \boxed{-r \dot{s}}$ ». Αντίθετα ο συμβολισμός του για την παράγωγο, υιοθετήθηκε αρχικά από αρκετούς άγγλους μαθηματικούς και έχει παραμείνει μέχρι σήμερα σε περιορισμένη χρήση, κυρίως στη φυσική, για να περιγράψει ρυθμό μεταβολής ως προς το χρόνο (Cajori, 1928, Boyer, 1959).

Σε αντίθεση με τον συμβολισμό του Newton, ο συμβολισμός του Leibniz, έδωσε τεράστια ώθηση στις έννοιες και τις διαδικασίες του απειροστικού λογισμού,

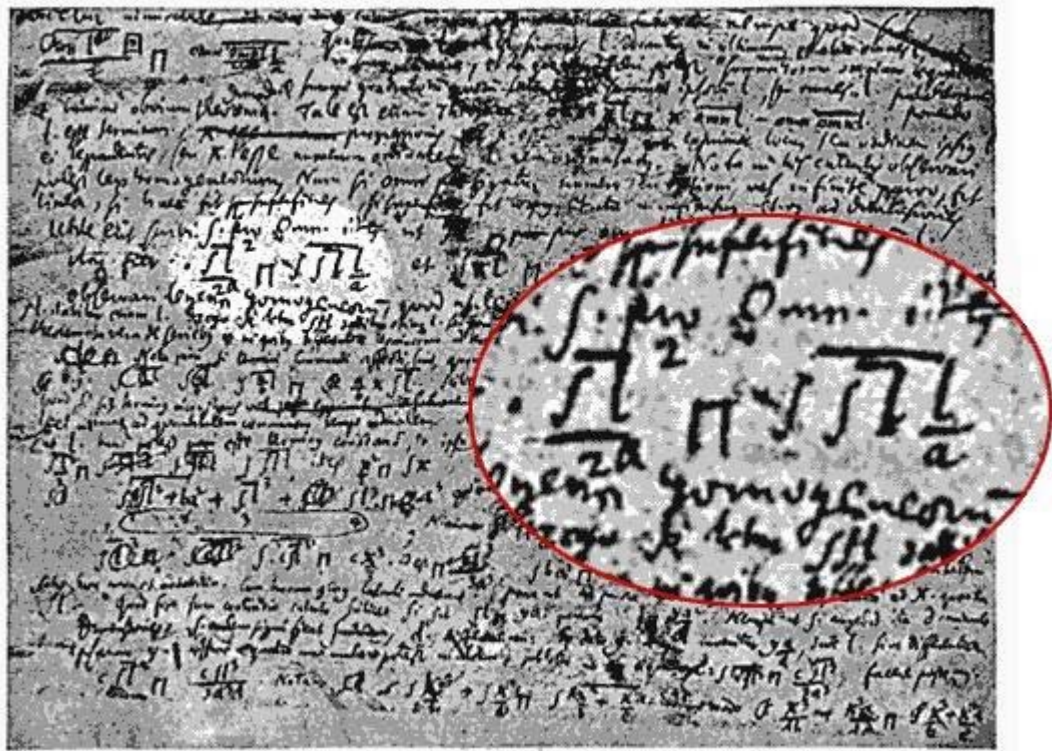
τόσο με τη σαφή παράσταση τους, όσο και με τους λειτουργικούς και αποτελεσματικούς υπολογισμούς, απλουστεύοντας τις σχέσεις των εννοιών στον απειροστικό λογισμό. Ο Γιαννακούλιας (2005, σελ. 68), αναφέρει την άποψη του C. H. Edwards σύμφωνα με την οποία, «ο συμβολισμός του Leibniz για τον διαφορικό λογισμό, φέρνει κοντά στον μαθητή προβλήματα, που θα απαιτούσαν ευφυΐα του Αρχιμήδη ή του Newton».

Η αρχική χρήση διαφορετικού συμβόλου για το λογισμό από τον Leibniz, ήταν σε μία επιστολή με ημερομηνία 26 Οκτωβρίου 1675, όπου χρησιμοποιεί το γράμμα «ω» για το διαφορικό της μεταβλητής y και αργότερα γράφει « l » ή « $\frac{y}{d}$ » για την ίδια έννοια. Σε χειρόγραφο του με ημερομηνία 11 Νοεμβρίου 1675, εισάγει το συμβολισμό « dx » και « dy » για τα διαφορικά των μεταβλητών x και y (Cajori, 1923). Η πρώτη τυπωμένη εμφάνιση των συμβόλων dx και dy , είναι σε ένα άρθρο του Leibniz, στο περιοδικό *Acta eruditotum* το 1684 όπου υπάρχουν οι εκφράσεις « $d\omega$ ad dx », « dx ad dy » και « $dx:dy$ », αλλά όχι η έκφραση « $\frac{dx}{dy}$ ». Στο ίδιο άρθρο, για τη δεύτερη παράγωγο, χρησιμοποιεί το συμβολισμό « $ddx:dy^2$ » και για την τρίτη παράγωγο dx^3 ή $(dx)^3$ ή $\overline{dx^3}$ (Cajori, 1928). Στην περίπτωση των κλασμάτων και των ριζών ο Leibniz έγραφε ένα κόμμα μετά το γράμμα d ως εξής: $d, \sqrt[b]{x^a}$, aeq. $\frac{a}{b} dx \sqrt[b]{x^{a-b}}$ (Cajori, 1923). Στο έργο του *Nova Methodus*, ο Leibniz, αναφέρεται μόνο στο διαφορικό λογισμό. Θεωρώντας μία μεταβλητή ποσότητα x συμβολίζει με y μία συνάρτηση του x , με dx την απείρως μικρή μεταβολή της x και με dy το διαφορικό της y (Γιαννακούλιας, 2005). Επιπλέον, για τον λογισμό με τα διαφορικά, εισάγει τον όρο «*calculus differentialis* – διαφορικός λογισμός» (Struik, 1966).

Παράλληλα, ο Leibniz, ακολουθεί αρχικά το συμβολισμό του Cavalieri για τα αθροίσματα των στοιχειωδών εμβαδών και γράφει $omn.pa=omn.yl=\frac{y^2}{2}$. Τον ίδιο συμβολισμό ακολουθούσαν και οι Mengoli και Fabri στην Ιταλία αρκετά χρόνια νωρίτερα το 1659, χρησιμοποιώντας τον όρο $omn.$ για το $omnes\ lineae$, δηλαδή άθροισμα γραμμών και τη συντόμευση του ως « $O.a$ », (Cajori, 1919, Riskey, 1992). Σύμφωνα με τον Νεγρεπόντη, κ.ά. (1987), ο όρος $omn.$, πιθανόν να προέρχεται από

τη λατινική μετάφραση έργου του Αρχιμήδη «...omnes (priores) magnitudines ad omnes...».

Λίγο αργότερα, σε χειρόγραφο του με ημερομηνία 29 Οκτωβρίου 1675, ο Leibniz γράφει: «θα είναι πιο χρηστικό να γράφει κανείς $\int$ για το omn. όπως $\int l$ για το omn.l, και αυτό είναι το άθροισμα των l». Στο ίδιο χειρόγραφο, ο Leibniz φαίνεται να έχει επίγνωση ότι, δημιουργούσε ένα νέο κλάδο Μαθηματικών, αφού γράφει: «Satis haec nova nobila, cum novum genus calculi inducant - Αυτά είναι αρκετά νέα και αξιοσημείωτα, γιατί θα οδηγήσουν σε ένα νέο λογισμό», εξηγώντας παράλληλα, ότι « $\int$ σημαίνει άθροισμα και **d** διαφορά» (Cajori, 1928, Rickey, 1992).



Σχήμα 23. Χειρόγραφο του Leibniz στο οποίο φαίνεται ο συμβολισμός του για το ολοκλήρωμα (Cajori, 1928, τομ. Β, σελ. 243).

Ο όρος που χρησιμοποιεί ο Leibniz για το νέο αυτό λογισμό, είναι αρχικά «calculus summatorius»- αθροιστικός λογισμός, ένα όνομα που συνδέεται με την άθροιση των επιμέρους γινομένων. Τον όρο «ολοκλήρωμα», τον είδε σε ένα άρθρο

του Jacob Bernoulli, στο περιοδικό *Acta eruditorum* το Μάιο του 1690. Ο αδερφός του Jacob, ο Johann Bernoulli, χρησιμοποιούσε τον όρο «*calculus integralis*»- ολοκληρωτικός λογισμός και το σύμβολο I αντί του $\int$. Έτσι ο Leibniz, ύστερα από μία αλληλογραφία που είχε μαζί του, σχετικά με την ορολογία και τα σύμβολα, αποδέχεται τελικά με βραδύτητα και απροθυμία την υπόδειξη του, να ονομάσει τη νέα εφεύρεση «*ολοκληρωτικό λογισμό*» (Cajori, 1928, Rickey, 1992). Σε άλλη επιστολή του ο Leibniz, τον Οκτώβρη του 1695, πάλι προς Johann Bernoulli, γράφει τη βασική εξίσωση που συνδέει τις έννοιες της διαφορίσης και της ολοκλήρωσης « $d^m = \int^n$ όταν $n=-m$ » και στην οποία φαίνεται η σχέση ανάμεσα στα δύο σύμβολα.

Το ίδιο έτος, δημοσιεύεται απάντησή του, στην επίθεση που δέχθηκε για το λογισμό από τον Nieuwentijt's και στην οποία αναφέρει τον συμβολισμό « ddx », « d^3x », « $dddx$ » και « d^4x » (Cajori, 1923).

Στις αρχές του 18^{ου} αιώνα, τα σύμβολα του Leibniz για το διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό, χρησιμοποιούνται από τους περισσότερους μαθηματικούς σε διάφορους συνδυασμούς και εκδοχές. Ο συμβολισμός του Leibniz και η μέθοδος των διαφορικών, υιοθετούνται από τον Euler, ο οποίος χρησιμοποιεί το διαφορικό συντελεστή, χρησιμοποιεί σύμβολα για τα όρια ολοκλήρωσης και παράλληλα θέτει σε εξέχουσα θέση (*prominence*) την έννοια της συνάρτησης (Boyer, 1959, Rickey, 1992). Η σχεδόν αυτόματη ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού στο πρώτο μισό του 18^{ου} αιώνα, σύμφωνα με τον Boyer (1959, σελ. 243), «*ήταν σε μεγάλο βαθμό αποτέλεσμα της τυπικής θεώρησης της συνάρτησης, από τον Euler και την προσαρμογή του συμβολισμού του Leibniz σε αυτήν*». Οι μέθοδοι όμως, τόσο του Leibniz, όσο και του Newton, παρουσίαζαν βασικές δυσχέρειες θεμελίωσης, που γίνονταν αντιληπτές στις διαδικασίες υπολογισμού οριακών λόγων των διαφορών. Οι λόγοι αυτοί, περιελάμβαναν εμφανώς ή συγκαλυμμένα, την έννοια του ορίου, η οποία την εποχή αυτή, δεν ήταν σαφώς διατυπωμένη. Ο D' Alembert για παράδειγμα, διαφωνούσε με την υπόθεση του Euler, ότι τα διαφορικά είναι σύμβολα, για μηδενικές ποσότητες, αν και διαφέρουν ποιοτικά από το μηδέν, ενώ ερμήνευε τη φράση το Newton, «*prime and ultimate ratios πρώτος και ύστατος λόγος*» ως ένα όριο. Χαρακτηριστική είναι η πίστη του στο ότι «*η αληθινή μεταφυσική του απειροστικού λογισμού, βρισκόταν στην έννοια του ορίου*». Η διατύπωση της έννοιας του ορίου από τον D' Alembert, δεν

ήταν αρκετά σαφής και έτσι οι Ευρωπαίοι μαθηματικοί, συνέχισαν να υιοθετούν τη γλώσσα και τις απόψεις των Leibniz και Euler στο τέλος του 18^{ου} αιώνα. Μέσα όμως από τις αμφισβητήσεις και τις προσπάθειες αποσαφήνισης των εννοιών, δημιουργείται ευνοϊκό κλίμα στη μαθηματική κοινότητα, για μία γόνιμη και εποικοδομητική εργασία στον τομέα αυτό, με θετικά αποτελέσματα για τις έννοιες του απειροστικού λογισμού (Boyer & Merzbach, 1997, Struik, 1966).

Για την παράγωγο, ο Lagrange το 1797, στο βιβλίο του «*Theorie des fonctions analytiques*», φαίνεται ότι δεν είναι ικανοποιημένος από μεθόδους των προγενέστερων και κάνει έναν νέο, εντυπωσιακό χειρισμό της βασικής έννοιας. Αναπτύσσει «κάθε» συνάρτηση σε μία σειρά Taylor, όπου οι παράγωγοι της συνάρτησης $f(x)$, εμφανίζονται στο ανάπτυγμα και συμβολίζονται από τον Lagrange ως $f'x$, $f''x$, $f'''x$ καθώς και ως y , y' , y'' , y''' (Cajori, 1923, Struik, 1966). Ανάλογο ανάπτυγμα χρησιμοποιεί και ο Arbogast, ενώ χρησιμοποιεί το σύμβολο D όπως και αρκετοί πριν από αυτόν, για να δηλώσει την παράγωγο. Έτσι στο ανάπτυγμα $a+bx+\frac{c}{1.2}x^2+\dots$ είναι $a=F_a$, $b=DF_a$, $c=DDF_a$ κλπ. Για μεγαλύτερης τάξης όρους

χρησιμοποιεί το σύμβολο D με δείκτη και συγκεκριμένα D_c^m για τον όρο $\frac{D^m}{1.2.3\dots m}$,

ενώ χρησιμοποιεί παράλληλα και τα σύμβολα $\frac{d\phi x}{dx}$, $\frac{d^2\phi x}{1.2.d^2x^2}$, $\partial\phi x$ (Cajori, 1928). Η

χρήση του συμβόλου ∂ για τη μερική παράγωγο, απαντάται μετά το 1770, σε άρθρα των Monge, Condorcet και Legendre, ενώ ο Legendre, είναι αυτός που εισάγει το 1786 τον συμβολισμό $\frac{\partial v}{\partial x}$ για την ίδια έννοια (Cajori, 1928).

Παράλληλα, υπήρξε εξέλιξη και στον συμβολισμό του ορίου, μία έννοια η οποία κυριαρχεί τη μαθηματική σκέψη μετά τον 16^ο αιώνα, αλλά θεμελιώθηκε αυστηρά πολύ αργότερα. Η συντόμευση «*lim.*» χρησιμοποιείται για πρώτη φορά από τον Simone Lhuillier το 1786, ο οποίος έγραφε: «*lim.q:Q* και *Lim.* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ». Την ίδια συντόμευση καθώς και μόνο το γράμμα «*L*» χρησιμοποιούν ο Carnot το 1797 και ο Cauchy το 1821. Επιπλέον, ο Cauchy χρησιμοποιεί το πλήθος των παρενθέσεων για να δηλώσει τις διαφορετικές τιμές ενός ορίου. Για παράδειγμα, καθώς το x πλησιάζει

στο μηδέν, το όριο $\lim(\sin.x)$ έχει μοναδική τιμή 0, το όριο $\lim((\frac{1}{x}))$ παίρνει δύο τιμές, ενώ το $\lim((\sin.\frac{1}{x}))$ άπειρες. Βαθμιαία με τη χρήση, ο συμβολισμός αυτός χάνει την τελεία και μετατρέπεται από «lim.» σε «lim». Τον 19^ο αιώνα, πολλοί συγγραφείς αισθάνονται την ανάγκη ενός συμβολισμού για το όριο, που θα αποτυπώνει παράλληλα τη συνάρτηση και την τιμή που προσεγγίζει η ανεξάρτητη μεταβλητή. Έτσι εμφανίζεται στην Ευρώπη ευρέως η έκφραση « $\text{Lim}_{x=a}$ », ενώ ο Weierstrass χρησιμοποιεί εκφράσεις όπως οι « $\lim_{\varepsilon=1}$ » και « $\text{Lim}_{n=\infty} p_n = \infty$ » και ο Hamilton « $\lim_{n=\infty} \{ \}$ » (Cajori, 1923).

Στην Αγγλία το σύμβολο της ισότητας για την ανεξάρτητη μεταβλητή, αντικαθίσταται από ένα βέλος. Ο G. H. Hardy γράφει το 1908 « $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n})$ » και εισάγει στο συμβολισμό του ορίου, το βέλος με την ακόλουθη παρατήρηση: «*ακολουθώ τον συμβολισμό των Leathem και Bromwich, γράφοντας: $\lim_{n \rightarrow \infty}$, $\lim_{x \rightarrow \infty}$, $\lim_{x \rightarrow a}$ και όχι $\lim_{n=\infty}$, $\lim_{x=\infty}$, $\lim_{x=a}$* . Αυτή η αλλαγή μου φαίνεται αξιοσημείωτα σημαντική ιδιαίτερα όταν το “ ∞ ” είναι η προσεγγιστική τιμή». Κάποιες φορές μάλιστα, το σύμβολο «lim» παραλείπεται, όπως στην έκφραση $\frac{\Delta u}{\Delta x} \rightarrow u'$ (Cajori, 1923, σελ. 43).

Κατά τη διάρκεια του 19^{ου} αιώνα, θα υπάρξει η αυστηρή θεμελίωση για τις έννοιες του ορίου, της συνέχειας, της παραγώγου και του ολοκληρώματος ενώ τα σύμβολά τους θα συμβάλουν με έναν καθοριστικό και λειτουργικό τρόπο, στη μελέτη των ιδιοτήτων των εννοιών αυτών. Παράλληλα, η ακρίβεια ως χαρακτηριστικό της μαθηματικής πρακτικής, έκανε δυνατή την ανακάλυψη και εφαρμογή νέων ιδεών. Όμως, η σημερινή μορφή του συμβολισμού στον απειροστικό λογισμό, οφείλει όπως είναι φανερό, την ύπαρξη και τη λειτουργικότητά της κατά κύριο λόγο, στους μαθηματικούς του 17^{ου} και 18^{ου} αιώνα και κυρίως στον Leibniz, «έναν εξέχοντα επινοητή μαθηματικών συμβόλων» (Struik, 1966, σελ. 182), ο οποίος σύμφωνα με το Γιαννακούλια (2005, σελ. 68) «κατορθώνει να δημιουργήσει ένα ολοκληρωμένο, μεθοδικό και λειτουργικό διαφορικό λογισμό, καθιερώνοντας μια νέα ορολογία και ένα

απλό και λειτουργικό συμβολισμό».

Σχετικά με την εξαιρετική σύνδεση των εννοιών του απειροστικού λογισμού, με τα αντίστοιχα σύμβολα, ο Γιαννακούλιας (2005, σελ. 68) αναφέρει ότι, «ο Απειροστικός λογισμός του *Leibniz*, είναι το υπέρτατο παράδειγμα σε ολόκληρη την επιστήμη και τα μαθηματικά, ενός συστήματος παράστασης και ορολογίας, τόσο τέλεια ταιριασμένου με το θέμα του, προκειμένου να αντικατοπτριστούν πιστά οι βασικές λειτουργίες και διαδικασίες αυτού του θέματος», ενώ για το ίδιο θέμα ο Cajori (1928, τομ. Β, σελ. 181), αποτυπώνει την εξαιρετική σύλληψη των συγκεκριμένων συμβόλων, με τη φράση από τον Faust του Goethe «*War es ein Gott, der diese Zeichen schrieb?*»

3.5 Η εμφάνιση και εξέλιξη ειδικών μαθηματικών συμβόλων

Η μελέτη μαθηματικών αντικειμένων προϋποθέτει την καλή γνώση του αντίστοιχου συμβολισμού, αλλά κυρίως τη βαθιά κατανόηση των εννοιών που βρίσκονται πίσω από αυτά και συνήθως προηγούνται του συμβόλου. Για παράδειγμα, ο Cantor εισήγαγε για τον άπειρο πληθικό αριθμό που αντιπροσωπεύεται από το σύνολο των φυσικών αριθμών, το σύμβολο « $\aleph_0$ » το οποίο προέρχεται από το εβραϊκό αλφάβητο και διαβάζεται «άλεφ μηδέν». Ο ίδιος, έδειξε ότι ο αριθμός αυτός υπακούει σε κάποιους νόμους της αριθμητικής, όπως $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$, $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ κλπ., οι οποίοι είναι διαφορετικοί από εκείνους των πεπερασμένων αριθμών, έχοντας πολύ καλή γνώση των άπειρων δομών (Davis & Hersh, 1981). Η ιστορική μελέτη αποκαλύπτει τις δυσκολίες που προέκυψαν, τόσο κατά τη σύλληψη των εννοιών, όσο και στην προσπάθεια για ακριβή και σαφή παράστασή τους. Κάποιες φορές, διευκολύνεται η εξέλιξη της θεωρίας από μία διευρυμένη θέαση του συμβολισμού και κάποιες άλλες, δυσχεραίνεται από την απουσία του, όπως για παράδειγμα συνέβη με τη χρήση των κλασματικών δυνάμεων από τον Oresme (Boyer & Merzbach, 1997). Παρακάτω, αναφέρονται συνοπτικά μερικά ενδεικτικά παραδείγματα για την εξέλιξη των εννοιών παράλληλα με την εμφάνιση και εξέλιξη των αντίστοιχων συμβόλων.

3.5.1 Οι αρνητικοί αριθμοί

Η ύπαρξη των αρνητικών αριθμών, δημιουργούσε μέχρι τον 17^ο αιώνα μία δυσκολία στην πλήρη ανάπτυξη των μαθηματικών ενώ παράλληλα, η έννοια του αρνητικού συνυπήρχε με τη διαδικασία της αφαίρεσης. Σύμφωνα με τον Τουμάση (1999), οι αρχαίοι Έλληνες, γνώριζαν μεν τους αρνητικούς αριθμούς, αλλά επηρεασμένοι από τη γεωμετρική αναπαράσταση των μεγεθών, θεωρούσαν αδύνατη κάθε εξίσωση με αρνητικές ρίζες. Αργότερα, ο Διόφαντος ερμηνεύει σαν αρνητικό «αυτό που υπολείπεται», χρησιμοποιεί δε τους αρνητικούς σε ένα ενδιάμεσο στάδιο υπολογισμών, κάνοντας χρήση ακόμη και των κανόνων $(-)\cdot(-)=(+)$ και $(-)\cdot(+)=(-)$ (Bashmakova 1999a, Τουμάσης, 1999). Επιπλέον, σε Ινδικό χειρόγραφο γνωστό ως

Με την ανάπτυξη της άλγεβρας και του συμβολισμού, μετά το 12^ο αιώνα, οι υπολογιστικές διαδικασίες κατά την επίλυση εξισώσεων παρουσίαζαν κάποιες φορές αρνητικές (αδύνατες) ποσότητες, αλλά οι μαθηματικοί απέφευγαν συνήθως την παρουσία μεμονωμένων αρνητικών αριθμών. Σε χειρόγραφο του Bombelli, εμφανίζεται η ποσότητα «0-1069», για να εκφράσει τον αριθμό -1069, εφ' όσον δεν επιτρεπόταν να γραφτεί στην μορφή «-1069» ως αριθμός χωρίς νόημα (Cajori, 1928). Ο Chuquet, αναφέρει για πρώτη φορά έναν μεμονωμένο αρνητικό αριθμό σε μία αλγεβρική εξίσωση, όταν γράφει «4.¹ ισούται με $\tilde{m}.2.^0$ », δηλαδή $4x = -2$ (Boyer & Merzbach, 1997). Παράλληλα, η έντονη ενασχόληση με τον αλγεβρικό λογισμό και η παρουσία συμβόλων, έφερνε για την εποχή αυτή νέα αποτελέσματα. Για παράδειγμα, ο Stifel είχε εξοικειωθεί με τις ιδιότητες των αρνητικών αριθμών, μολονότι τους ονόμαζε «*numeri absurdi*», δηλαδή παράλογους αριθμούς (Boyer & Merzbach, 1997). Κατά την επίλυση της κυβικής εξίσωσης, ο Cardano χρησιμοποίησε τους αρνητικούς αν και τους ονόμαζε «*numeri ficti*», δηλαδή φανταστικούς αριθμούς. Η σύνδεση των αριθμών με τα τμήματα και η έννοια της φοράς στην ευθεία, έκαναν την ύπαρξη των αρνητικών αριθμών πολύ πιθανή (Boyer & Merzbach, 1997). Στη συνέχεια, η άρνηση των μαθηματικών (Vieta, Hariott κλπ.), να δεχθούν αρνητικές ρίζες και αρνητικούς συντελεστές στις εξισώσεις, εμπόδισε τον Vieta να αναγνωρίσει πλήρως τις σχέσεις ανάμεσα στους συντελεστές και τις ρίζες. Η αναγνώριση αυτή, συνέβη το 1629, όταν ο Girard, στο βιβλίο του *Invention nouvelle en l' algèbre*, διατυπώνει σαφώς τις σχέσεις ανάμεσα στις ρίζες και τους συντελεστές αφού έχει αποδεχθεί την ύπαρξη αρνητικών και φανταστικών ριζών (Boyer & Merzbach, 1997). Το 1657, ο Hudde είναι ο πρώτος που γενικεύει την παράσταση αριθμού, θετικού και αρνητικού με ένα γράμμα. Μέχρι τότε, ένας αρνητικός συμβολιζόταν με «-α» εμπεριείχε δηλαδή και το αρνητικό πρόσημο (Cajori, 1928).

Παράλληλα με την αποδοχή των νέων αυτών μαθηματικών αντικειμένων, κάνουν την εμφάνισή τους και αντίστοιχα σύμβολα. Αρχικά, προτείνεται για το $+a$ το a και για το $-a$ το $\bar{a}$. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται και άλλες προσπάθειες για το συμβολισμό των αρνητικών και των θετικών αριθμών, όπως τα σύμβολα — και + και τα a_n και a_p , αντίστοιχα. Τα σύμβολα $\leftarrow a$, $a \rightarrow$ και $\bar{a}$, $\bar{a}$, προτείνονται για τον ίδιο λόγο δηλώνοντας παράλληλα τη φορά των αριθμών στην ευθεία. Στο τέλος του 19^{ου} αιώνα, προτείνεται το $+$ και το $-$ σαν πρόθεμα σε συγκεκριμένο αριθμό, ως -10 και $+10$, για να δηλώσει τους δύο ποιοτικά διαφορετικούς αριθμούς. Η σημερινή παράσταση των αριθμών $\dots -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots$ οφείλεται στο έργο *Continuum* του Huntington που γράφτηκε το 1917 (Cajori, 1928).

3.5.2 Οι μιγαδικοί αριθμοί

Όπως κάθε νέο μαθηματικό αντικείμενο και κάθε νέα μαθηματική ιδέα, έτσι και οι μιγαδικοί χρειάστηκαν αρκετό χρόνο για να πάρουν τη μορφή που αναδεικνύει τις βασικές σχέσεις και ιδιότητες που τους διέπουν. Η εμφάνιση αριθμών μη συμβατών με τα επιστημολογικά πρότυπα της εποχής, ήταν συχνά το αποτέλεσμα των προσπαθειών επίλυσης εξισώσεων, μετά τον 13^ο αιώνα. Για παράδειγμα, ο Chuquet θεωρώντας την εξίσωση $4+x^2=3x$, ανακάλυψε ότι μερικές από τις λύσεις ήταν φανταστικοί αριθμοί. Σε περιπτώσεις σαν αυτές ο Chuquet πρόσθετε: «*Tel nombre est ineperible*», δηλαδή αυτού του είδους ο αριθμός είναι αδύνατος (Boyer & Merzbach, 1997, Cajori, 1928). Στη συνέχεια, μιγαδικοί αριθμοί εμφανίζονται σε συμβολική μορφή, αλλά χωρίς οντολογική υπόσταση, σε κείμενα των Cardano και Bombelli. Συγκεκριμένα, ο Cardano αναφέρει τις τετραγωνικές ρίζες των αρνητικών ως «σοφιστικές» παρουσιάζοντας όμως παράλληλα ως λύσεις μίας εξίσωσης τις $5 + \sqrt{-15}$ και $5 - \sqrt{-15}$, τις οποίες παρίστανε με « $5p:\bar{R} m:15$ » και « $5m:\bar{R} m:15$ ». Ο Bombelli αντίστοιχα, με παρόμοιο συμβολισμό των λύσεων, γράφει « $4.p.R[0\bar{m}.4]$ » για τη λύση $4 + \sqrt{-4}$ και καταλήγει σε «μία τρελή» ιδέα αφού τα υπόρριζα για συγκεκριμένες τιμές παίρνουν αρνητικές τιμές. Ο ίδιος, κάνει όμως ένα ακόμη βήμα, αφού εισάγει μία νέα φρασεολογία και ένα νέο συμβολισμό για τους φανταστικούς αριθμούς. Οι λέξεις «*di meno*» αντιστοιχούν στη συντομογραφία $dm.$ και δηλώνουν

το σημερινό $i = \sqrt{-1}$. Έτσι περιγράφει τον κανόνα $(+2i) \cdot (+i) = -2$ ως: «*p.dm.2.via.p.dm.1 equal. m̃ 2*» (Boyer & Merzbach, 1997, Cajori, 1928).

Μετά την επίλυση της κυβικής εξίσωσης, τα πράγματα για τους μιγαδικούς άλλαξαν ριζικά. Συγκεκριμένα, όταν οι τρεις λύσεις μιας τριτοβάθμιας εξίσωσης είναι πραγματικές και μη μηδενικές, ο τύπος των Cardano Tartaglia, οδηγεί σε τετραγωνικές ρίζες αρνητικών αριθμών. Έτσι, έπρεπε να ληφθούν υπόψη οι φανταστικοί αριθμοί, ακόμη και αν κάποιος αποφάσιζε να περιοριστεί στις πραγματικές λύσεις (Boyer & Merzbach, 1997).

Η εισαγωγή των φανταστικών αριθμών με τον συμβολισμό $\sqrt{-a}$, ακόμη και ως άγνωστα είδη, γίνεται από πολλούς μαθηματικούς, πριν ακόμη ο Euler παρουσιάσει ξεχωριστά από τον συμβολισμό $\sqrt{-a}$, τον αριθμό $\sqrt{-1}$ για την παράσταση όλων των φανταστικών. Στον Euler οφείλεται το σύμβολο «*i*» για τη φανταστική μονάδα, το οποίο πρότεινε το 1777. Μέχρι τότε, ο Euler χρησιμοποιούσε το *i* για να συμβολίσει έναν άπειρο αριθμό. Ο Euler ήταν αυτός που χρησιμοποίησε πρώτη φορά φανταστικούς εκθέτες σε μία επιστολή που έστειλε προς τον Jean Bernoulli το 1740 (Boyer & Merzbach, 1997, Cajori, 1928). Τη γραφή των μιγαδικών, ως ζευγάρι αριθμών, παρουσίασε ο Hamilton, το 1837, γράφοντας τους ως $(a_1, a_2) = a_1 + a_2 \sqrt{-1}$ και αργότερα, το 1903, ο Burkhardt ως $(a, \beta) = a + \beta i$ (Cajori, 1928). Το σύμβολο «*i*» για τους φανταστικούς αριθμούς, καθιερώθηκε μετά από την εκτενή χρήση του στο κλασικό έργο του Gauss «*Disquisitiones Arithmeticae*» το οποίο τυπώθηκε το 1801. Στο βιβλίο αυτό, ο Gauss δίνει τη σημερινή γεωμετρική ερμηνεία για τους φανταστικούς αριθμούς και ιδιαίτερα για την φανταστική μονάδα, καθιστώντας την υιοθέτηση του ονόματος «φανταστικός» μια άστοχη ενέργεια. Προτείνει μάλιστα, για τους αριθμούς 1, -1 και *i*, αντί της ονομασίας θετική, αρνητική και φανταστική μονάδα την ονομασία ευθεία, αντίστροφη και πλευρική μονάδα «*directe, inverse, laterale Einheit*» (Boyer & Merzbach, 1997, Bell, 1992).

3.5.3 Η συνάρτηση

Η εξέλιξη της έννοιας της συνάρτησης είναι δυνατόν να θεωρηθεί σαν μία πάλη σε έναν πόλεμο ανάμεσα σε δύο διανοητικές απεικονίσεις: (α) τη γεωμετρική, η οποία εκφράζεται με τη μορφή των καμπύλων και (β) την αλγεβρική, η οποία δηλώνεται με έναν τύπο. Ο τύπος της αλγεβρικής απεικόνισης, είναι αρχικά πεπερασμένων διαδικασιών και αργότερα διαφοροποιείται, αφού επιτρέπονται σε αυτόν άπειρες διαδικασίες. Στη συνέχεια, ένα τρίτο στοιχείο εισέρχεται για να συμπληρώσει την έννοια της συνάρτησης. Πιο συγκεκριμένα, εμφανίζεται ο λογικός ορισμός της συνάρτησης σαν αντιστοίχιση μεταξύ στοιχείων, έχοντας ως διανοητική απεικόνιση μία μηχανή εισόδου-εξόδου. Η γενική ιδέα (*notion*) της συνάρτησης ορισμένη σε μία σαφή μορφή, δεν είχε αναδυθεί έως την αρχή του 18^{ου} αιώνα, παρότι μία υπονοούμενη υλοποίηση της έννοιας χρονολογείται από τους αρχαίους χρόνους. Μία σειρά από εξελίξεις στα μαθηματικά, ήταν τα ουσιαστικά στοιχεία που οδήγησαν στην εμφάνιση της νέας αυτής έννοιας. Τα στοιχεία αυτά συνοψίζονται στα εξής: (α) η επέκταση της έννοιας του αριθμού, ώστε να γίνουν αποδεκτοί οι πραγματικοί και με κάποια έννοια και οι μιγαδικοί αριθμοί (Bombelli, Stifel και άλλοι), (β) η δημιουργία της συμβολικής άλγεβρας (Vieta, Descartes και άλλοι), (γ) η μελέτη της κίνησης, σαν κεντρικό πρόβλημα της επιστήμης (Kepler, Galileo και άλλοι) και (δ) το «πάντρεμα» της άλγεβρας με τη γεωμετρία (Descartes, Fermat και άλλοι) (Kleiner, 1989).

Παράλληλα με τη μελέτη προβλημάτων που προκύπτουν από τη σύνδεση της άλγεβρας με τη γεωμετρία, εμφανίζονται δύο νέα, βασικά στοιχεία, που συμβάλουν καθοριστικά στη εξέλιξη της έννοιας της συνάρτησης. Αυτά είναι, η εισαγωγή της έννοιας της μεταβλητής για τη δήλωση συνεχών μεγεθών και οι ισότητες, οι οποίες αποτελούν τις εκφράσεις που περιγράφουν τις σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών. Αυτά τα στοιχεία, εφαρμοσμένα στη γεωμετρία και τη φυσική, έχουν σαν αποτέλεσμα την παροχή ενός μεγάλου αριθμού παραδειγμάτων από καμπύλες για μελέτη, δηλαδή δυνητικές-λανθάνουσες συναρτήσεις (potential function). Η μελέτη αυτή, είναι το τελικό στάδιο που θα οδηγήσει τη μαθηματική σκέψη στην εισαγωγή της έννοιας της συνάρτησης, ως σχέση μεταξύ δύο μεγεθών. Αυτό που λείπει στο τελικό στάδιο, είναι η διαφοροποίηση σε ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή και η αποσύνδεση

της σχέσης των μεγεθών από τη γεωμετρία. Για παράδειγμα ο λογισμός των Newton και Leibniz δεν ήταν ένας λογισμός συναρτήσεων, εφ' όσον το βασικό αντικείμενο μελέτης ήταν η γεωμετρική καμπύλη χωρίς τη διάκριση ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής (Kleiner, 1989, Boyer, 1959).

Το 1692 ο Leibniz εισάγει τη λέξη «*function* - συνάρτηση» για να προσδιορίσει ένα γεωμετρικό αντικείμενο το οποίο συνδέεται με την καμπύλη. Ο πρώτος ορισμός της συνάρτησης δίνεται το 1718 από τον Johann Bernoulli. Για τον συμβολισμό της συνάρτησης, σε χειρόγραφα του Leibniz συναντάμε τις εκφράσεις: « $\overline{x} \boxed{1}$ » για μία συνάρτηση του x , « $\overline{x} \boxed{2}$ » για μία δεύτερη συνάρτηση του x , « $\overline{x,y} \boxed{1}$ » για μία συνάρτηση των x, y , και « $\overline{x} \boxed{r.1}$ » για μία λογική συνάρτηση του x (Cajori, 1928).

Στη συνέχεια, ο Leibniz και ο Johann Bernoulli χρησιμοποιούν ειδικά γράμματα, όπως το ελληνικό ξ , το X και το γράμμα n , ενώ αργότερα προτείνουν τα κεφαλαία γράμματα B, F, G, C καθώς και το γράμμα φ , χωρίς όμως τη χρήση παρενθέσεων. Έχοντας ως μεταβλητή το γράμμα x ή z και σταθερές τα γράμματα b, d , κλπ., γράφουν για παράδειγμα: ξx ή φx ή φz . Ο διαχωρισμός της μεταβλητής με παρένθεση γίνεται από τον Euler, που εισάγει πρώτος το σύμβολο της συνάρτησης $f(x)$ το 1734 στο έργο του *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* (Cajori, 1928). Αργότερα, το 1748, για τον Euler στο *Introductio in Analysin Infinitorum*, η έννοια και ο συμβολισμός της συνάρτησης παίζουν έναν κεντρικό ρόλο για την ανάπτυξη και την πρόοδο της ανάλυσης (Kleiner, 1989).

3.5.4 Τριγωνομετρικές και υπερβολικές συναρτήσεις

Η ενασχόληση στους αρχαίους πολιτισμούς με την τριγωνομετρία, συνδυάζεται τόσο με τη γεωμετρία, όσο και με την αστρονομία. Παρατηρείται έτσι ανάπτυξη στοιχείων της τριγωνομετρίας από τους Βαβυλώνιους, τους Αιγύπτιους και τους Έλληνες.

Στην ανάπτυξη της τριγωνομετρίας συμβάλλουν σημαντικά και οι Ινδοί που εισάγουν το ημίτονο, το οποίο αντικατέστησε τους πίνακες χορδών των Ελλήνων.

Στη συνέχεια, οι Άραβες ακολουθούσαν αρχικά δύο είδη τριγωνομετρίας, την ελληνική τριγωνομετρία των χορδών, όπως τη διαβάζουμε στη *Μεγίστη* και την ινδική με τους πίνακες των ημίτονων, όπως τους διαβάζουμε στη *Σιντχίντ*. Και τα δύο αυτά έργα, αποδείχθηκαν καθοριστικά για την εξέλιξη της τριγωνομετρίας κατά τα επόμενα χρόνια (Boyer & Merzbach, 1997).

Η τριγωνομετρία κατά το Μεσαίωνα αναπτύσσεται κυρίως για να βοηθήσει τις αστρονομικές μελέτες. Σημαντική στο πεδίο αυτό είναι η συνεισφορά του Regiomontanus, σε μελέτη του οποίου αναφέρεται η συνάρτηση της εφαπτομένης. Παράλληλα ο Κοπέρνικος, μέσα από τα τριγωνομετρικά θεωρήματα, διέδωσε την επιρροή του Regiomontanus, κάτι που κάνει αργότερα και ο μαθητής του Rheticus, ο οποίος προχώρησε ακόμη περισσότερο. Ο Vieta, ασχολήθηκε με την τριγωνομετρία με μία γενικευμένη αναλυτική προσέγγιση, εισάγοντας παράλληλα αλγεβρικές μεθόδους σε αυτήν. Επιπλέον, χρησιμοποίησε την τριγωνομετρία για τη λύση αλγεβρικών προβλημάτων και ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε έκφραση

ισοδύναμη με τον τύπο
$$\frac{\frac{(a+b)}{2}}{\frac{(a-b)}{2}} = \frac{\varepsilon\phi\frac{A+B}{2}}{\varepsilon\phi\frac{A-B}{2}}$$
 Ο τύπος αυτός, είχε δημοσιευθεί αρχικά

το 1583 από τον Thomas Fink στο έργο του *Geometria rotundi*, δηλαδή «Γεωμετρία του κύκλου». (Boyer & Merzbach, 1997). Στον Thomas Fink αποδίδεται και η πρώτη χρήση των λέξεων «tangent» και «secant» καθώς επίσης και των συντομογραφιών «sin., tan., sec., sin.com, tan.com, sec.com.» που αναφέρονται στους τριγωνομετρικούς αριθμούς (Cajori, 1928).

Παράλληλα με την ανάπτυξη της τριγωνομετρίας, παρουσιάζεται μέσα στο κλίμα της εποχής και η ανάγκη για έναν λιτό και σαφή συμβολισμό. Κατά τη διάρκεια του 17^{ου} και 18^{ου} αιώνα, πολλοί μαθηματικοί χρησιμοποίησαν συντομεύσεις για την παράσταση των τριγωνομετρικών αριθμών. Οι περισσότερες από αυτές, βασίζονται στα αρχικά γράμματα των αντίστοιχων λέξεων όπως για παράδειγμα *s*, *S*, *sin*, *sin.*, *sen.*, *sn* και *σ*, για το ημίτονο, *cs*, *S.2.*, *Cos.*, *cos.* και *cos*, για το συνημίτονο και *t*, *T*, *tang.*, *tang*, *tng*, *tg* και *tan.*, για την εφαπτομένη (Cajori, 1928).

Η αυστηρή, αναλυτική αντιμετώπιση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, καθιερώθηκε ως ένα μεγάλο βαθμό από την *Introductio* του Euler. Στο βιβλίο αυτό,

εμφανίζονται συντμήσεις για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς, όπως $\sin.$, $\sin$, sn για το ημίτονο, $\cos.$, $\cos$, cs για το συνημίτονο κλπ., καθώς και οι ακόλουθες τριγωνομετρικές ταυτότητες (Boyer & Merzbach, 1997, Cajori, 1928):

$$\sin x = \frac{e^{\sqrt{-1}x} - e^{-\sqrt{-1}x}}{2\sqrt{-1}}, \cos x = \frac{e^{\sqrt{-1}x} + e^{-\sqrt{-1}x}}{2} \text{ και } e^{ix} = \cos x + \sqrt{-1} \sin x .$$

Επιπλέον, η σύγκριση των τεταγμένων του κύκλου $x^2+y^2=1$ και της υπερβολής $x^2-y^2=1$, απασχολούσε τους μαθηματικούς για έναν αιώνα περίπου. Το 1757, ο Ιταλός μαθηματικός Riccati, πρότεινε τον ορισμό των υπερβολικών συναρτήσεων χρησιμοποιώντας τα σύμβολα $\operatorname{Sh} x$ και $\operatorname{Ch} x$ για το υπερβολικό ημίτονο και συνημίτονο αντίστοιχα. Ο ίδιος, χρησιμοποιούσε τα σύμβολα $\operatorname{Sc}.$ και $\operatorname{Cc}.$ για της συναρτήσεις ημίτονο και συνημίτονο, αντίστοιχα, στην κυκλική τριγωνομετρία. Αργότερα, αυτές οι συναρτήσεις αναπτύχθηκαν περαιτέρω από τον Lambert ο οποίος εισάγει τα σημερινά σύμβολα $\sinh(x)$ και $\cosh(x)$ για αυτές. Παράλληλα, αποδεικνύονται τρεις ταυτότητες για τις υπερβολικές συναρτήσεις, οι οποίες αντιστοιχούν σε αυτές της κανονικής τριγωνομετρίας για τα $\sin x$, $\cos x$ και e^{ix} και είναι οι ακόλουθες:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ και } e^x = \sinh(x) + \cosh(x).$$

Η ομοιότητα που παρουσιάζουν οι τριγωνομετρικές ταυτότητες με αυτές των υπερβολικών συναρτήσεων, είναι φανερή από τον συμβολισμό των δύο ευρύτερων εννοιών (Boyer & Merzbach, 1997, Cajori, 1928).

3.5.5 Η ορίζουσα

Η έννοια της ορίζουσας και η μεταγενέστερη έννοια του πίνακα, μαζί με την κατανόηση των ιδιοτήτων τους, είναι ιστορικά στενά συνδεδεμένες μεταξύ τους. Και οι δύο έννοιες προέρχονται από τη μελέτη του συστήματος γραμμικών εξισώσεων. Προβλήματα που ανάγονται στην επίλυση γραμμικών συστημάτων, συναντάμε τόσο σε όλους τους αρχαίους πολιτισμούς που ασχολήθηκαν με τα μαθηματικά, όσο και στα έργα των μαθηματικών της Δύσης κατά τη διάρκεια του Μεσαίωνα. Αργότερα, με την εισαγωγή των συμβολισμών στους αλγεβρικούς υπολογισμούς, υπήρξε ακόμη

μεγαλύτερο πλήθος προσπαθειών για την επίλυση γραμμικών συστημάτων (Τοκμακίδης, 1989).

Η πρώτη εμφάνιση μίας «ορίζουσας» με την εισαγωγή κατάλληλου συμβολισμού σε πρόβλημα εξισώσεων γραμμικού συστήματος, βρίσκεται σε μία επιστολή του Leibniz προς τον De L' Hospital, το 1693. Στην επιστολή αυτή, ο Leibniz προτείνει μία μέθοδο χρήσης των αριθμών για την έκφραση γενικών σχέσεων, όπως ακριβώς γίνεται με τη χρήση των γραμμάτων. Ως παράδειγμα, έδωσε ένα γραμμικό σύστημα 3 εξισώσεων με 2 αγνώστους, γραμμένο στην ακόλουθη μορφή:

$$10+11x+12y=0$$

$$20+21x+22y=0$$

$$30+31x+32y=0$$

Οι συντελεστές του συστήματος δεν απεικονίζουν αριθμούς, αλλά λειτουργούν όπως οι διπλοί δείκτες που χρησιμοποιούνται σήμερα για την παράσταση των στοιχείων ενός πίνακα. Αυτοί οι «ψευδοαριθμοί», όπως τους αποκαλεί ο Leibniz, δείχνουν με το πρώτο ψηφίο τους την εξίσωση στην οποία βρίσκονται και με το δεύτερο, τον άγνωστο-γράμμα στον οποίο ανήκουν. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών, ο Leibniz απαλείφει τον άγνωστο, αρχικά από τις δύο πρώτες εξισώσεις και κατόπιν από την πρώτη και την τρίτη καταλήγοντας στις εξισώσεις:

$$10.22+11.22x-12.20-12.21x=0$$

$$10.32+11.32x-12.30-12.31x=0$$

Απαλείφοντας στη συνέχεια το x από τις δύο τελευταίες εξισώσεις, λύνοντας κάθε μία εξίσωση ως προς x και εξισώνοντας τα δύο μέλη των ισοτήτων καταλήγει στην ισότητα:

$$10.21.32+11.22.30+12.20.31-10.22.31-11.20.32-12.21.30=0$$

που αντιστοιχεί στο σημερινό ανάπτυγμα της ορίζουσας του επαυξημένου πίνακα: $a_{10}.a_{21}.a_{32}+a_{11}.a_{22}.a_{30}+a_{12}.a_{20}.a_{31}-a_{10}.a_{22}.a_{31}-a_{11}.a_{20}.a_{32}-a_{12}.a_{21}.a_{30}=0$ και είναι η αναγκαία συνθήκη για να έχει λύση το δεδομένο σύστημα.

Ο Leibniz γράφει την ισότητα αυτή ως εξής:

$$\begin{array}{ccc} 1_0.1_2.3_2 & & 1_0.2_2.3_1 \\ 1_1.2_2.3_0 & = & 1_1.2_0.3_2 \\ 1_2.2_0.3_1 & & 1_2.2_1.3_0 \end{array}$$

τονίζοντας ταυτόχρονα «την αρμονία των αριθμών» σε αυτό το τελικό αποτέλεσμα. Με την επίλυση γραμμικών συστημάτων 2x2, 3x3 και 4x4, κάνοντας χρήση των οριζουσών, ασχολήθηκε και ο C. Mac Laurin, το 1729. Το έργο του όμως, όπως και αυτό του Leibniz, έμεινε άγνωστο για πολύ καιρό (Τοκμακίδης, 1989, Cajori 1928).

Η μέθοδος των οριζουσών για την επίλυση γραμμικού συστήματος, έμεινε γνωστή με το όνομα του Cramer, ο οποίος την παρουσίασε στο βιβλίο του *«Introduction a l' Analyse des Lignes Courbes algebriques- Εισαγωγή στην ανάλυση των αλγεβρικών καμπύλων γραμμών»*, το 1750. Στο βιβλίο αυτό, θέλοντας να προσδιορίσει μία καμπύλη που διέρχεται από 5 γνωστά σημεία και έχει εξίσωση $A+By+Cx+Dy^2+Exy+x^2=0$, ο Cramer καταλήγει σε ένα γραμμικό σύστημα 5 εξισώσεων με 5 αγνώστους. Από την επίλυση του συστήματος προκύπτει μία γενική μέθοδος υπολογισμού των αγνώστων με κατασκευή κλασμάτων, των οποίων ο κοινός παρονομαστής και οι αριθμητές προσδιορίζονται από τους συντελεστές του συστήματος. Για παράδειγμα, για τις λύσεις ενός 2x2 συστήματος έγραφε:

$$y = \frac{Z^1 A^2 - Z^2 A^1}{Z^1 \gamma^2 - Z^2 \gamma^1} \text{ και } z = \frac{A^1 \gamma^2 - A^2 \gamma^1}{Z^1 \gamma^2 - Z^2 \gamma^1}$$

Αυτή είναι ουσιαστικά η σημερινή μέθοδος των οριζουσών, αλλά ο Cramer δεν χρησιμοποίησε κάποιο ειδικό όνομα ή σύμβολο για την έννοια της ορίζουσας. Με το ίδιο πρόβλημα ασχολήθηκαν στη συνέχεια οι Bézout και Euler καταλήγοντας σε παρόμοια συμπεράσματα (Τοκμακίδης, 1989).

Το 1771, ο Vandermonde, σε μία εργασία του για την απαλοιφή, εισάγει ένα νέο συμβολισμό για τις εξισώσεις και για την ορίζουσα. Για παράδειγμα, για ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους γράφει:

$$\frac{1}{1}\xi_1 + \frac{1}{2}\xi_2 + \frac{1}{3} = 0$$

$$\frac{2}{1}\xi_1 + \frac{2}{2}\xi_2 + \frac{2}{3} = 0$$

ενώ για τους συντελεστές « $\frac{\alpha}{a}$ » και « $\frac{\beta}{b}$ » γράφει το γινόμενο τους « $\frac{\alpha}{a} \cdot \frac{\beta}{b}$ ».

Παράλληλα, εισάγει «ένα σύστημα συντομογραφίας», το οποίο αντιστοιχεί στη σημερινή 2x2 ορίζουσα ως εξής:

$$\begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ \hline a & b \end{array} = \frac{\alpha}{a} \cdot \frac{\beta}{b} - \frac{\alpha}{b} \cdot \frac{\beta}{a} \text{ και για } 3 \times 3 \text{ σύστημα γράφει αντίστοιχα}$$

$$\begin{array}{c|c|c} \alpha & \beta & \gamma \\ \hline a & b & c \end{array} = \frac{\alpha}{a} \cdot \begin{array}{c|c} \beta & \gamma \\ \hline b & c \end{array} + \frac{\alpha}{b} \cdot \begin{array}{c|c} \beta & \gamma \\ \hline c & a \end{array} + \frac{\alpha}{c} \cdot \begin{array}{c|c} \beta & \gamma \\ \hline a & b \end{array}$$

Ο Vandermonde, εκτός από τον συμβολισμό, αναφέρει επιπλέον θεωρήματα για τις ιδιότητες των οριζουσών, καθώς επίσης και σχέσεις ανάμεσα στους υπολογισμούς των οριζουσών και τις μεταθέσεις στοιχείων (Τοκμακίδης, 1989, Cajori, 1928).

Στη συνέχεια, ο Laplace και Lagrange, ασχολούνται με τη θεωρία των οριζουσών, για το πρόβλημα της απαλοιφής ο πρώτος και για τις αλγεβρικές εξισώσεις, χωρίς ιδιαίτερο συμβολισμό, ο δεύτερος. Ο Laplace συμβολίζει τα στοιχεία της ορίζουσας με γράμματα του λατινικού αλφαβήτου που συνοδεύονται από ένα δείκτη, ως εξής: 1a , 1b , 1c , 2a , 2b , 2c , ... κλπ. και παράλληλα παρουσιάζει κάποια συντομογραφία, με τους διαγώνιους συντελεστές σε παρενθέσεις, για το ανάπτυγμα της. Για παράδειγμα, για την 3x3 ορίζουσα χρησιμοποιεί την έκφραση $({}^1a {}^2b {}^3c)$, ένα συμβολισμό που υιοθετεί αργότερα και ο Binet (Τοκμακίδης, 1989).

Ο λατινικός όρος «*determinantem*» - ορίζουσα, χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Gauss, το 1801 αλλά όχι με τη σημερινή σημασία. Ο Gauss, στο έργο του «*Disquisitiones Arithmeticae*», μελετώντας τη γραμμική αντικατάσταση στις τετραγωνικές μορφές $ax^2+2bxy+cy^2$, ονομάζει ορίζουσα της μορφής (a, b, c) τον

αριθμό bb-ac. Αργότερα, ο Lebesgue συμβολίζει με $[g, i]$ την ελάχιστη ορίζουσα που προκύπτει από την αφαίρεση της γραμμής g και της στήλης i , και με $\begin{bmatrix} g & i \\ h & k \end{bmatrix}$ όταν γραμμές και στήλες που αφαιρούνται είναι οι g, h και i, k , αντίστοιχα (Cajori, 1928).

Η πρώτη συστηματική διαπραγμάτευση της θεωρίας των οριζουσών έγινε από τους Cauchy και Binet, σε εργασίες που παρουσιάστηκαν μάλιστα την ίδια ημέρα, το Νοέμβριο του 1812, λόγω της φιλίας των δύο ανδρών. Στην εργασία του Cauchy που δημοσιεύτηκε το 1815, η λέξη ορίζουσα – «*determinant*» χρησιμοποιείται με τη σημερινή της σημασία, ενώ εισάγεται και η τετραγωνική διάταξη των στοιχείων της, με τη βοήθεια των διπλών δεικτών. Αντίστοιχα, στην εργασία του Binet, οι ορίζουσες χρησιμοποιούνται ως συναρτήσεις, ενώ αναφέρονται με τον όρο «*resultante*», όπως τις είχε ονομάσει ο Laplace (Τοκμακίδης, 1989).

Οι δύο κάθετες γραμμές για το συμβολισμό της ορίζουσας χρησιμοποιήθηκαν πρώτη φορά από τον Caley, το 1841, ο οποίος γράφει για τα σύμβολα:

$$|a|, \begin{vmatrix} a & \beta \\ a' & \beta' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}, \text{ κλπ}$$

ότι δηλώνουν τις ποσότητες: $\alpha, \alpha\beta' - \alpha'\beta, \alpha\beta'\gamma'' - \alpha\beta''\gamma' + \alpha'\beta''\gamma - \alpha'\beta\gamma'' + \alpha''\beta\gamma' - \alpha''\beta'\gamma$, κλπ. (Cajori, 1928).

Είναι γεγονός ότι, η έννοια της ορίζουσας ξεκίνησε από ένα απλό βοηθητικό σύμβολο ή έναν αριθμό κατά τη διαδικασία επίλυσης συστημάτων. Κατέληξε όμως ύστερα από την εξέλιξη της θεωρίας των οριζουσών και του συμβολισμού της, σε ένα μαθηματικό αντικείμενο, το οποίο, συνδεδεμένο με την έννοια της συνάρτησης, των συμμετριών, των μεταθέσεων κλπ., γίνεται ένα χρήσιμο εργαλείο για την εξέλιξη της μαθηματικής γνώσης.

4 Ο ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΣΥΜΒΟΛΩΝ ΣΤΗ ΜΑΘΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η μάθηση αποτελεί ένα βασικό ψυχολογικό φαινόμενο της ανθρώπινης ύπαρξης, το οποίο εξελίσσεται διαφορετικά από άνθρωπο σε άνθρωπο, σύμφωνα με την εμπειρία και τη σκέψη. Η σπουδαιότητα και η αναγκαιότητα της μάθησης γίνεται φανερή από τον κεντρικό ρόλο που παίζει στις περισσότερες πτυχές της ανθρώπινης συμπεριφοράς, όπως για παράδειγμα στις κινητικές δεξιότητες, τις ικανότητες της λογικής σκέψης, καθώς και την απόκτηση σύνθετων επιστημονικών γνώσεων. Η διδασκαλία αποτελεί το μέσο για την επιδίωξη της μάθησης, ενώ αναφορικά με το αποτέλεσμα, οι ψυχολόγοι, θεωρούν ότι έχει συντελεστεί μάθηση όταν παρατηρούνται σχετικά μόνιμες αλλαγές στη συμπεριφορά. Οι μηχανισμοί μάθησης και η διαφορετική τους προσέγγιση από τις ψυχολογικές θεωρίες μάθησης, οδήγησαν στο σχηματισμό διδακτικών μοντέλων, τα οποία επηρέασαν τις τελευταίες δεκαετίες διεθνώς την εκπαιδευτική πρακτική (Βοσνιάδου, 2001).

Στο «μπιχεβιοριστικό» μοντέλο της εκπαίδευσης, με βασικές αρχές τη συνάφεια, την επανάληψη και την ενίσχυση, η μάθηση είναι κυρίως συσχέτιση των ερεθισμάτων με τις αντίστοιχες αντιδράσεις, ενισχύεται δε από την επανάληψη. Το μοντέλο αυτό, δεν κατόρθωσε να δώσει απαντήσεις σε ερωτήματα που αφορούν στο νόημα των αντικειμένων, να αναλύσει τη μετάβαση από την απλή στη σύνθετη μάθηση, καθώς και να προσεγγίσει και να εξετάσει χαρακτηριστικά της ανθρώπινης υπόστασης, όπως οι ανώτερες νοητικές λειτουργίες κατά τη διαδικασία της μάθησης. Οι απαντήσεις σε τέτοιου είδους ερωτήματα, οδήγησαν τις ψυχολογικές έρευνες να συγκλίνουν στην άποψη ότι, η κατανόηση των εννοιών και των δομών αποτελεί προϋπόθεση για μάθηση με νόημα. Αναπτύχθηκαν έτσι οι βασικές αντιλήψεις που διαμόρφωσαν τις αρχές του «Δομισμού» και του «Κονστрукτιβισμού», σύμφωνα με τις οποίες, το άτομο συμμετέχει ενεργά στη διαδικασία της κατανόησης, την εξαγωγή συμπεράσματος από τις πληροφορίες και την οικοδόμηση της ατομικής γνώσης (Κολέζα, 2000).

4.1 Διαμεσολαβητικός ρόλος στη μάθηση

Ειδικότερα για τα μαθηματικά, την κεντρική ιδέα της θεωρίας του κονστρουκτιβισμού αποτελεί το γεγονός ότι, οι μαθητές κατασκευάζουν ενεργητικά τη γνώση, κατανοώντας την, σύμφωνα με τις δικές τους προϋπάρχουσες εμπειρίες, μέσα από δραστηριότητες, οι οποίες βασίζονται στη λογικομαθηματική εμπειρία και οι οποίες έχουν νόημα και σχέση με τη ζωή τους. Οι διαφορετικές εκδοχές του κονστρουκτιβισμού, σε συνδυασμό με τις αντίστοιχες προσεγγίσεις για τη διδασκαλία και τη μάθηση, έφεραν στο προσκήνιο πολλές προσεγγίσεις για τη μαθησιακή διαδικασία, οι οποίες αποδίδουν πρωταρχικό ρόλο στις έννοιες, τις δομές και τα σύμβολα.

Η «στρουκτουραλιστική» προσέγγιση, δίνοντας έμφαση στις μαθηματικές δομές, απαιτεί τη διασαφήνιση του ιδιαίτερου ρόλου των υπό διαπραγμάτευση θεμάτων, στην ευρύτερη δομή του αντίστοιχου πεδίου. Αποτέλεσμα αυτής της προσέγγισης είναι το σπειροειδές αναλυτικό πρόγραμμα, στο οποίο οι δομές παρουσιάζονται με σταδιακό επαναπροσδιορισμό στα διάφορα στάδια, μέχρι τον πλήρη σχηματισμό τους. Ο Bruner, ο οποίος είναι και ο κύριος εκφραστής της θεωρίας αυτής, για την κατανόηση μίας δομής, αναφέρεται σε αναπαραστάσεις και προτείνει τρεις διαφορετικούς τρόπους αναπαραστάσεων, οι οποίοι δεν βρίσκονται απαραίτητα σε διαδοχή. Οι τρεις αυτοί διαφορετικοί τρόποι είναι: α) η πραξιακή αναπαράσταση, με αντικείμενα και συμπεριφορές ή δράσεις αντικειμένων, β) η εικονική αναπαράσταση εννοιών, με εικονικά σύμβολα, αντικείμενα ή φαινόμενα και γ) η συμβολική αναπαράσταση εννοιών, με σύμβολα που δεν απεικονίζουν αντικείμενα ή φαινόμενα, αλλά την έννοια ως αφηρημένο (*abstract*) αντικείμενο (Κολέζα, 2000, Τουμάσης, 1999).

Ο κοινωνικός και ριζοσπαστικός κονστρουκτιβισμός, αντιμετωπίζουν τα μαθηματικά ως μία κοινωνική κατασκευή. Το κοινωνικό και φυσικό περιβάλλον, αλληλεπιδρούν με το άτομο, επηρεάζουν τη γνώση του και καθορίζουν το εύρος των πιθανών κατασκευών του. Στη θεωρία αυτή, τονίζεται ιδιαίτερα η σημασία της κοινωνικής αλληλεπίδρασης και της προσωπικής εμπειρίας, καθώς η επικοινωνία με το περιβάλλον γίνεται μέσω της γλώσσας. Η διαμεσολάβηση των συμβόλων (γλώσσας, αναπαραστάσεων, συντομεύσεων, αφηρημένων συμβόλων κλπ) είναι

καθοριστική αφού αυτά, λειτουργούν ως προσθετικά και ενισχυτικά εργαλεία στην επικοινωνία και τη σκέψη (Κολέζα, 2000).

Τα σύγχρονα προγράμματα σπουδών, αναφέρουν βασικές αρχές για τα σχολικά μαθηματικά, όπως για παράδειγμα, *«οι μαθητές οφείλουν να μαθαίνουν μαθηματικά με κατανόηση, να κατασκευάζουν ενεργά την νέα γνώση από την εμπειρία τους και την προηγούμενη γνώση»*. Κάνοντας ειδικότερη αναφορά στη χρήση των συμβόλων, τα συγκεκριμένα στοιχεία για κάθε επίπεδο, αναφέρουν ως σκοπούς της διδασκαλίας των μαθηματικών, την κατανόηση και χρήση των εννοιών, την κατανόηση των σχέσεων και των ιδιοτήτων, τη μετάφραση των προβλημάτων σε μαθηματική γλώσσα παράλληλα με την εφαρμογή κατάλληλων τεχνικών και αλγορίθμων, καθώς και τη χρήση των μαθηματικών εργαλείων (γλώσσα, σύμβολα, διαδικασίες, αλγόριθμοι, κλπ) για την επικοινωνία, τη σκέψη και την καταγραφή δεδομένων (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 1998, Hiebert, 1997, NCTM, 2004).

4.2 Σύγχρονες θεωρίες διδακτικών προσεγγίσεων

Επιστημολογική προσέγγιση

Η ψυχολογική θεώρηση για την κατασκευή της γνώσης, συμπληρώνεται ουσιαστικά, από μία προσέγγιση βασισμένη σε επιστημολογικά δεδομένα, σύμφωνα με την οποία, η αλληλεπίδραση των παραγόντων μέσα σε μία τάξη είναι αυτή που καθορίζει την μαθηματική γνώση. Η υπόθεση αυτή, θεωρεί ότι η μαθηματική γνώση, δεν μεταφέρεται σαν ένα έτοιμο προϊόν το οποίο χαρακτηρίζεται από συγκεκριμένο συμβολισμό, καθαρούς ορισμούς και αποδεδειγμένα θεωρήματα. Οι μαθηματικές έννοιες κατασκευάζονται σαν συμβολικές συσχετιστικές δομές (*symbolic relational structures*), οι οποίες κωδικοποιούνται με βάση το νόημα των σημείων και των συμβόλων και συνδυάζονται λογικά σε μαθηματικές λειτουργίες. Επιπλέον, η κατασκευή της νέας μαθηματικής γνώσης, απαρτίζεται από εγκαθιδρυμένες σχέσεις μεταξύ του σημείου- συμβόλου και του αντικειμένου - αναφοράς (Steinberg, 2000).

Σε ένα τέτοιο επιστημολογικά προσανατολισμένο πλαίσιο αλληλεπίδρασης, το επιστημολογικό τρίγωνο με κορυφές α) σημείο - σύμβολο (*sign/symbol*) β) αντικείμενο-αναφορά, πλαίσιο (*object/reference, context*) και γ) έννοια (*concept*) χρησιμοποιείται από τον Steinberg (2000), ως βασικό θεωρητικό εργαλείο για την ανάλυση και περιγραφή των διαδικασιών κατασκευής της νέας μαθηματικής γνώσης. Παράλληλα, τονίζεται η ιδιαιτερότητα που υπάρχει στις αμοιβαίες και ανταποδοτικές (*reciprocal*) σχέσεις μεταξύ των τριών κορυφών του τριγώνου κατά τη διαδικασία της μάθησης. Οι σχέσεις αυτές, δεν γίνονται αντιληπτές ως σχέσεις ρητά κανονισμένες και ρυθμισμένες, αλλά αλλάζουν και τροποποιούνται προς μία ισορροπία (*balance*), αναπτύσσοντας με αλληλεπίδραση την εξήγηση του συμβολικού συστήματος και διαμορφώνοντας το σχετικό σημασιολογικό πλαίσιο. Με τον τρόπο αυτό σχηματίζονται οι βασικές δομές στον κύκλο της γνωστικής ανάπτυξης. Βασικός παράγοντας της αλληλεπίδρασης για τη δημιουργία των σχέσεων αυτών, είναι η επικοινωνία μεταξύ των εμπλεκομένων μελών της ομάδας, δηλαδή η επικοινωνία μεταξύ των μαθητών και των δασκάλων, καθώς και η επικοινωνία μεταξύ των μαθητών. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρει ο Steinberg (2000, σελ. 141), «ο κεντρικός μηχανισμός της επικοινωνίας συνίσταται στο ακόλουθο: η εκφορά (*conveyance, signifier*) (σημαίνον) του δασκάλου ή των

διαφόρων μαθητών, δεν περιέχουν ακόμη την πληροφορία (*information, signified*) (σημαινόμενο). Η διάκριση και κατά συνέπεια η συσχέτιση ανάμεσα στο σημαίνον και το σημαινόμενο, μπορεί να εγκαθιδρυθεί μόνο από την αλληλεπίδραση των συμμετεχόντων στην επικοινωνία των ατόμων. Σε διαφορετική περίπτωση δεν υπάρχει επικοινωνία».

Γνωστικές προσεγγίσεις

Εστιάζοντας περισσότερο στη μαθησιακή διαδικασία, καθώς και στην απόκτηση από τον μαθητή της ικανότητας για ουσιαστική μαθηματική σκέψη, βασική προϋπόθεση φαίνεται να είναι η εννοιολογική μάθηση στα μαθηματικά. Η εννοιολογική μάθηση και η εννοιολογική γνώση γενικότερα, δεν εστιάζουν στην απλή γνώση ορισμών, θεωρημάτων και στον επιτυχή χειρισμό των διαδικασιών. Κύριο μέλημα τους, είναι η κατανόηση των ποικίλων σχέσεων που συνδέουν τα διάφορα μέρη της πληροφορίας για τις διεργασίες (*process*) και τις έννοιες (*concept*). Με τον τρόπο αυτό, δημιουργείται ένα συνδεδεμένο δίκτυο, ένας ιστός σχέσεων ανάμεσα στη δράση (*action*) και την οντότητα (*entity*), ανάμεσα στη διεργασία και την έννοια. Υπάρχουν όμως και ανασταλτικοί παράγοντες στη διαδικασία της εννοιολογικής μάθησης. Η αφηρημένη φύση των μαθηματικών και η πολυπλοκότητα των σχέσεων μεταξύ των αντικειμένων, καθιστούν την κατάκτηση της εννοιολογικής κατανόησης μία επίπονη και δύσκολη διαδικασία για τους μαθητές (Gray & Tall, 1994, 2000, Hiebert & Lefevre, 1986 στο Gray & Tall, 1994).

Οι ερμηνευτικές θεωρίες για τη μετάβαση από τη διεργασία, στην έννοια, παράλληλα με τη διάκριση μεταξύ της δράσης και της οντότητας - ύπαρξης, παρέχουν στους ερευνητές τη δυνατότητα, να εστιάσουν την προσοχή τους, στις σχέσεις μεταξύ διεργασίας – έννοιας και δράσης – οντότητας και ως εκ τούτου στην εννοιολογική γνώση την ουσιαστική μάθηση και τη γνωστική ανάπτυξη στα μαθηματικά. Όπως αναφέρουν οι Gray & Tall, (2000), ο τρόπος με τον οποίο οι δυναμικές δράσεις, μετατρέπονται σε εννοιολογικές οντότητες έχει περιγραφεί με ποικίλους τρόπους από τους ερευνητές, ως εσωτερίκευση (*interiorisation*), συμπτύκνωση (*encapsulation*), υποστασιοποίηση (*reification*) κά..

Η θεωρία των τριών κόσμων και της διεργασίας-έννοιας

Για την περιγραφή της μαθηματικής σκέψης, η προσέγγιση του Tall (2004), διακρίνει τρεις διαφορετικούς «κόσμους», με κριτήριο τον τρόπο σκέψης και αντίληψης των αντικειμένων και των εννοιών. Αυτοί είναι, ο ενσαρκωμένος (*embodied*), ο διαδικασιοεννοιολογικός (*proceptual*) και ο τυπικός - αξιωματικός (*formal-axiomatic*) κόσμος. Ο ενσαρκωμένος κόσμος, βασίζεται στις αισθήσεις και την εμπειρία και αποτελεί τον αρχικό μαθηματικό τρόπο σκέψης για τα αντικείμενα του κόσμου που μας περιβάλλει, δημιουργώντας απλές αναπαραστάσεις. Ο δεύτερος αποτελεί το επόμενο στάδιο της εξέλιξης της μαθηματικής σκέψης και είναι ο διαδικασιοεννοιολογικός κόσμος. Ο κόσμος αυτός, είναι ο κόσμος στον οποίο συνδέεται η διαδικασία με την έννοια μέσω των μαθηματικών συμβόλων και συνυπάρχουν το «κάνω» μαθηματικά με το «σκέφτομαι» για αυτό που κάνω. Ο τυπικός κόσμος είναι το τρίτο στάδιο και είναι ο κόσμος στον οποίο, τα Μαθηματικά βασίζονται στις ιδιότητες των αντικειμένων, με την έννοια ότι έχοντας ως βάση ορισμένα αξιώματα και πρωταρχικές έννοιες, ορίζονται νέες έννοιες και αποδεικνύονται οι πρώτες μαθηματικές προτάσεις μέσα σε ένα τυπικό σύστημα μαθηματικών δομών.

Αναφορικά με τον κύκλο της μάθησης οι Gray & Tall (1994, 2000), αναπτύσσουν την ιδέα του σύνθετου όρου *procept*, για να περιγράψουν τη διεργασία (***process***) και την έννοια (***concept***) που συμπεκνώνονται ταυτόχρονα στη συμβολική μορφή ενός μαθηματικού αντικειμένου. Μία στοιχειώδης διεργασία-έννοια (*elementary procept*), είναι το αμάλγαμα από τρεις συνιστώσες: τη **διεργασία** με την οποία παράγεται το μαθηματικό **αντικείμενο** και το **σύμβολο** το οποίο χρησιμοποιείται για να αναπαραστήσει είτε τη διαδικασία είτε το αντικείμενο. Η διεργασία-έννοια (*procept*), συνίσταται από μία συλλογή στοιχειωδών διεργασιών-εννοιών (*elementary procepts*) οι οποίες έχουν το ίδιο αντικείμενο. Μέσα στον κύκλο της μάθησης, η διεργασία-έννοια, εμφανίζεται σαν το τρίτο στάδιο και είναι το αμάλγαμα που προκύπτει από τη διεργασία και την έννοια, αναπαρίσταται με συμβολικό τρόπο και ερμηνεύεται ανάλογα με το πλαίσιο στο οποίο απαντάται. Ο μαθητής μπορεί να χειριστεί τα σύμβολα, να σκεφτεί με αυτά, να τα εκφράσει προφορικά ή γραπτά να τα ακούσει και να τα δει. Έχει τη δυνατότητα να επικαλεστεί τις κατάλληλες διαδικασίες, για να φέρει σε πέρας εργασίες, με τον απαραίτητο

χειρισμό του συμβολικού συστήματος, πρώτα σε προσωπικό επίπεδο και αργότερα να το μοιραστεί με τους άλλους, στα πλαίσια της μαθηματικής επικοινωνίας. Μία ασυνέχεια που παρουσιάζεται κατά τη διάρκεια της μάθησης, καταδεικνύει τη διαφορά ανάμεσα στην εννοιολογική και τη διαδικαστική σκέψη (Tall, et al, 2001).

Η ισχύς που περιέχεται στο μαθηματικό συμβολισμό, περιγράφεται χαρακτηριστικά από τους Gray & Tall (1994, σελ. 1), ως εξής: «*The ambiguity of notation allows the successful thinker the flexibility in thought to move between the process to carry out a mathematical task and the concept to be mentally manipulated as part of a wider mental schema*». Το διφορούμενο νόημα του συμβολισμού, με βάση ορθούς συλλογισμούς, επιτρέπει μία ευελιξία στη σκέψη και τη μετακίνηση, ανάμεσα στην επιτέλεση της διαδικασίας ώστε να περατωθεί με επιτυχία μία δραστηριότητα και τον διανοητικό χειρισμό της έννοιας ως μέρος ενός ευρύτερου γνωστικού σχήματος.

Η θεωρία της υποστασιοποίησης

Μία διαφορετική προσέγγιση παρουσιάζεται από την Sfard (1991), σύμφωνα με την οποία είναι αναγκαία, η διάκριση της εξέλιξης μιας μαθηματικής ιδέας (*notion*) σε δύο στάδια, το λειτουργικό (*operational*) και το δομικό (*structural*). Η διάταξη των σταδίων αυτών είναι αυστηρά ιεραρχική από το επίπεδο της λειτουργίας στο επίπεδο της δομής. Η λειτουργική σύλληψη μίας ιδέας «*αφορά σε διαδικασίες, αλγόριθμους και δράσεις και όχι στην αντίληψη του ίδιου του αντικείμενου*» (σελ. 4). Μεταξύ των δύο αυτών σταδίων, υπάρχει ένα μεγάλο οντολογικό κενό (*deep ontological gap*) (σελ. 4). Σύμφωνα με την προσέγγιση αυτήν, μία μαθηματική ιδέα, κατανοείται ως διαδικασία σε ένα αρχικό στάδιο και στη συνέχεια στο επόμενο στάδιο, ως αντικείμενο. Παράλληλα, είναι σημαντικό να τονιστεί ότι, οι όροι «*διαδικασία*» και «*αντικείμενο*» πρέπει να γίνουν κατανοητοί εδώ ως διαφορετικές όψεις του ίδιου πράγματος και όχι ως τελείως διακριτά, ξεχωριστά συστατικά του μαθηματικού κόσμου. Με άλλα λόγια, ο λειτουργικός και δομικός τρόπος σκέψης, μολονότι είναι φαινομενικά ασυμβίβαστοι, στην πραγματικότητα δρουν συμπληρωματικά.

Η διπλή αυτή φύση των μαθηματικών αντικείμενων, μπορεί να παρατηρηθεί όχι μόνο στη λεκτική εκφορά τους αλλά και στις συμβολικές αναπαραστάσεις με

διάφορους τρόπους. Η οντολογική δυϊκότητα των μαθηματικών εννοιών υπονοείται στη γλώσσα που χρησιμοποιεί ο μαθηματικός και στον τρόπο που μεταχειρίζεται πρακτικά τις έννοιες και τα σύμβολα. Έτσι το ίδιο σύμβολο μπορεί να ειπωθεί και να ερμηνευθεί τόσο σε λειτουργικό όσο και σε δομικό επίπεδο.

Για τον κύκλο της μαθησιακής διαδικασίας η Sfard (1991) σημειώνει τρεις φάσεις διαδικασιών: (α) την εσωτερίκευση (*interiorisation*) της διαδικασίας, (β) τη συμπύκνωση (*condensation*) ως μία συμπιεσμένη διαδοχή λειτουργιών σε ένα όλον και (γ) την υποστασιοποίηση (*reification*), η οποία φανερώνει μία ποιοτική αλλαγή από τον λειτουργικό (*operational*) τρόπο σκέψης, ο οποίος εστιάζει σε μαθηματικές διαδικασίες, στον δομικό (*structural*) τρόπο σκέψης, με χαρακτηριστικά την αντίληψη των ιδιοτήτων και των σχέσεων μεταξύ των μαθηματικών αντικειμένων.

Η βασικότερη φάση της μάθησης για την Sfard, (1992) είναι η υποστασιοποίηση. Η φάση αυτή περιλαμβάνει τη διαδικασία κατά την οποία ο μαθητής αρχίζει να αντιλαμβάνεται μία μαθηματική έννοια, ως ένα πλήρες αντικείμενο με τα δικά του χαρακτηριστικά. Η συμπύκνωση και η υποστασιοποίηση μπορεί να συγχέονται και να φαίνονται ως ίδια στάδια, όμως υπάρχει μια λεπτή διαφορά ανάμεσά τους. Συμπύκνωση σημαίνει μια μάλλον τεχνική αλλαγή προσέγγισης, η οποία εκφράζεται σαν δυνατότητα να ασχολούμαστε με μια δεδομένη διαδικασία με όρους εισόδου και εξόδου, δίχως αναγκαστικά να λαμβάνουμε υπόψη τα βήματα από τα οποία αποτελείται. Η χρήση των συμβόλων σε αυτή τη φάση, μπορεί να γίνεται χωρίς την απόδοση νοήματος σε κάθε βήμα. Αναμένεται, η υποστασιοποίηση να είναι το επόμενο βήμα, καθώς στο μυαλό του μαθητή, μετατρέπεται η ήδη συμπυκνωμένη διαδικασία, σε μια οντότητα που μοιάζει με αντικείμενο. Με άλλα λόγια, ενώ η συμπύκνωση είναι μια βαθμιαία ποσοτική αλλαγή, η υποστασιοποίηση θα πρέπει να γίνει κατανοητή ως απότομο ποιοτικό άλμα στον τρόπο θεώρησης των πραγμάτων, μια οντολογική μετατόπιση συγκρίσιμη με μια μετάβαση από ένα επιστημονικό παράδειγμα σε ένα άλλο. Το σύμβολο σε αυτή τη φάση, περικλείει τόσο τα λειτουργικά όσο και τα δομικά χαρακτηριστικά της έννοιας. Επιπλέον, το γεγονός ότι μια διαδικασία έχει εσωτερικευτεί και συμπυκνωθεί σε μια συμπαγή αυτόνομη οντότητα, δε σημαίνει, ότι κάποιος έχει αποκτήσει την ικανότητα να σκέφτεται γι' αυτήν με δομικό τρόπο. Δίχως την υποστασιοποίηση, η προσέγγισή του, θα παραμείνει καθαρά διαδικαστική και η

εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών αντικειμένων θα έχει αποτύχει (Sfard, 1995, 1992)

Η θεωρία της εννοιολογικής αλλαγής

Μία διαφορετική θεωρία, σύμφωνα με την οποία, είναι αναγκαίο να ερμηνευτούν οι δυσκολίες που χαρακτηρίζουν κάθε μαθησιακή κατάσταση, όταν νέες πληροφορίες είναι ασύμβατες με τις υπάρχουσες προϋποθέσεις και πεποιθήσεις του ατόμου, δημιουργώντας συγκρούσεις, που μπορούν να οδηγήσουν σε αναδιοργάνωση της ήδη υπάρχουσας γνώσης ή στον εμπλουτισμό της, αναφέρεται από τους Vosniadou & Verschaffel, (2004), ως θεωρία της εννοιολογικής αλλαγής. Η θεωρία, αυτή, έχει αρχίσει τα τελευταία χρόνια, να χρησιμοποιείται για να ερμηνεύσει δυσκολίες στη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών. Για παράδειγμα, έρευνες αναφέρονται στις δυσκολίες των μαθητών σχετικά με την έννοια του αριθμού και τη μετάβαση από ένα σύνολο σε άλλο, την έννοια του απείρου, της εφαπτομένης καμπύλης κλπ. Τα σύμβολα στη διαδικασία της μάθησης, καλούνται πολλές φορές να παίξουν ένα καινούριο ρόλο, διαφορετικό από αυτό που ήταν ήδη γνωστός στους μαθητές, τόσο σε λειτουργικό όσο και σε δομικό επίπεδο. Κάτι τέτοιο, κάτω από το πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής, λαμβάνεται υπόψη από τους ερευνητές, καθώς διαχωρίζεται το νόημα και η λειτουργία του ίδιου συμβόλου στα διαφορετικά πλαίσια και αναλύεται η χρήση που γίνεται από τους μαθητές (Vlassis, 2004).

Ανάλυση με βάση το νόημα των συμβόλων

Η οπτική για τη δημιουργία νοήματος από το μαθηματικό συμβολισμό, η οποία παρουσιάζεται από τον Arcavi (1994, 2005), αναφέρεται στη διαδικασία της μάθησης με άμεσο τρόπο, θέτοντας την ιδέα του νοήματος των συμβόλων (*symbol sense*), σαν έναν επιθυμητό στόχο για τη μαθηματική εκπαίδευση. Η ιδέα αυτή αναλύεται με βάση συμπεριφορές (*behavior*), αναδεικνύοντας διαφορετικούς παράγοντες, που περιγράφουν τη λειτουργία και το νόημα των συμβόλων, μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα των σχολικών μαθηματικών. Κάποιοι από τους παράγοντες αυτούς αναγνωρίζονται στην συμπεριφορά των ατόμων τα οποία

(α) έχουν την ικανότητα να εκτιμούν τη δύναμη και την ισχύ των συμβόλων, με σκοπό να παρέχουν σχέσεις, γενικεύσεις και αποδείξεις, οι οποίες κάτω από άλλες συνθήκες είναι αθέατες,

(β) εγκαταλείπουν τα σύμβολα για να υιοθετήσουν μία διαφορετική, πιο αποτελεσματική προσέγγιση, με σκοπό να βρεθεί μία ευκολότερη λύση ή αναπαράσταση,

(γ) χειρίζονται και ερμηνεύουν συμβολικές εκφράσεις ως δύο συμπληρωματικές όψεις της ίδιας διαδικασίας. Και αυτό γιατί, από τη μία ο χειρισμός των συμβόλων σε καθαρά συντακτικό επίπεδο διευκολύνει και επιταχύνει τη διαδικασία υπολογισμού και από την άλλη η απόδοση νοήματος στα σύμβολα προσθέτει πολλά επίπεδα συσχετισμού και λογική στα αποτελέσματα,

(δ) κατασκευάζουν με επιτυχία συμβολικές σχέσεις που εκφράζουν τις λεκτικές ή γραφικές πληροφορίες, θεωρώντας το ανάλογο πλαίσιο και έχουν τη δυνατότητα να αναγνωρίζουν την καταλληλότητα ή μη της συγκεκριμένης έκφρασης. Όποτε κρίνεται απαραίτητο μπορούν να παρουσιάσουν εναλλακτική επιλογή,

(ε) αναγνωρίζουν το διαφορετικό ρόλο που καλούνται να παίξουν τα σύμβολα σε διαφορετικά περικείμενα πλαίσια και κατανοούν τις διαφορετικές χρήσεις και ερμηνείες που παρουσιάζονται σε αυτά.

Παράλληλα με τους παράγοντες που αναδεικνύονται από τις συμπεριφορές και την ερμηνεία των συμβόλων, ο Arcavi (1994) προτείνει, τη σύνδεση του όρου «*νόημα των συμβόλων*» με τη διδασκαλία των μαθηματικών. Το νόημα των συμβόλων φαίνεται να είναι η αλγεβρική συνιστώσα σε ένα ευρύτερο τομέα μαθηματικής εκπαίδευσης, ο οποίος δημιουργεί νόημα στα μαθηματικά και με τα μαθηματικά, όπως αυτό παρουσιάζεται ως βασικός στόχος στις αρχές πολλών εκπαιδευτικών προγραμμάτων.

4.3 Ο ρόλος των συμβόλων στη μαθησιακή διαδικασία

Τα μαθηματικά όπως τα γνωρίζουμε σήμερα θα ήταν αδιανόητα χωρίς ένα καλό σύστημα συμβολισμού, το οποίο συμβάλλει αποτελεσματικά στη σήμανση μιας έννοιας και στην περιγραφή μιας διαδικασίας με ακρίβεια, σαφήνεια και συντομία. Ο μαθηματικός συμβολισμός είναι ένα εκπληκτικό και ισχυρό εργαλείο, του οποίου η μάθηση είναι μια δύσκολη και περίπλοκη διαδικασία (*it is subtle and difficult to learn*) (Davis & Hersh, 1981, Schoenfeld & Arcavi, 1988). Απαιτεί αφαιρετικό τρόπο σκέψης και αποπλαισίωση των εκφράσεων. Πολλοί είναι αυτοί που αποδέχονται την ιδέα πως τα μαθηματικά θεωρούνται από τους εκπαιδευόμενους μία καινούρια γλώσσα. Η πρώτη επαφή των παιδιών με τη γλώσσα των μαθηματικών, γίνεται με φράσεις όπως για παράδειγμα «πόσο κάνει ένα και δύο», οι οποίες δεν αναφέρονται σε συγκεκριμένα αντικείμενα ή γεγονότα. Αυτό είναι που κάνει την αριθμητική ένα τόσο ισχυρό εργαλείο, αλλά ταυτόχρονα και πηγή πολλών δυσκολιών για τα μικρά παιδιά. Στη συνέχεια και σε όλη την έκταση των σχολικών μαθηματικών, οι όροι και οι παραστάσεις του τυπικού συμβολισμού, έχουν τόσο τυπικές όσο και αναφορικές λειτουργίες με παρόμοιες συνέπειες στη μαθησιακή διαδικασία (Hughes, 1992, 1996).

Η μετάβαση από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο και αντίστροφα, είναι μία διαρκής διαδικασία «μετάφρασης» και αποτελεί απόδειξη της κατανόησης της σημασίας και της χρήσης του συμβολισμού. Για παράδειγμα, οι μαθηματικοί κατανοούν εύκολα την έννοια της μεταβλητής από τον αντίστοιχο συμβολισμό σε πολλά και διαφορετικά πλαίσια. Αντίθετα οι μαθητές αντιμετωπίζουν σοβαρές δυσκολίες στη σχολική άλγεβρα με την κατανόηση της έννοιας αυτής, λόγω των πολλαπλών νοημάτων της και της απαιτούμενης ακρίβειας στη σήμανση και το χειρισμό (Schoenfeld & Arcavi, 1988).

Η συμπυκνωμένη δύναμη - ισχύ του συμβόλου απαιτεί από τους μαθητές ιδιαίτερες προσπάθειες σε διαφορετικά επίπεδα, όπως αυτά έχουν περιγραφεί στις θεωρίες οι οποίες αναφέρθηκαν. Πολλές είναι οι παρατηρούμενες περιπτώσεις, στις οποίες ο μαθηματικός συμβολισμός ευθύνεται τόσο για μία επιτυχημένη επικοινωνία όσο και για τη δυσκολία σε αυτήν. Η επικοινωνία στο μαθησιακό περιβάλλον, είναι

βασικός παράγοντας της μαθησιακής διαδικασίας και ο ρόλος του συμβόλου ως φορέας διαφορετικών νοημάτων είναι καθοριστικός και πολύπλοκος (Tall, 1994).

Η θεωρία της εννοιολογικής αλλαγής

Η έννοια των αρνητικών αριθμών ιστορικά, άργησε να γίνει αποδεκτή, ακόμη και από αξιόλογους μαθηματικούς της εκάστοτε εποχής. Η έννοια αυτή, η οποία εισάγεται στις πρώτες τάξεις του γυμνασίου, παρουσιάζει στη συνέχεια αρκετή δυσκολία για τους μαθητές, αφού απαιτείται να αποδίδουν στο σύμβολο «-» διαφορετικά νοήματα και λειτουργίες, ανάλογα με το περικείμενο πλαίσιο και τη διαδικασία στην οποία απαντάται. Γίνεται ουσιαστικά, σύμφωνα με τον Vlassis (2004), ο διαχωρισμός σε δομικό σημαίνον (*structural signifier*), όπου το σύμβολο εμφανίζεται σε προτάσεις σχετικές με μία μαθηματική δομή-αντικείμενο και σε λειτουργικό σημαίνον (*operational signifier*), όπου το σύμβολο εξυπηρετεί συγκεκριμένη λειτουργία. Το σύμβολο του μείον, παρουσιάζεται σε βασικές αλγεβρικές πράξεις με τριπλή φύση. Οι λειτουργίες που καλείται να αναγνωρίσει και να χρησιμοποιήσει ο μαθητής για το σύμβολο «-» είναι σύμφωνα με τον Vlassis (2004) οι εξής:

(α) η μοναδιαία, ως δομικό σημαίνον, όπου εκφράζει τον αφαιρετέο, το πρόσημο για τον αρνητικό αριθμό, τον αντίθετο αριθμό, τη σχετική θέση του αριθμού καθώς και την τυπική έννοια των αρνητικών,

(β) η δυαδική ως λειτουργικό σημαίνον, για να δηλώσει συμπλήρωση, μεταβολή, διαδικασία αφαίρεσης, κίνηση πάνω στον άξονα των πραγματικών και

(γ) η συμμετρική, ως λειτουργικό σημαίνον, για να δηλώσει μία συμμετρική διαδικασία αντίθετη ή αντίστροφη.

Στα συμπεράσματα της έρευνας σχετικά με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με τη χρήση και την κατανόηση των αρνητικών αριθμών σε απλές πολυωνυμικές παραστάσεις, σύμφωνα με τη θεωρία της εννοιολογικής αλλαγής, αναφέρεται ότι, υπάρχει σύγκρουση με την προηγούμενη γνώση και εμπειρία, η οποία είναι βασισμένη στους φυσικούς αριθμούς. Επιπλέον, κανείς μαθητής δεν σκέφτεται ρητά τη διπλή ιδιότητα του συμβόλου «-», όταν αυτό βρίσκεται ανάμεσα σε όμοιους ή ανόμοιους όρους ενός πολυωνύμου δηλαδή δεν γίνεται ρητή αναφορά στη διπλή μορφή του συμβόλου ως μοναδιαίου και ως δυαδικού τελεστή. Κάτι τέτοιο

συνδέεται, με την έλλειψη αποτελεσματικής επικοινωνίας στη σχολική τάξη και με συγκεκριμένους μετά-κανόνες που δημιουργεί το παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας (Vlassis, 2004).

Η θεωρία της υποστασιοποίησης

Παράλληλα, αρκετά παραδείγματα αναφέρονται από την Sfard (1991, 1992, 1994), για να τεκμηριώσουν την άποψη, ότι πολλές μαθηματικές έννοιες έχουν συλληφθεί λειτουργικά, πολύ πριν δοθούν δομικοί ορισμοί και αναπαραστάσεις. Για παράδειγμα, για την έννοια της συνάρτησης υπήρξαν ιστορικά πολλές δυσκολίες και συζητήσεις, ώστε να πραγματοποιηθεί η μετάβαση από τη λειτουργική θεώρηση της συνάρτησης ως μία διαδικασία, στη δομική αντίληψη της έννοιας με πολλές και διαφορετικές ιδέες και τον αυστηρό ορισμό της. Κάτι αντίστοιχο, συμβαίνει και κατά τη διδασκαλία της συνάρτησης σε μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, όπου αρχικά παρουσιάζεται και κατανοείται, ως μια λειτουργία ανάμεσα σε δύο ποσότητες και αργότερα με δομική προσέγγιση, ως μία αντιστοίχιση ανάμεσα σε δύο σύνολα. Φαίνεται προφανές, ότι αυτή η δομική προσέγγιση, μπορεί να αποτελέσει πηγή σοβαρών δυσκολιών για τους μαθητές που δεν είναι ικανοί να δημιουργήσουν για τους ίδιους αυτά τα αφηρημένα αντικείμενα, για τα οποία ο διδάσκοντας μιλάει με απόλυτη βεβαιότητα. Έχει όμως παρατηρηθεί, ότι οι προσπάθειες για υποστασιοποίηση της έννοιας της συνάρτησης μέσα από γραφήματα, πίνακες τιμών και άλλες μορφές αναπαράστασης βοήθησαν ιδιαίτερα τη διαδικασία αυτή (Sfard, 1992).

Ένα άλλο παράδειγμα μαθηματικού αντικειμένου, το οποίο προκάλεσε πληθώρα συζητήσεων και αμφισβητήσεων, είναι αυτό της μεταβλητής. Οι μεταβλητές, από απλά σύμβολα για την παράσταση απροσδιόριστου – γενικευμένου αριθμού ή σύμβολα συνδεδεμένα με την αριθμητική και την ανάλυση, τα οποία χρησιμοποιούνται μόνο με διαδικαστικό τρόπο, γίνονται αντιληπτές ως αφηρημένα αντικείμενα, σύμβολα κενά περιεχομένου και δομικά στοιχεία ενός συνόλου. Οι μαθητές πολλές φορές δυσκολεύονται να αποκτήσουν τη δομική αντίληψη για τη μεταβλητή, να ολοκληρώσουν δηλαδή το τρίτο στάδιο της υποστασιοποίησης, ενώ μπορούν να φέρουν σε πέρας εργασίες που απαιτείται, μόνο διαδικαστική επιτέλεση

πράξεων με τις μεταβλητές, η οποία υπόκειται σε συγκεκριμένους συντακτικούς κανόνες (Sfard, 1994, 1995).

Η Sfard (1991), παρουσιάζει τη διπλή φύση των μαθηματικών αντικείμενων, που μπορεί να παρατηρηθεί όχι μόνο στη λεκτική εκφορά τους, αλλά και με διάφορους τρόπους στις συμβολικές αναπαραστάσεις (Πίνακας 5).

Αναπαράσταση	Δομική αντίληψη	Λειτουργική αντίληψη
Συνάρτηση	Σύνολο από διατεταγμένα ζεύγη (Bourbaki, 1934)	Υπολογιστική διαδικασία ή Καλά ορισμένη μέθοδος για τη μετάβαση από ένα σύστημα σε ένα άλλο (Skemp, 1971)
Φυσικός αριθμός	Η ιδιότητα του συνόλου Property of a set or the class of all sets of the same finite cardinality	Το 0 και κάθε αριθμός που προέρχεται από έναν άλλο φυσικό με πρόσθεση του 1
Ρητός αριθμός	Ζεύγος ακεραίων ή στοιχείο συνόλου ζευγών ακεραίων	Το αποτέλεσμα από τη διαίρεση δύο ακεραίων

Πίνακας 5. Η δομική και η λειτουργική περιγραφή μίας μαθηματικής ιδέας (Sfard, 1991).

Σχετικά με τα στάδια της διδασκαλίας η Sfard (1992), ισχυρίζεται ότι είναι απαραίτητο, η λειτουργική προσέγγιση να προηγείται της δομικής προσέγγισης, ως ένα φυσικό, υγιές και αποδοτικό αρχικό στάδιο σε μία διδασκαλία. Επιπλέον, αναφέρει δύο βασικές αρχές για να αποφευχθούν αρνητικές συνέπειες από τη δομική προσέγγιση. Οι αρχές αυτές είναι: (α) Οι νέες έννοιες δε θα πρέπει να εισάγονται με δομικούς όρους και (β) Η δομική αντίληψη δε θα πρέπει να απαιτείται, όσο ο μαθητής μπορεί να κάνει και χωρίς αυτήν. Επιπλέον, η Sfard (2000), όπως αναφέρεται από τον Ford (2003), δηλώνει πως η ανεπτυγμένη κατανόηση της σημασίας του συμβόλου και η ορθή χρήση του, είναι αμοιβαία εποικοδομητικά στοιχεία της δύναμης του συμβόλου. Κάτω από αυτήν την οπτική, το πρόβλημα για τους εκπαιδευτές, είναι να οργανώσουν και να διευκολύνουν την εύκολη μετακίνηση ανάμεσα στη σημασία και το σύμβολο.

Πολύ συχνά, οι εστιασμένες προσπάθειες για υποστασιοποίηση ενός μαθηματικού αντικειμένου μπορεί να μην είναι απόλυτα πετυχημένες, βοηθούν όμως στην εσωτερίκευση και τη συμπύκνωση της έννοιας. Το επόμενο βήμα, ίσως απαιτεί περισσότερο χρόνο (*χρόνος εκκόλαψης*) και ισχυρότερο κίνητρο. Σε κάθε περίπτωση όμως, η ανάπτυξη δομικών αντιλήψεων και η υποστασιοποίηση μαθηματικών αντικειμένων, κρίνεται απαραίτητη για την περαιτέρω μάθηση, για την κατανόηση πιο πολύπλοκων εννοιών. Για παράδειγμα, η έννοια της συνάρτησης, των συνόλων κá είναι απαραίτητο να έχουν υποστασιοποιηθεί, όταν θα χρειαστεί αυτά τα αντικείμενα να βοηθήσουν στην εσωτερίκευση και τη συμπύκνωση νέων πιο πολύπλοκων αντικειμένων, όπως για παράδειγμα των χώρων Hilbert (Sfard, 1992).

Η θεωρία των τριών κόσμων και της διεργασίας-έννοιας

Η γενικευμένη χρήση συμβόλων στη μαθηματική εκπαίδευση, σε όλους σχεδόν τους τομείς των μαθηματικών, (την αριθμητική την άλγεβρα τον λογισμό) δίνει με πολύ απλό τρόπο στο μαθητή τη δυνατότητα για υπολογισμούς, επίλυση προβλήματος, εικασίες και προβλέψεις. Η κεντρική θέση της λογικής ισχύος ενός συμβόλου, σύμφωνα με τον Tall et al. (2001), συμπυκνώνεται στη ερμηνεία του συμβόλου τόσο ως διεργασία όσο και ως έννοια (Πίνακας 6).

Σύμβολο	Διεργασία (process)	Έννοια (concept)
4	Αρίθμηση	Αριθμός
3+2	Πρόσθεση	Άθροισμα
-3	Αφαιρώ 3	Αρνητικός αριθμός
3/4	Μερισμός, διαίρεση	Κλάσμα
3+2x	Αποτίμηση	Έκφραση
$v=s/t$	Λόγος	Ρυθμός
$y=f(x)$	Υπολογισμός τιμής	Συνάρτηση
dy/dx	Παραγωγή	Παράγωγος
$\int f(x)dx$	Ολοκλήρωση	Ολοκλήρωμα

Πίνακας 6. Η ερμηνεία του συμβόλου ως διεργασία και ως έννοια (Tall et al., 2001).

Ο δυϊσμός του συμβόλου, οδηγεί πολλές φορές μία διαδικασία, σε έναν βήμα προς βήμα αλγόριθμο με σύμβολα χωρίς νόημα, οδηγώντας τη διαδικασία στο αποτέλεσμα, χωρίς την προσοχή που θα ήταν απαραίτητη, ώστε να κατανοείται το αναφορικό νόημα των συμβόλων σε κάθε βήμα της διαδικασίας (Tall et al., 2001). Κάτι τέτοιο, δηλώνει ένα καλό επίπεδο διαδικαστικής σκέψης και κατανόησης, χωρίς όμως να πιστοποιεί την εννοιολογική κατανόηση του μαθηματικού αντικειμένου. Η κατάκτηση του διαδικαστικού και του εννοιολογικού τρόπου σκέψης για έναν μαθητή, χαρακτηρίζεται από την ικανότητα του να χειρίζεται τον μαθηματικό συμβολισμό με ευελιξία, τόσο ως διαδικασία, όσο και ως έννοια. Επιπλέον, απαιτεί από τον μαθητή την εύκολη μετάβαση από τη διαδικασία στην έννοια και αντίστροφα, έναν παράγοντα που συντελεί στην ανάπτυξη δεξιοτήτων του μαθητή, και του επιτρέπει να «κάνει» μαθηματικά, να λύνει προβλήματα κλπ. αλλά ταυτόχρονα να σκέφτεται τις μαθηματικές σχέσεις, ώστε να επιλέγει τον ιδανικό τρόπο για την εύρεση λύσης. Αναπτύσσεται παράλληλα, η ικανότητα για άμεση αλλαγή από τη θεώρηση των συμβόλων από απλά χρηστικές οντότητες, σε εργαλεία που θα οδηγήσουν τον μαθητή να κάνει μαθηματικά, παράγοντας λύσεις μέσα από διαδρομή διαδικασιοεννοιολογικής σκέψης (*proceptual thinking*) (Tall et al., 2001, Gray & Tall 1994).

Ανάλυση με βάση το νόημα των συμβόλων

Η μελέτη και οι έρευνες που παρουσιάζονται από τον Arcavi (1994, 2005), κάτω από το πρίσμα της ανάλυσης με βάση το νόημα των συμβόλων, στοιχεία της οποίας έχουν αναφερθεί στην προηγούμενη παράγραφο, βασίζονται κυρίως στην εμπειρία και τα γεγονότα που καταγράφουν καθηγητές, από σχολικές τάξεις. Το νόημα των συμβόλων, το οποίο γίνεται αντιληπτό ή αποδίδεται από τους μαθητές, γίνεται φανερό, από ένα πλήθος διαφορετικών συμπεριφορών. Μερικά ενδεικτικά παραδείγματα, επιβεβαιώνουν τον κεντρικό ρόλο της γενικότερης αίσθησης που βρίσκεται στον όρο «νόημα των συμβόλων-symbol sense» ή στο τίτλο «Άτυπη δημιουργία νοήματος σε τυπικά μαθηματικά - *Informal sense-making in formal mathematics*».

(α) στην ερώτηση «ποια μεταβολή θα υπάρξει στο εμβαδόν ενός ορθογωνίου αν μία διάσταση αυξηθεί κατά 10% ενώ η άλλη ελαττωθεί κατά 10%;», η εξοικείωση με

τη χρήση των συμβόλων, μετατρέπει τη λεκτική εκφορά της λύσης, σε συμβολική και παράλληλα, ξεδιαλύνει τις αμφιβολίες στην απάντηση, δίνοντας ως αποτέλεσμα το νέο εμβαδόν 0,99αβ.

(β) η ερώτηση, «για ποιες τιμές του a το ζευγάρι των εξισώσεων (α) $x^2 - y^2 = 0$ και (β) $(x-a)^2 + y^2 = 1$ έχουν 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ή 8 λύσεις;», είναι ένα παράδειγμα, που εξηγεί την ανάγκη εγκατάλειψης του αλγεβρικού χειρισμού των συμβόλων και την υιοθέτηση της γραφικής μεθόδου, η οποία στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι πιο αποτελεσματική.

(γ) η επίλυση της εξίσωσης $3x+5=4x$, χωρίς την προτεινόμενη αναγωγή ομοίων όρων, αλλά με την απόδοση νοήματος στην ισότητα και με την ερμηνεία της πρόσθεσης ή η απόφαση για το αδύνατο της εξίσωσης $\frac{2x+1}{4x+2}=2$ λόγω της αναγνώρισης της σχέσης του αριθμητή με τον παρονομαστή $(4x+2)=2(2x+1)$, φανερώνει την ικανότητα του μαθητή, να βλέπει πέρα από τα σύμβολα και να αποδίδει σε αυτά, έγκαιρα το αντίστοιχο νόημα στο πλαίσιο της αριθμητικής.

(δ) η προτίμηση της αναπαράστασης τριών διαδοχικών φυσικών αριθμών ως « $n-1$, n , $n+1$ » αντί της « n , $n+1$, $n+2$ » ή της « $n-2$, $n-1$, n », κάνει φανερή την ορθή αντίληψη της επιλογής μέσα από ένα πλήθος ισοδύναμων εκφράσεων, της αποδοτικότερης παράστασης και συνεπώς γίνεται αντιληπτό από τον μαθητή το ότι, η διαδικασία διευκολύνεται από την επιλογή των συμβόλων.

(ε) ο διαχωρισμός σε δύο διαφορετικά αντικείμενα, του αποτελέσματος $y=b$ που προκύπτει, για $x=0$ το ένα και για $m=0$ το άλλο από την εξίσωση $y=mx+b$, δείχνει την απόδοση νοήματος σε σύμβολα και την κατανόηση των διαφορετικών αντικειμένων που προκύπτουν, ανάλογα με τις σχέσεις τους μέσα στο πλαίσιο που αναφέρονται.

Παράλληλα με τους παράγοντες που καθιστούν την απόδοση νοήματος στα σύμβολα, απαραίτητο στοιχείο της εκπαιδευτικής πρακτικής, ο Arcavi (1994) εστιάζει την προσοχή του, στις ευέλικτες και ουσιαστικές μεταβάσεις από τις μαθηματικές κατασκευές φορμαλιστικού χαρακτήρα, στα αντικείμενα με νόημα και αναφορά, αναγνωρίζοντας ότι εκεί βρίσκεται ο πυρήνας της ικανότητας στη σχολική άλγεβρα. Η ικανότητα αυτή, περιλαμβάνει την έγκαιρη αναβολή του νοήματος, με σκοπό τη γρήγορη και αποτελεσματική εφαρμογή της διαδικασίας, καθώς και τη διακοπή της ρουτίνας, με σκοπό την αμφισβήτηση της εννοιολογικής ορθότητας της

συμβολικής έκφρασης. Επιπλέον, ο Arcavi (2005), αναφέρει τη θέση της Sfard (2000) για τη κυκλική εναλλαγή νοήματος και χρήσης για το μαθηματικό συμβολισμό, όπου το νόημα είναι συνάρτηση της χρήσης και η χρήση είναι αποτέλεσμα της ορθής κατανόησης του νοήματος. Αυτή η διαδικασία μπορεί να αποδειχθεί κάποιες φορές σοβαρό εμπόδιο (*serious tramp*) για τους μαθητές αλλά παράλληλα, φαίνεται να λειτουργεί ως καύσιμο στη μαθησιακή διαδικασία. Για μία διδασκαλία, η οποία θα αναδεικνύει τη δημιουργία νοήματος από τα σύμβολα, ο Arcavi (2005), προτείνει στους εκπαιδευτές, να επιδιώκουν την εξοικείωση των μαθητών με την απόδοση νοήματος στη συμβολική αναπαράσταση, παράλληλα με την αυτοματοποιημένη χρήση του τυπικού συμβολικού συστήματος, καθώς και την ισχυροποίηση της αντίληψής τους, για το αναμενόμενο κέρδος από τη χρήση συμβόλων.

4.4 Στοιχεία ιστορίας για τη διδασκαλία και τη μάθηση

Η ιστορία των μαθηματικών μπορεί να υποστηρίξει τη διαδικασία της μάθησης και της διδασκαλίας με πολλούς και διαφορετικούς τρόπους. Η αξιοποίηση της αποτελεί στόχο των προγραμμάτων σπουδών, καθώς παράλληλα με την παρουσίαση της ιστορίας και εξέλιξης βασικών μαθηματικών περιοχών και εννοιών, αναδεικνύει τη διασύνδεση της μαθηματικής σκέψης και του πολιτισμού στις ανθρώπινες κοινωνίες (NCTM, 2004). Όπως αναφέρει ο Τοκμακίδης (1989), η ιστορία των μαθηματικών, συμβάλλει στο να ερμηνευτούν καλύτερα οι καταστάσεις στις οποίες εισάγονται οι νέες έννοιες, να τονιστεί η σημασία των πιθανών πρακτικών εφαρμογών, να ξεπεραστούν οι κίνδυνοι δογματικότητας στην εισαγωγή νέων εννοιών, και να καταδείξει με σαφή και συγκεκριμένο τρόπο, την πρόοδο των μαθηματικών καθώς και την αλληλεπίδραση τους με άλλα κοινωνικά φαινόμενα.

Παράλληλα με την αναγκαιότητα εισαγωγής μίας έννοιας, η μελέτη της ιστορικής εξέλιξής της, αποκαλύπτει στον ερευνητή - μελετητή, τη διαδρομή που ακολούθησαν οι προγενέστεροι, τα εμπόδια που χρειάστηκε να υπερπηδήσουν, τις διαφορετικές θεωρήσεις που έγιναν, τη συμβολή συγκεκριμένων εργαλείων και άλλες παραμέτρους, που επηρέασαν την ανάπτυξη της έννοιας αυτής. Με τον τρόπο αυτό γίνονται φανερά, σημαντικά στοιχεία σχετικά με τη διδασκαλία και την κατανόηση της έννοιας, όπως για παράδειγμα, η ανίχνευση και υπερπήδηση επιστημολογικών εμποδίων, η αναζήτηση μηχανισμών που οδήγησαν στην ανάπτυξή της κά. Η Sfard (1995), αναφέρει ότι, είναι δυνατόν να παρατηρηθούν παρόμοια φαινόμενα στην ιστορική εξέλιξη μίας έννοιας και στην ατομική κατασκευή της γνώσης για την έννοια αυτή. Για παράδειγμα η έννοια του αριθμού, της μεταβλητής και της συνάρτησης, γίνονται αντιληπτοί από τους μαθητές, αρχικά στο λειτουργικό επίπεδο και στη συνέχεια κατανοούνται σε δομικό επίπεδο. Παρόμοια, ήταν και η ιστορική εξέλιξη των εννοιών αυτών, όπου η αυστηρή θεμελίωσή τους, ακολούθησε την για χρόνια λειτουργική αντιμετώπιση των εννοιών αυτών.

Επιπλέον, η μελέτη της ιστορίας των μαθηματικών από τους διδάσκοντες, παρέχει οφέλη σε πολλά και διαφορετικά επίπεδα, τα οποία αντανακλώνται στο επιστημονικό τους υπόβαθρο και κατά συνέπεια στη διδασκαλία τους. Έρευνες για τη συμβολή και τη σημαντικότητα κάποιων σκοπών που επιτελεί η ενασχόληση με την

ιστορία των μαθηματικών για τους καθηγητές, κατέληξαν σε σημαντικά συμπεράσματα. Συγκεκριμένα, σύμφωνα με τους Arcavi, Bruckheimer και Ben-Zvi (1982, 1987), οι καθηγητές με τη μελέτη θεμάτων της ιστορίας των μαθηματικών, είναι δυνατόν, να προάγουν τη μαθηματική τους γνώση και να εμπλουτίσουν το διδακτικό τους υπόβαθρο, να γνωρίσουν στοιχεία σχετικά με την ιστορική εξέλιξη μίας έννοιας και να προβληματιστούν για τη διδασκαλία της, να συζητήσουν ένα θέμα με ενδιαφέρον τρόπο και να προκαλέσουν κινητοποίηση στους συνομιλητές τους, να μάθουν για τους μεγάλους μαθηματικούς και τη δουλειά τους και να «διασκεδάζουν» κάνοντας μαθηματικά.

Είναι φανερό ότι, τόσο για τους μαθητές όσο και για τους καθηγητές, η γνώση και η αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών, καθίσταται σημαντικό στοιχείο της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών.

Μέρος της ιστορίας των μαθηματικών και βασική παράμετρος της παρούσας εργασίας, είναι η ιστορική εξέλιξη του μαθηματικού συμβολισμού. Η μελέτη αυτής της εξέλιξης, μας αποκαλύπτει στοιχεία που συνδέουν τη λειτουργία και την ιδέα του μαθηματικού αντικειμένου που συμβολίζει το συγκεκριμένο σύμβολο, καθώς και τις ανησυχίες των μαθηματικών για σαφήνεια και ακρίβεια της αναπαράστασης. Σε επίπεδο διδακτικής πρακτικής, η γνώση στοιχείων από την ιστορία του συμβολισμού, βοηθάει τους εκπαιδευτικούς, στην αποδοχή κάποιων αναγκαίων συμβιβασμών κατά τη διδασκαλία, προκειμένου η εισαγωγή, η χρήση και η κατανόηση των συμβόλων, να δώσει μία ώθηση στη διαδικασία της γνώσης των εννοιών και αντίστροφα. Όπως αναφέρει η Donaldson (1996), *«ένα τυπικό σύστημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί με ένα τυπικό τρόπο. Είναι εύκολο αλλά επικίνδυνο από αυτό, να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι μαθαίνεται και με τυπικό τρόπο»*. Τα σύμβολα όπως και η γλώσσα, αναπτύσσονται αρχικά σε ένα μη τυπικό και ελαστικό σύστημα, μέχρι να αποκτήσουν αυστηρούς κανόνες σύνταξης και σημασίας. Σε κάθε περίπτωση όμως, φέρουν το νόημα και τη λειτουργία της έννοιας, ακόμη και όταν χρησιμοποιούνται χωρίς την απαιτούμενη αυστηρότητα. Για παράδειγμα η οντολογική φύση των μεταβλητών και των συναρτήσεων, παρέμεινε ασαφής μέχρι τον 19^ο αιώνα, παρά το γεγονός ότι μέχρι τότε η διαδεδομένη χρήση τους, διευκόλυνε την ανάπτυξη πολλών περιοχών των μαθηματικών (Sfard, 1992, 1995).

Ο νόμος, σύμφωνα με τον οποίο επιβιώνουν τα ισχυρότερα σύμβολα, είναι στο σύνολο του απροσδιόριστος. Στο τέλος του δέκατου ένατου αιώνα δημιουργήθηκαν διάφορες επιτροπές με σκοπό να τυποποιήσουν τα σύμβολα, με περιορισμένη όμως επιτυχία. Φαίνεται ότι τα μαθηματικά σύμβολα εμφανίζονται, εξελίσσονται και επιβάλλονται, όπως οι φυσικές γλώσσες, με ένα οργανικό τρόπο που δεν μπορεί να ελεγχθεί από το αυθαίρετο διάταγμα μιας επιτροπής (Davis & Hersh, 1981). Για το ίδιο θέμα, ο de Morgan αναφέρει χαρακτηριστικά «ο μαθηματικός συμβολισμός, όπως και η γλώσσα έχει αναπτυχθεί χωρίς να στηρίζεται πολύ στην επιταγή της καταλληλότητας, αλλά με την έγκριση της πλειοψηφίας. Η ομοιότητα, πραγματική ή φανταστική, αποτελεί τον πρώτο οδηγό και η αναλογία τον διαδέχεται» *«mathematical notation, like language, has grow up without much looking to, at the dictates of convenience and with the sanction of the majority. Resemblance, real or fancied, has been the first guide, and the analogy has succeeded»* (Cajori, 1928, τομ. Β, σελ. 327).

5 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στη διάρκεια της ανθρώπινης ζωής, τα σύμβολα εμφανίστηκαν για πολλούς και διαφορετικούς λόγους, επιτελώντας ποικίλους σκοπούς στην επικοινωνία, την τέχνη και την έκφραση. Σήμερα, τα σύμβολα και οι συμβολικές αναπαραστάσεις κυριαρχούν σε όλους τους τομείς των ανθρωπίνων δραστηριοτήτων, αντικαθιστώντας κάποιες φορές τη φυσική γλώσσα και δημιουργώντας συχνά, νέους κώδικες επικοινωνίας και συμπεριφοράς. Η χρήση και η αντίληψή τους εξαρτάται από τα εξωτερικά τους χαρακτηριστικά, από το πλαίσιο στο οποίο απαντώνται, αλλά και από εσωτερικούς ψυχολογικούς παράγοντες, οι οποίοι είναι διαφορετικοί από άνθρωπο σε άνθρωπο.

Στα μαθηματικά, η χρήση των συμβόλων για τις γραπτές μαθηματικές εκφράσεις, εμφανίστηκε πολύ νωρίς και σήμερα είναι πλέον δεδομένη σε τέτοιο βαθμό που η άγνοια συμβόλων καθιστά προβληματική τη μαθηματική επικοινωνία. Παράλληλα με την ιστορική πορεία της εξέλιξης των μαθηματικών εννοιών, η αναγκαιότητα για συντομία, ακρίβεια, σαφήνεια και αυστηρότητα, οδήγησε τους μαθηματικούς, εκτός των άλλων, στη δημιουργία ενός καθολικού συμβολικού συστήματος, μίας παγκόσμιας γλώσσας, η οποία διαθέτοντας συγκεκριμένα χαρακτηριστικά έχει ως αποτέλεσμα, την οικουμενικότητα των μαθηματικών.

Η διαδικασία απόδοσης νοήματος στα μαθηματικά σύμβολα είναι πλέον αυστηρή και διέπεται από συγκεκριμένους νόμους και κανόνες. Η μαθηματική λογική συνέβαλε καθοριστικά σε αυτό, επιλύοντας προβλήματα σήμανσης και ερμηνείας, παρά το γεγονός ότι συχνά τα μαθηματικά σύμβολα εξακολουθούν να φέρουν πολλαπλή σημασία και να επιδέχονται, ανάλογα με το περιεχόμενο πλαίσιο, διαφορετική ερμηνεία. Όπως φανερώνει η ιστορία των μαθηματικών, ο μαθηματικός συμβολισμός, διευκόλυνε ως συντομογραφία τη διατύπωση και ερμηνεία μαθηματικών εκφράσεων. Παράλληλα, βοήθησε στην ταχύτητα των υπολογισμών και των διαδικασιών και ανέδειξε νέα στοιχεία και σχέσεις για τις έννοιες που περιέγραφε, αναπτύσσοντας τη διαίσθηση και τη ικανότητα σκέψης. Πολλές φορές τα σύμβολα επέστρεφαν περισσότερα από αυτά που είχαν κληθεί να αποδώσουν και όπως χαρακτηριστικά αναφέρουν οι Davis & Hersh *«κάποιες φορές τα σύμβολα στα μαθηματικά φαίνεται να είναι πιο σοφά από το δημιουργό τους»*.

Ένα νέο σύμβολο μπορεί να είναι εύκολο να δημιουργηθεί, αλλά κανείς δεν μπορεί να εγγυηθεί την πλατιά του αποδοχή, χωρίς την οποία το σύμβολο αχρηστεύεται. Ο νόμος, ο οποίος καθορίζει το λόγο για τον οποίο επιβιώνουν κάποια σύμβολα έναντι κάποιων άλλων, είναι στο σύνολο του απροσδιόριστος. Μετά από μία πιθανή «σύγκρουση» επιβιώνει ο συμβολισμός, ο οποίος είναι εύχρηστος, λειτουργικός, σύντομος και ικανός να αποδώσει με αποτελεσματικό τρόπο χαρακτηριστικά της έννοιας και της διαδικασίας, με προϋπόθεση την αποδοχή του από την πλειοψηφία. Κάποιες επιτροπές που δημιουργήθηκαν με σκοπό να τυποποιήσουν τα σύμβολα, είχαν περιορισμένη επιτυχία. Τα μαθηματικά σύμβολα εμφανίζονται, εξελίσσονται και επιβάλλονται, όπως οι φυσικές γλώσσες, με ένα οργανικό εσωτερικό τρόπο ιδιαίτερων χαρακτηριστικών, χωρίς να λαμβάνουν υπόψη τους τυπικές αποφάσεις.

Στη μαθηματική εκπαίδευση τα σύμβολα παίζουν σημαντικό ρόλο τόσο στη διδασκαλία όσο και στη μάθηση. Οι σύγχρονες εκπαιδευτικές έρευνες, εστιάζουν τα ερωτήματά τους, στο σύνθετο ρόλο που έχουν τα σύμβολα κατά τη μαθησιακή διαδικασία τόσο ως φορείς νοήματος όσο και ως μέσο επιτέλεσης διαδικασιών και στις δυσκολίες που πηγάζουν από την ερμηνεία και τη χρήση τους. Οι ερμηνευτικές θεωρίες μάθησης, αναλύουν τις παραμέτρους που εμπλέκουν τη λειτουργία, το νόημα και την ερμηνεία των συμβόλων στη διαδικασία της μάθησης και της ανάπτυξης μαθηματικής σκέψης, δίνοντας στα σύμβολα και τις αναπαραστάσεις κεντρικό ρόλο στη διαδικασία αυτή.

Ο μαθηματικός συμβολισμός είναι ένα ισχυρό εργαλείο επικοινωνίας σε κάθε μαθηματική συνδιάλεξη. Οι διδάσκοντες χειρίζονται με ευκολία το συμβολισμό τόσο σε επίπεδο συντακτικό όσο και σημασιολογικό, ενώ μεταβαίνουν μέσω των συμβόλων από το λειτουργικό στάδιο μιας ιδέας στο δομικό, χωρίς ουσιαστικές απώλειες σε χαρακτηριστικά και ιδιότητες. Αντίθετα, οι μαθητές συχνά αντιλαμβάνονται το μαθηματικό συμβολισμό ως μία καινούρια γλώσσα στην οποία είναι αναγκασμένοι να μεταφράζουν τις εκφράσεις της φυσικής γλώσσας και αντίστροφα. Η μάθηση του νέου συμβολισμού για αυτούς, είναι μία δύσκολη και περίπλοκη διαδικασία, που απαιτεί αφαιρετικό τρόπο σκέψης και αποπλαισίωση των συμβολικών εκφράσεων. Η καλή γνώση του μαθηματικού συμβολισμού, βοηθάει για μία επιτυχημένη μάθηση, ενώ η ανεπαρκής γνώση αυτού, οδηγεί σε ένα μειωμένο επίπεδο κατανόησης των μαθηματικών εννοιών καθιστώντας τον μαθηματικό

συμβολισμό ένα απαραίτητο υποστηρικτικό εργαλείο για τα περαιτέρω στάδια της βασικής μαθηματικής εκπαίδευσης.

Η ευέλικτη μετάβαση από κατασκευές φορμαλιστικού χαρακτήρα σε αντικείμενα με νόημα και αναφορά, καθώς και η αναγνώριση της διπλής ιδιότητας των μαθηματικών συμβόλων όπως αυτή παρουσιάζεται από τις επιστημονικές θεωρίες, αποτελούν απόδειξη της κατανόησης της σημασίας και της χρήσης του μαθηματικού συμβολισμού από τους μαθητές. Η διαφορά ανάμεσα στην εννοιολογική και τη διαδικαστική σκέψη, στη λειτουργική και τη δομική αντίληψη, γίνεται κάποιες φορές φανερή από έναν αποτελεσματικό χειρισμό του συμβολικού συστήματος, χωρίς την επαρκή κατανόηση τόσο των λειτουργικών όσο και δομικών χαρακτηριστικών της έννοιας.

Επιπλέον, η ανεπτυγμένη κατανόηση της σημασίας του συμβόλου και η ορθή χρήση του είναι αμοιβαία εποικοδομητικά στοιχεία της δύναμης του συμβόλου. Συχνά το νόημα είναι συνάρτηση της χρήσης και η χρήση είναι αποτέλεσμα της ορθής κατανόησης του νοήματος. Αυτή η διαδικασία, φαίνεται να λειτουργεί ως καύσιμο στη μαθησιακή διαδικασία. Κάτω από αυτή την οπτική, το ζήτημα για τους εκπαιδευτές, είναι: (α) να οργανώσουν και να διευκολύνουν την εύκολη μετακίνηση ανάμεσα στη σημασία και το σύμβολο, (β) να υιοθετήσουν διδασκαλίες με τις οποίες να αναδεικνύουν τη δημιουργία νοήματος από τα σύμβολα, (γ) να επιδιώκουν την εξοικείωση των μαθητών με την απόδοση νοήματος στη συμβολική αναπαράσταση, παράλληλα με την αυτοματοποιημένη χρήση του τυπικού συμβολικού συστήματος, και (δ) να ισχυροποιήσουν την αντίληψη των μαθητών, για το αναμενόμενο κέρδος από τη χρήση συμβόλων.

Όπως αναφέρει ο Alfred North Whitehead, το σύμβολο στα μαθηματικά μπορεί *«να ανακουφίζει τον εγκέφαλο από κάθε εργασία που δεν είναι αναγκαία. Ένας καλός συμβολισμός τον απελευθερώνει, ώστε να συγκεντρωθεί σε πιο προχωρημένα προβλήματα και, στην πραγματικότητα, αυξάνει τη νοητική δύναμη του ανθρώπου»*.

6 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Αναπολιτάνος, Δ. (1985). *Εισαγωγή στη φιλοσοφία των Μαθηματικών*. Αθήνα Εκδ.Νεφέλη.
- Arcavi, A., Bruckheimer, M., Ben-Zvi, R. (1982). Maybe a Mathematics Teacher can profit from the Study of History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 3(1) 30-37.
- Arcavi, A., Bruckheimer, M., Ben-Zvi, R. (1987). History of Mathematics for Teachers: the case of Irrational Numbers. *For the Learning of Mathematics*, 7(2) 18-23.
- Arcavi, A., Bruckheimer, M. (1991). Reading Bombelli's x-purgated Algebra. *College Mathematics Journal*, 22(3) 212-219.
- Arcavi, A. (1994). Symbol Sense: Informal Sense-making in Formal Mathematics. *For the Learning of Mathematics* 14, 3, p. 24-35.
- Arcavi, A. (2005). Developing and Using Symbol Sense in Mathematics. *For the Learning of Mathematics* 25, 2, p. 42-48.
- Bashmakova, I., G., Smirnova, G. S., Shenitzer A. (1999a). The Birth of Literal Algebra. *American Mathematical Monthly*, Vol. 106, No. 1 , 57-66
- Bashmakova, I. G., Smirnova, G. S., Shenitzer A. (1999b). The Literal Calculus of Viète and Descartes. *American Mathematical Monthly*, Vol. 106, No. 3. 260-263
- Bell, E. T. (1992). *Οι Μαθηματικοί*. Τόμοι 2, Ηράκλειο, ΠΕΚ.,
- Βοσνιάδου, Σ. (2001). *Εισαγωγή στην Ψυχολογία*. τόμος Α', Αθήνα, Εκδ. Gutenberg
- Boyer, C. B. (1950). James Hume and Exponents. *American Mathematical Monthly*, Vol. 57, No. 1, 7-8

- Boyer, C. B. (1959). *A History of the Calculus and its Conceptual Development*. Dover Publication, Inc., New York.
- Boyer, C. B., Merzbach, U.C. (1997). *Η Ιστορία των Μαθηματικών*. Αθήνα, Εκδόσεις Γ.Α. Πνευματικός.
- Bunt, L., Jones, P., Bedient, J. (1981). *Οι Ιστορικές Ρίζες των Στοιχειωδών Μαθηματικών*. Αθήνα, Εκδόσεις Γ.Α. Πνευματικός.
- Γιαννακούλιας, Ε. (2005). *Ιστορία Απειροστικού Λογισμού*. Σημειώσεις Παραδόσεων. Αθήνα.
- Cajori, F. (1919). *A History of Mathematics*. New York: The Macmillan Co.
- Cajori, F. (1923a). Mathematical Signs of Equality. *Isis*, Vol. 5, No. 1, 116-125
- Cajori, F. (1923b). The History of Notation of the Calculus. *The Annals of Mathematics*, Vol. 25, No. 1, 1-46.
- Cajori, F. (1925). American Contribution to Mathematical Symbolism. *American Mathematical Monthly*, Vol. 32, No. 8, 414-416.
- Cajori, F. (1928). *A History of Mathematical Notations*. 2 volumes. Chicago: The Open Court Publishing Co.
- Davis, P., Hersh, R. (1981). *Η μαθηματική Εμπειρία* Αθήνα, Εκδ. Τροχαλία.
- Donaldson, M., (1995). *Η σκέψη των παιδιών*, Αθήνα, Εκδ. Gutenberg.
- Dumet, M. (1993). Η φιλοσοφική Θεμελίωση των Κατασκευαστικών Μαθηματικών; Στο *Φιλοσοφία των Μαθηματικών*, Χριστοδουλίδης, Π., (επιμ.), Αθήνα, Εκδόσεις Γ.Α. Πνευματικός.
- Eves, H. (1981). *Οι μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών*. Αθήνα, Εκδ. Τροχαλία.
- Ford, J. M. (2003). Representing and Meaning in History and in Classrooms: Developing Symbols and Conceptual Organizations of Free-Fall Motion. *Science & Education* 12, 1–25.

- Gray, E., Tall, D. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education*, 26 (2), 115– 141.
- Gray, E., Pitta, D., Tall, D. (2000). Objects, Actions And Images: A Perspective On Early Number Development. *Journal of Mathematical Behavior*, 18, 4, 1– 13.
- Hairer, E., Wanner, G. (2000). *Analysis by Its History*. Springer, New York.
- Heath, T. (2001). *Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών*. (τόμοι 2) Αθήνα, Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ.,.
- Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. In Hiebert (Ed.) *Conceptual and procedural Knowledge: The Case for Mathematics*, Hillsdale. N.J.: Erlbaum.
- Hiebert, J., Carpenter, T., et al. (1997). *Making Sense: Teaching and Learning Mathematics with Understanding*. Portsmouth, NH Heinemann
- Hughes, M., (1996). *Τα Παιδιά και η Έννοια των Αριθμών*. (Βοσνιάδου Σ. επιμ.), Αθήνα, Εκδ Gutenberg.
- Hughes M. (1992). Ποια δυσκολία υπάρχει στη μάθηση της σχολικής αριθμητικής; *Στα Κείμενα Εξελικτικής Ψυχολογίας*, τ. Β΄, Σκέψη, Βοσνιάδου Σ. (επιμ.), Αθήνα, Εκδ. Gutenberg
- Καλαβάσης, Φ. (2000). Η Διευρυμένη Θέαση των Μαθηματικών Μέσω της Διδακτικής των Μαθηματικών, (σελ. 81-102) *Θέματα Διδακτικής Μαθηματικών V*, Αθήνα, Εκδ. Gutenberg.
- Klein, J. (1968). *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*. Dover Publication, Inc., New York.
- Kleiner, I. (1989). Evolution of the Function Concept: A Brief Survey. *A College Mathematics Journal*, Vol. 20, No. 4. 282-300.

- Κολέζα, Ε., (2000). *Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών*, Αθήνα, Εκδ. Leader Books.
- Κορναράκης, Κ. (2000). Ο Μυστικός και Αποκαλυπτικός Χαρακτήρας του Συμβόλου κατά τη Θεώρηση του Χριστιανικού Παιδαγωγικού Ιδεώδους, (σελ. 141-153) *Θέματα Διδακτικής Μαθηματικών V*, Αθήνα, Εκδ. Gutenberg.
- Lay-Yong, L. (1986). The Conceptual Origins of our Numeral System and the Symbolic forms of Algebra. *Archive for History of exact Sciences*, 36, 4, 184-195.
- Maor, E. (2005). *ε: Η Ιστορία Ενός Αριθμού*. Αθήνα, Εκδ. Κάτοπτρο.
- Menninger, K. (1969). *Number Words and Number Symbols: A Cultural History of Numbers*. The M.I.T. Press, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts.
- Miller, J. (2004). *Early uses of Various Mathematical Symbols*. Retrieved at 10/9/2006 from the word wide web: <http://member.aol.com/jeff570>
- N.C.T.M. (2004). The curriculum Principle, retrieved 15/11/2004 from the word wide web: <http://standartrial.nctm.org/document/chapter2/curric.htm>
- Newhagen, J. (2004). Interactivity, Dynamic Symbol Processing, And the Emergence of Content in Human Communication. *The Information Society*, 20, 395-400.
- Nirenburg, S., Wilks, Y. (2001). What's in a Symbol: Ontology, representation and language. *Journal of Experimental & Theoretical Artificial Intelligence* 13, 9-23.
- Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, (1998) *Ενιαίο Λύκειο, Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών*, Αθήνα. ΥΠΕΠΘ
- Pope, S., Sharma, R. (2002) *Symbol Sense: Teacher's and Student's understanding*. From informal Proceedings 21-3 (BSRLM) available at bsrlm.org.uk 64-69.

- Ρουσόπουλος, Γ. (1991). *Επιστημολογία των Μαθηματικών*. Αθήνα, Εκδ Gutenberg.
- Rickey, V. F. (1992). Το Σύμβολο του ολοκληρώματος. *Διάσταση* 3-4, 72-75.
- Schoenfeld, A., Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable, *Mathematics Teacher* 81, 420-427.
- Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1–36.
- Sfard, A. (1992). Operational origins of Mathematical object and the quandary of reification- The case of Function, in E. Dubinski and G. Harel (eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes, Vol. 25, Mathematical Association of America, pp.59-84, Washington DC, 59-84.
- Sfard, A. (1994). The gains and the pitfalls of reification – the case o algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 191-228.
- Sfard, A. (1995). The Development of Algebra: Confronting Historical and Psychological Perspectives. *Journal of Mathematical Behavior* 14. 15-39.
- Sfard, A. (2000). Symbolizing Mathematical Reality into Being – Or How Mathematical Discourse and Mathematical Objects Create Each Other, in P. Cobb, E. Yackel & K. McClain (eds), *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms: Perspectives on Discourse, Tools, and Instructional Design* Erlbaum, Mahwah, NJ, pp. 37–98.
- Spagnolo, F. (2006). *The role of History of Mathematics in Research in Mathematics Education*. retrieved at 20/12/2006 from the word wide web from: <http://dipmat.math.unipa.it/~grim/semiohistory.pdf>
- Σπύρου, Π. (2005). *Επιστημολογία των Μαθηματικών*. Σημειώσεις Παραδόσεων Αθήνα.

- Σταμάτης, Ε. (1975). *Ευκλείδου Γεωμετρία, Στοιχεία*. Τόμοι 4. Αθήνα, Εκδ. ΟΕΔΒ.
- Steinberg, H. (2000). Interaction Analysis of Mathematical Communication in Primary Teaching: The Epistemological Perspective. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik*, 5, 138-148
- Struik, D. (1966). *Συνοπτική Ιστορία των Μαθηματικών*. Αθήνα, Εκδ. Ζαχαρόπουλος.
- Tall, D., Gray, E. et al (2001). Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education* 1, 81–104.
- Tall, D., (2004). Introducing Three Worlds of Mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 23 (3). 29–33.
- Τοκμακίδης, Τ. (1989). Ιστορική καταγωγή της Ορίζουσας. *Διάσταση* 4, 36-63.
- Τουμάσης, Μ. (1999). *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών* Αθήνα, Εκδ Gutenberg.
- Van der Waerden B., L. (2003). *Η Αφύπνιση της επιστήμης*. Ηράκλειο, ΠΕΚ.
- Vogel K. (1996). Εγγράμματος λογισμός και ινδικά ψηφία στο Βυζάντιο. *Νεύσις* 5, 75-81.
- Χριστιανίδης, Γ. (1996). Οι εγγράμματες παραστάσεις και ο αλγεβρικός συμβολισμός. Ηράκλειο, ΠΕΚ.
- Χριστιανίδης, Γ. (2003). *Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών*. Ηράκλειο, ΠΕΚ.
- Χριστοδουλίδης, Π. (1993). *Η φιλοσοφία των Μαθηματικών*. Αθήνα, Εκδόσεις Γ.Α. Πνευματικός.
- Wittgenstein L. (1978). *Tractatus Logico Philosophicus*. Αθήνα, Εκδ. Παπαζήση.