

ΘΕΜΑ 1^ο (Μιγαδικοί)

Δίνεται ο μιγαδικός $z \neq 1$ και έστω $w = \frac{2 + i\bar{z}}{1 - z}$

α. Να βρεθεί ο μιγαδικός w όταν $z=2$

β. Να δείξετε ότι $\frac{w-2}{w+i} = \bar{z}$

γ. Αν η εικόνα του z κινείται στον κύκλο κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας 1 και M είναι η εικόνα του w στο μιγαδικό επίπεδο, να αποδείξετε ότι το M κινείται σε ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

δ) Αν ο w είναι πραγματικός, να αποδείξετε ότι η εικόνα του z κινείται σε κύκλο από τον οποίο έχει εξαιρεθεί το σημείο $A(1,0)$

ε) Για $z=2$ να αποδείξετε ότι ο w^{2004} είναι πραγματικός.

ΛΥΣΗ

α. Για $z=2$ είναι $w = \frac{2 + i\bar{2}}{1 - 2} = -2 - 2i$

β. Είναι $w = \frac{2 + i\bar{z}}{1 - z} \Leftrightarrow w - w\bar{z} = 2 + i\bar{z} \Leftrightarrow i\bar{z} + w\bar{z} = w - 2 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{w-2}{w+i}$

γ. Δίνεται $|z|=1$ οπότε $|\bar{z}|=1$ οπότε $\left| \frac{w-2}{w+i} \right| = 1 \Leftrightarrow |w-2| = |w+i| \Leftrightarrow$

$$(x-2)^2 + y^2 = x^2 + (y+1)^2 \Leftrightarrow -4x+4 = 2y+1 \Leftrightarrow 4x+2y-3=0$$

Άρα το M κινείται στην ευθεία με εξίσωση $4x+2y-3=0$

δ. w πραγματικός $\Leftrightarrow \text{Im}(w) = 0 \Leftrightarrow 2 \text{Im}(w)i = 0 \Leftrightarrow w - \bar{w} = 0 \Leftrightarrow \bar{w} = w \Leftrightarrow$

$$\overline{\left(\frac{2 + i\bar{z}}{1 - z} \right)} = \frac{2 + i\bar{z}}{1 - \bar{z}} \Leftrightarrow \frac{2 - iz}{1 - z} = \frac{2 + i\bar{z}}{1 - \bar{z}} \Leftrightarrow (2 - iz)(1 - \bar{z}) = (2 + i\bar{z})(1 - z) \Leftrightarrow$$

$$2 - 2\bar{z} - iz + iz\bar{z} = 2 - 2z + i\bar{z} - iz\bar{z} \Leftrightarrow 2iz\bar{z} - i(z + \bar{z}) + 2(z - \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$2i(x^2 + y^2) - i2x + 2 \cdot 2yi = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - x + 2y = 0$$

Που παριστάνει κύκλο κέντρου $K\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ και ακτίνας

$$\rho = \frac{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 - 4 \cdot 0}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Όμως $\bar{z} \neq 1 \Leftrightarrow z \neq 1$ και για $(x,y)=(1,0)$ επαληθεύεται η (1) άρα από τον κύκλο εξαιρούμε το $A(1,0)$

ε. Για $z=2$ είναι (από α) ερώτημα) $w = -2 - 2i = -2(1+i)$ οπότε

$$w^2 = 2^2(1^2 + i^2 + 2i) = 2^2 \cdot 2i \text{ και } w^4 = (2^2)^2 \cdot 2^2 i^2 = 2^4 \cdot 2^2(-1) = -2^6$$

Άρα $w^{2004} = (w^4)^{501} = (-2^6)^{501} = -2^{3006}$ πραγματικός

ΘΕΜΑ 2^ο (Μιγαδικοί)

Έστω $f(w) = (2 + \frac{3}{2}i)w - \frac{5}{2}\bar{w}i$, όπου $w = a + \beta i$, $a, \beta \in \mathbb{R}$

- α. Να βρεθούν τα $\text{Re}(f(w))$ και $\text{Im}(f(w))$
- β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(f(w))$ στο μιγαδικό επίπεδο
- γ. Να βρεθεί το μέτρο $|f(w)|$ όταν $\text{Re}(w) = 2\text{Im}(w) + 3$
- δ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w , όταν η απόσταση του $f(w)$ από την αρχή των αξόνων είναι ίση με $2\sqrt{5}$.

ΛΥΣΗ

α. Είναι $f(w) = (2 + \frac{3}{2}i)(a + \beta i) - \frac{5}{2}(a - \beta i)i =$

$$2a + 2\beta i + \frac{3}{2}ai - \frac{3}{2}\beta - \frac{5}{2}ai - \frac{5}{2}\beta = 2a - 4\beta + (-a + 2\beta)i$$

Οπότε $\text{Re}(f(w)) = 2a - 4\beta$ και $\text{Im}(f(w)) = -a + 2\beta$

β. Έστω $f(w) = x + yi$

Τότε $\begin{cases} x = 2a - 4\beta \\ y = -a + 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a - 4\beta \\ 2y = -2a + 4\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a - 4\beta \\ x + 2y = 0 \end{cases}$

Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η ευθεία $\varepsilon : x + 2y = 0$

γ. Είναι $|f(w)| = \sqrt{(2a - 4\beta)^2 + (-a + 2\beta)^2} = \sqrt{4(a - 2\beta)^2 + (a - 2\beta)^2} = \sqrt{5}|a - 2\beta|$

Αλλά $\text{Re}(w) = 2\text{Im}(w) + 3 \Leftrightarrow a = 2\beta + 3 \Leftrightarrow a - 2\beta = 3$ οπότε $|f(w)| = 3\sqrt{5}$

δ. Δίνεται ότι η απόσταση του $f(w)$ από την αρχή των αξόνων είναι $2\sqrt{5}$ οπότε $|f(w)| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{5}|a - 2\beta| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow a - 2\beta = 2$ ή $a - 2\beta = -2 \Leftrightarrow a - 2\beta - 2 = 0$ ή $a - 2\beta + 2 = 0$

Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι οι ευθείες $\varepsilon_1 : x - 2y - 2 = 0$ και $\varepsilon_2 : x - 2y + 2 = 0$

ΘΕΜΑ 3^ο (Μιγαδικοί)

Δίνεται ο μιγαδικός $z \neq 2i$ και έστω $f(z) = \frac{5 - 12i - 2iz}{z - 2i}$. Θεωρούμε ακόμη τους

μιγαδικούς $z_1 = z + 3i$ και $z_2 = f(z) + 3i$.

- α. Να βρεθεί ο z_1 αν $z_1 = z_2$
- β. Να λυθεί η εξίσωση $f(z) = 5 + 2i$
- γ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z όταν $f(z)$ πραγματικός

ΛΥΣΗ

α. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow f(z) = z \Leftrightarrow \frac{5 - 12i - 2iz}{z - 2i} = z \Leftrightarrow 5 - 12i - 2iz = z^2 - 2iz \Leftrightarrow z^2 = 5 - 12i$

Έστω $z = x + yi$ τότε $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ οπότε
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 & (1) \\ 2xy = -12 & (2) \end{cases}$$

Από (2) έχω x, y ετερόσημοι

$$\text{Όμως } (x^2 - y^2)^2 = 25 \Leftrightarrow x^4 + y^4 - 2x^2y^2 = 25 \text{ και } 4x^2y^2 = 144$$

Οπότε προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

$$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = 169 \Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 = 169 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 13 \quad (3)$$

$$\begin{cases} (1) \\ (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 18 \\ 2y^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 2 \end{cases} \stackrel{x, y \text{ ετερ}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} z = 3 - 2i \\ \text{ή} \\ z = -3 + 2i \end{cases}$$

Οπότε $z_1 = 3 + i$ ή $z_1 = -3 + 5i$

$$\beta. f(z) = 5 + 2i \Leftrightarrow 5 - 12i - 2iz = (z - 2i)(5 + 2i) \Leftrightarrow 5 - 12i - 2iz = 5z + 2iz - 10i + 4 \Leftrightarrow$$

$$(5 + 4i)z = 1 - 2i \Leftrightarrow z = \frac{1 - 2i}{5 + 4i} = \frac{(1 - 2i)(5 - 4i)}{25 + 16} = \frac{5 - 4i - 10i - 8}{41} = -\frac{3}{41} - \frac{14}{41}i$$

$$\gamma. f(z) \text{ πραγματικός} \Leftrightarrow \text{Im } f(z) = 0 \Leftrightarrow 2 \text{Im } f(z)i = 0 \Leftrightarrow f(z) - \overline{f(z)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(z) = \overline{f(z)} \Leftrightarrow \frac{5 - 12i - 2iz}{z - 2i} = \frac{5 + 12i + 2i\bar{z}}{\bar{z} + 2i} \Leftrightarrow$$

$$5\bar{z} + 10i - 12i\bar{z} + 24 - 2iz\bar{z} + 4z = 5z + 12iz + 2iz\bar{z} - 10i + 24 + 4\bar{z} \Leftrightarrow$$

$$4iz\bar{z} + 12i(z + \bar{z}) + (z - \bar{z}) - 20i = 0 \Leftrightarrow$$

$$2(x^2 + y^2) + 12x + y - 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6x + \frac{1}{2}y - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x + 3)^2 + (y + \frac{1}{4})^2 = 5 + 9 + \frac{1}{16} \Leftrightarrow (x + 3)^2 + (y + \frac{1}{4})^2 = \frac{225}{16}$$

Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος κέντρου $K(-3, -\frac{1}{4})$ και

ακτίνας $\rho = \frac{15}{4}$.

ΘΕΜΑ 4^ο (1-1 και αντίστροφη)

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + f(x) + \frac{1}{2}x = 0$ (1)

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδειχθεί ότι η f είναι “1-1”

β. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f^{-1}

γ. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x^3 - x) = f^{-1}(3 - 3x)$

ΛΥΣΗ

$$\alpha. \text{ Είναι } (1) \Leftrightarrow f^3(x) + f(x) = -\frac{1}{2}x \quad (2)$$

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $f^3(x_1) = f^3(x_2)$ οπότε

$$f^3(x_1) + f(x_1) = f^3(x_2) + f(x_2) \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} -\frac{1}{2}x_1 = -\frac{1}{2}x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η f είναι “1-1”

β. Έστω $f(x)=y$ τότε $x = f^{-1}(y)$ οπότε η (1) γίνεται

$$y^3 + y + \frac{1}{2} f^{-1}(y) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(y) = -2y^3 - 2y$$

Άρα $f^{-1}(y) = -2y^3 - 2y$

γ. Η f^{-1} είναι “1-1” οπότε η εξίσωση γίνεται $x^3 - x = 3 - 3x \Leftrightarrow x^3 + 2x - 3 = 0$

1	0	2	-3	x=1
///	1	1	3	
1	1	3	0	

$$\text{Οπότε } \begin{cases} x = 1 \\ \text{ή} \\ x^2 + x + 3 = 0 \text{ αδύνατο} \end{cases}$$

Άρα $x=1$

ΘΕΜΑ 5^ο (Συνέχεια – συναρτησιακές σχέσεις – αντίστροφη)

Δίνεται η συνεχής στο 0 συνάρτηση $f: R \rightarrow R$, για την οποία ισχύουν $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) \cdot f(\beta)$ (1) για οποιαδήποτε $\alpha, \beta \in R$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$.

Να αποδείξετε ότι

α. $f(0) = 1$

β. $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$

γ. $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$ για κάθε $x \in R$

δ. Αν η εξίσωση $f(x)=1$ έχει μοναδική ρίζα το 0 τότε η f αντιστρέφεται και ισχύει $f^{-1}(x \cdot y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

α. Η σχέση (1) για $\alpha=\beta=0$ γίνεται

$$f(0) = f(0) \cdot f(0) \Leftrightarrow (f(0))^2 - f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0)(f(0) - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \text{ή} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Και επειδή $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$, θα έχουμε $f(0) = 1$

β. Η f δεν μηδενίζεται πουθενά στο R ($f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$) και παίρνει την τιμή 1 για $x=0$. Οπότε για να έχει παντού θετικές τιμές ($f(x)>0$ για κάθε $x \in R$) αρκεί να είναι συνεχής στο R . Στο 0 η f δίνεται συνεχής. Έστω $x_0 \in R^*$

$$\begin{aligned} \text{ΤΟΤΕ } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0) \cdot f(h)) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} f(h) \quad \begin{matrix} f \text{ συνεχής στο } 0 \\ = \end{matrix} \\ &= f(x_0) \cdot f(0) = f(x_0) \cdot 1 = f(x_0) \end{aligned}$$

Άρα η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Επομένως f συνεχής στο $\mathbb{R}$. Δίνεται όμως ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε x . Οπότε, από συνέπειες του θεωρήματος Bolzano, η f διατηρεί το πρόσημό της σε όλο το $\mathbb{R}$ και επειδή $f(0)=1>0$ έχουμε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ. Η σχέση (1) για $\alpha=-x$ και $\beta=x$ γίνεται

$$f(-x+x) = f(-x) \cdot f(x) \Leftrightarrow f(0) = f(-x) \cdot f(x) \Leftrightarrow f(-x) \cdot f(x) = 1 \stackrel{f(x) \neq 0}{\Leftrightarrow} f(-x) = \frac{1}{f(x)}$$

δ. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$ (2)

Θέτω $x_1 - x_2 = h \Leftrightarrow x_1 = x_2 + h$ οπότε

$$(2) \Leftrightarrow f(x_2 + h) = f(x_2) \Leftrightarrow f(x_2) \cdot f(h) = f(x_2) \stackrel{f(x_2) \neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$f(h) = 1 \Leftrightarrow h = 0$ αφού η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μοναδική ρίζα το 0

Οπότε $x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Άρα f “1-1” επομένως αντιστρέφεται.

Έστω $f^{-1}(x) = a$ και $f^{-1}(y) = \beta$ τότε $x=f(a)$ και $y=f(\beta)$ οπότε

$$xy = f(a)f(\beta) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} xy = f(a+\beta) \Leftrightarrow f^{-1}(xy) = a+\beta \Leftrightarrow f^{-1}(xy) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$$

ΘΕΜΑ 6^ο (Όριο – συνέχεια)

Για τη συνεχή στο $[-1, 1]$ συνάρτηση f , ισχύει $xf(x) = 2 - \sqrt{1-x^2} - \sin x$ (1) για κάθε $x \in [-1, 1]$.

α. Να βρείτε το $f(0)$

β. Να βρείτε το $a \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

να είναι συνεχής

γ. Για την τιμή του a που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να δείξετε ότι η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[-1, 1]$.

ΛΥΣΗ

$$\alpha. (1) \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} f(x) = \frac{2 - \sqrt{1-x^2} - \sin x}{x}$$

Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{1-x^2} - \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1-x^2)}{x(1 + \sqrt{1-x^2})} + 0 =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 + \sqrt{1-x^2}} = \frac{0}{2} = 0 \text{ αλλά } f \text{ συνεχής στο } 0, \text{ οπότε } f(0)=0$$

β. Η g είναι συνεχής στο $[-1, 0) \cup (0, 1]$ ως πηλίκο συνεχών.

Επίσης

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{1-x^2} - \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{x^2} =$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1-x^2)}{x^2(1 + \sqrt{1-x^2})} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin^2 x}{x^2(1 + \sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \sqrt{1-x^2}} + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \sin x} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Άρα πρέπει $a=1$

γ. Αρκεί να δείξουμε ότι $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [-1, 1]$.

Είναι $g(0) = 1 \neq 0$

Επίσης $2 - \sqrt{1-x^2} - \sin x = 1 - \sqrt{1-x^2} + 1 - \sin x$

Αλλά για $x \neq 0$ ισχύει $1 - \sqrt{1-x^2} > 0$ και $1 - \sin x \geq 0$
οπότε $1 - \sqrt{1-x^2} + 1 - \sin x > 0 \Leftrightarrow x f(x) > 0$ οπότε $f(x) \neq 0$. Άρα για $x \neq 0$
ισχύει $g(x) \neq 0$. Επομένως $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [-1, 1]$.

ΘΕΜΑ 7^ο (Συνέχεια – μονοτονία με ορισμό – “1-1”)

Δίνεται η συνάρτηση $f: R \rightarrow R$ για την οποία ισχύει $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ (1)
για οποιαδήποτε $x, y \in R$ με $x \neq y$.

α. Να αποδειχθεί ότι η f είναι συνεχής στο R

β. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $g(x) = x - f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο R

γ. Να λυθεί η εξίσωση $f(2x^3) - f(3-x^2) = 2x^3 + x^2 - 3$

ΛΥΣΗ

α. Έστω $x_0 \in R$. Τότε για κάθε $x \in R$ με $x \neq x_0$ ισχύει

$$|f(x) - f(x_0)| < |x - x_0| \Leftrightarrow -|x - x_0| < f(x) - f(x_0) < |x - x_0|$$

$$\text{Αλλά } \lim_{x \rightarrow 0} (-|x - x_0|) = \lim_{x \rightarrow 0} |x - x_0| = 0$$

$$\text{Οπότε από κριτήριο παρεμβολής } \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Άρα η f είναι συνεχής στο R .

β. Έχουμε $g(x) = x - f(x) \Leftrightarrow f(x) = x - g(x)$. Έστω $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 \neq x_2$ τότε
ισχύει

$$|f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2| \Leftrightarrow |x_1 - g(x_1) - x_2 + g(x_2)| < |x_1 - x_2| \Leftrightarrow \left| \frac{x_1 - x_2 - (g(x_1) - g(x_2))}{x_1 - x_2} \right| < 1 \Leftrightarrow$$

$$\left| 1 - \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} \right| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 - \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} < 1 \Leftrightarrow -2 < -\frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow$$

$$0 < \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} < 2$$

$$\text{Οπότε } \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

Αν $x_1 < x_2$ τότε $x_1 - x_2 < 0$ οπότε $g(x_1) - g(x_2) < 0 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2)$

Επομένως g γνησίως αύξουσα στο R.

γ. Διαδοχικά έχουμε

$$f(2x^3) - f(3-x^2) = 2x^3 + x^2 - 3 \Leftrightarrow 3-x^2 - f(3-x^2) = 2x^3 - f(2x^3) \Leftrightarrow$$

$$g(3-x^2) = g(2x^3) \Leftrightarrow 3-x^2 = 2x^3 \Leftrightarrow 2x^3 + x^2 - 3 = 0$$

2	1	0	-3	x=1
///	2	3	3	
2	3	3	0	

$$\text{Οπότε} \begin{cases} x=1 \\ \text{ή} \\ 2x^2 + 3x + 3 = 0 \quad \text{αδύνατο} \end{cases}$$

Άρα x=1

ΘΕΜΑ 8^ο (Μιγαδικοί – θ. Bolzano)

Δίνεται ο μιγαδικός $w = \frac{z+2}{z-i}$ με $z = x+yi$, $x, y \in R$ με $(x, y) \neq (0, 1)$.

α. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M(x,y) του επιπέδου, για τα οποία $|w| = \sqrt{2}$.

β. Αν A(α,β) ένα σημείο του γεωμετρικού τόπου του α ερωτήματος, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3(a-2)^2 x^5 + 2(\beta-2)^2 x^3 - 10 = 0$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο διάστημα (0, 1).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

α. Έχουμε

$$|w| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|z+2|}{|z-i|} = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z+2| = \sqrt{2}|z-i| \Leftrightarrow (z+2)(\bar{z}+2) = 2(z-i)(\bar{z}+i) \Leftrightarrow$$

$$z\bar{z} + 2z + 2\bar{z} + 4 = 2z\bar{z} + 2iz - 2i\bar{z} + 2 \Leftrightarrow z\bar{z} + 2i(z - \bar{z}) - 2(z + \bar{z}) - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 - 4y - 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 = 10 \quad (1)$$

Η (2) για x=0 και y=1 δεν επαληθεύεται.

Επομένως ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος κέντρου K(2,2) και ακτίνας $\rho = \sqrt{10}$.

β. Επειδή το A είναι σημείο του γεωμετρικού τόπου έχουμε $(a-2)^2 + (\beta-2)^2 = 10$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 3(a-2)^2 x^5 + 2(\beta-2)^2 x^3 - 10$, $x \in [0, 1]$

Η f είναι συνεχής στο [0, 1] ως πολυωνυμική.

Ακόμη $f(0) = -10 < 0$ και

$$f(1) = 3(a-2)^2 + 2(\beta-2)^2 - 10 = (a-2)^2 + (\beta-2)^2 - 10 + (a-2)^2 + (\beta-2)^2 + (a-2)^2 = 10 + (a-2)^2 > 0$$

Οπότε από το θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια

τουλάχιστο ρίζα στο $(0, 1)$. Όμως $f'(x) = 15(a-2)^2 x^4 + 6(\beta-2)^2 x^2 > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$. Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1)$. Επομένως η ρίζα είναι μοναδική.

ΘΕΜΑ 9^ο (Μιγαδικοί – Θ. Rolle)

Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ συνάρτηση f για την οποία $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και οι μιγαδικοί $z_1 = a^2 + if(a)$ και $z_2 = \frac{1}{\beta^2} + i \frac{1}{f(\beta)}$ με $0 < \alpha < \beta$

για τους οποίους ισχύει $|z_1 + \bar{z}_2| = |z_1 - \bar{z}_2|$.

Να αποδείξετε ότι

α. Ο $z_1 z_2$ είναι φανταστικός

β. Οι αριθμοί $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ είναι ανάλογοι των τετραγώνων των α και β

γ. Υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi) = \frac{2f(\xi)}{\xi}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

α. Διαδοχικά έχουμε

$$|z_1 + \bar{z}_2| = |z_1 - \bar{z}_2| \Leftrightarrow |z_1 + \bar{z}_2|^2 = |z_1 - \bar{z}_2|^2 \Leftrightarrow$$

$$(z_1 + \bar{z}_2)(\bar{z}_1 + z_2) = (z_1 - \bar{z}_2)(\bar{z}_1 - z_2) \Leftrightarrow$$

$$z_1 \bar{z}_1 + z_1 z_2 + \bar{z}_2 \bar{z}_1 + \bar{z}_2 z_2 = z_1 \bar{z}_1 - z_1 z_2 - \bar{z}_2 \bar{z}_1 + \bar{z}_2 z_2 \Leftrightarrow$$

$$2z_1 z_2 + 2\bar{z}_1 \bar{z}_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 z_2 + \bar{z}_1 \bar{z}_2 = 0 \Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(z_1 z_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow z_1 z_2 \text{ φανταστικός}$$

$$\beta. \text{ Είναι } z_1 z_2 = (a^2 + if(a))\left(\frac{1}{\beta^2} + i \frac{1}{f(\beta)}\right) =$$

$$\frac{a^2}{\beta^2} + i \frac{a^2}{f(\beta)} + i \frac{f(a)}{\beta^2} - \frac{f(a)f(\beta)}{f(\beta)} = \frac{a^2}{\beta^2} - \frac{f(a)}{f(\beta)} + i \left(\frac{a^2}{f(\beta)} + \frac{f(a)}{\beta^2} \right)$$

$$\text{Αλλά } z_1 z_2 \text{ φανταστικός} \Leftrightarrow \frac{a^2}{\beta^2} - \frac{f(a)}{f(\beta)} = 0 \Leftrightarrow \frac{f(a)}{f(\beta)} = \frac{a^2}{\beta^2} \quad (1)$$

Οπότε $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ ανάλογα των τετραγώνων των α και β

$$\gamma. (1) \Leftrightarrow \frac{f(a)}{a^2} = \frac{f(\beta)}{\beta^2}$$

Η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$g'(x) = \frac{x^2 f'(x) - 2xf(x)}{x^4} = \frac{xf'(x) - 2f(x)}{x^3} \text{ και επίσης } g(a) = g(\beta). \text{ Οπότε για}$$

την g εφαρμόζεται θεώρημα Rolle στο $[\alpha, \beta]$. Άρα υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος

$$\text{ώστε } g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi f'(\xi) - 2f(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{2f(\xi)}{\xi}$$

ΘΕΜΑ 10^ο (Θ. Rolle – παράγωγος – εφαπτομένη)

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g ορισμένες στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x) = (x - x_0)g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ακόμη για την f εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[a, \beta]$ με $a, \beta \in \mathbb{R}$, $a < \beta$. Αν $f(a) = 0$ και $x_0 \notin [a, \beta]$ ναδειχθεί ότι

α. υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$

β. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $B(x_0, 0)$ εφαπτεται της C_f στο A

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

α. Ισχύει $x - x_0 \neq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ αφού $x_0 \notin [a, \beta]$. Οπότε $g(x) = \frac{f(x)}{x - x_0}$

Η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ οπότε και η g ως πηλίκο συνεχών. Η f είναι παραγωγίσιμη στο (a, β) οπότε και η g ως πηλίκο παραγωγίσιμων.

Ακόμη $g(a) = \frac{f(a)}{a - x_0} = \frac{0}{a - x_0} = 0$ και $g(\beta) = \frac{f(\beta)}{\beta - x_0} = \frac{f(a)}{\beta - x_0} = 0$ οπότε $g(a) = g(\beta)$

Επομένως από θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιος ώστε $g'(\xi) = 0$ (1)

β. Αρκεί η εφαπτομένη της C_f στο A να διέρχεται από το B .

Είναι $g'(x) = \frac{f'(x)(x - x_0) - f(x)}{(x - x_0)^2}$

Οπότε η (1) είναι ισοδύναμη με την $f'(\xi)(\xi - x_0) - f(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi - x_0}$

Η εφαπτομένη της C_f στο A είναι

$\varepsilon: y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y - f(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi - x_0}(x - \xi)$ (2)

Η (2) για $x = x_0$ και $y = 0$ (συντεταγμένες του B) γίνεται

$0 - f(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi - x_0}(x_0 - \xi) \Leftrightarrow -f(\xi) = -f(\xi)$ αληθεύει.

Άρα το B είναι σημείο της ε .

ΘΕΜΑ 11^ο (Θ.Μ.Τ.)

α. Να αποδειχθεί ότι για την συνάρτηση $f(x) = \ln x$ εφαρμόζεται ΘΜΤ στο $[a, \beta]$

$(0 < a < \beta)$ και ισχύει $\frac{1}{\beta} < \frac{\ln \beta - \ln a}{\beta - a} < \frac{1}{a}$ (1)

β. Να αποδειχθεί ότι $e^e \pi^\pi > e^{2\pi}$ (2)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{1}{x}$ οπότε σε κάθε διάστημα

$[a, \beta]$ με $0 < a < \beta$ εφαρμόζεται για την f Θ.Μ.Τ. Από ΘΜΤ υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln \beta - \ln a}{\beta - a}$$

$$\text{οπότε (1)} \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{a} \stackrel{a, \beta, \xi > 0}{\Leftrightarrow} \beta > \xi > a \text{ αληθεύει}$$

$$\begin{aligned} \beta. \text{ Η (2) γράφεται ισοδύναμα } \ln(e^e \pi^\pi) &> \ln e^{2\pi} \Leftrightarrow \ln e^e + \ln \pi^\pi > 2\pi \ln e \Leftrightarrow \\ e \ln e - \pi \ln e &> \pi \ln e - \pi \ln \pi \Leftrightarrow (e - \pi) \ln e > \pi(\ln e - \ln \pi) \Leftrightarrow (\pi - e) \ln e < \pi(\ln \pi - \ln e) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\pi > e}{\pi} < \frac{\ln \pi - \ln e}{\pi - e} \quad (3) \end{aligned}$$

$$\text{Αλλά υπάρχει } \xi \in (e, \pi) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi) = \frac{f(\pi) - f(e)}{\pi - e} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln \pi - \ln e}{\pi - e}$$

$$\text{Οπότε (3)} \Leftrightarrow \frac{1}{\pi} < \frac{1}{\xi} \Leftrightarrow \pi > \xi \text{ αληθεύει.}$$

ΘΕΜΑ 12^ο (Θ. Bolzano, ΘΜΤ)

Δίνεται η συνεχής στο $[0, 1]$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(0)=1$ και $f(1)=0$. Να αποδείξετε ότι

α. Υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$

β. Αν, επί πλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0, 1)$ τέτοια ώστε $f'(x_1) \cdot f'(x_2) = 1$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

α. Η συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$ είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως διαφορά συνεχών και $g(0) = f(0) - 0 = 1 - 0 = 1 > 0$ και $g(1) = f(1) - 1 = 0 - 1 = -1 < 0$. Οπότε, από θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - x_0 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$$

β. Για την συνάρτηση f εφαρμόζεται ΘΜΤ σε καθένα από τα διαστήματα $[0, x_0]$ και $[x_0, 1]$. Οπότε υπάρχουν $x_1 \in (0, x_0)$ και $x_2 \in (x_0, 1)$ τέτοια ώστε

$$f'(x_1) = \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} = \frac{x_0 - 1}{x_0} \quad (1) \text{ και}$$

$$f'(x_2) = \frac{f(1) - f(x_0)}{1 - x_0} = \frac{0 - x_0}{1 - x_0} = \frac{x_0}{x_0 - 1} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχω $f'(x_1) \cdot f'(x_2) = 1$

ΘΕΜΑ 13^ο (Μονοτονία – ακρότατα – σύνολο τιμών - απόδειξη ανισότητας - λύση ανίσωσης)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2x}{e^x}$ και $g(x) = e^x - \frac{x^3}{3} - x - 1$

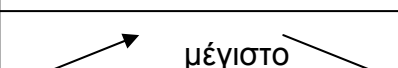
- α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα
- β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να αποδείξετε ότι $e^x > 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- γ. Να μελετήσετε την g ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα
- δ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της g
- ε. Να λύσετε την ανίσωση $g(e^{2x}) < g(4x^2 + 1)$

ΛΥΣΗ

α. $D_f = \mathbb{R}$ (αφού $e^x \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$) όπου η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \frac{2e^x - 2xe^x}{(e^x)^2} = \frac{2 - 2x}{e^x}$$

Σχηματίζουμε τον πίνακα

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'(x)	+	0	-
f			

Οπότε είναι $f \uparrow$ στο $(-\infty, 1]$, $f \downarrow$ στο $[1, +\infty)$

Στο 1 η f έχει (ολικό) μέγιστο το $f(1) = \frac{2}{e}$

β. Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{e^x} \cdot 2x \right) = +\infty(-\infty) = -\infty$

Οπότε σε συνδυασμό και με το α) ερώτημα έχουμε ότι $f(\mathbb{R}) = (-\infty, \frac{2}{e}]$

(Δεν χρειάζεται το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$)

Η ζητούμενη ανίσωση $e^x > 2x$ γίνεται $\frac{2x}{e^x} < 1$ (αφού $e^x > 0$) που αληθεύει

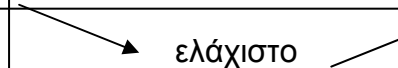
αφού $\frac{2x}{e^x} \leq \frac{2}{e}$ και $\frac{2}{e} < 1$

γ. $D_g = \mathbb{R}$ όπου η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με

$$g'(x) = e^x - x^2 - 1 \text{ και}$$

$$g''(x) = e^x - 2x > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ από β) ερώτημα}$$

Οπότε $g' \uparrow$ και επειδή $g'(0) = 0$ έχουμε τον πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'(x)	-	0	+
g			

Οπότε $g \downarrow$ στο $(-\infty, 0]$, $g \uparrow$ στο $[0, +\infty)$

Στο 0 η g έχει ελάχιστο το $g(0)=0$

δ. Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^x - \frac{x^3}{3} - x - 1 \right) = +\infty$ αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{x^3}{3} - x - 1 \right) = +\infty$$

Οπότε σε συνδυασμό και με το γ) ερώτημα έχουμε ότι $g(R) = [0, +\infty)$

ε. Είναι $e^{2x} > 0$, $4x^2 + 1 > 0$ και $g \uparrow$ στο $[0, +\infty)$ οπότε η ανίσωση $f(e^{2x}) < f(4x^2 + 1)$ γίνεται

$$e^{2x} < 4x^2 + 1 \Leftrightarrow e^{2x=y} < y^2 + 1 \Leftrightarrow e^y - y^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow g'(y) < 0 \Leftrightarrow y < 0 \Leftrightarrow 2x < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

ΘΕΜΑ 14^ο (Rolle – Μονοτονία)

α. Αν για τη συνάρτηση f εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[a, \beta]$ και $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ να δείξετε ότι $f(x) > f(a)$ για κάθε $x \in (a, \beta)$.

β. Αν για τη συνάρτηση g ισχύει $g''(x) < 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$ να δείξετε ότι $g(x) > g(0)(1+x) - xg(1)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

α. Από θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$. Αλλά $f''(x) < 0$ στο $[a, \beta]$ οπότε $f' \downarrow$ στο $[a, \beta]$. Οπότε για $x \in [a, \xi]$ είναι $x < \xi \Leftrightarrow f'(x) > f'(\xi) \Leftrightarrow f'(x) > 0$ και για $x \in (\xi, \beta]$ είναι $x > \xi \Leftrightarrow f'(x) < f'(\xi) \Leftrightarrow f'(x) < 0$. Άρα για το πρόσημο της f' και την μονοτονία της f έχουμε τον πίνακα

x	a	ξ	β
$f'(x)$	+	0	-
f			

Άρα $f \uparrow$ στο $[a, \xi]$ οπότε για $x \in (a, \xi]$, ισχύει $f(x) > f(a)$ και $f \downarrow$ στο $[\xi, \beta]$ οπότε για $x \in [\xi, \beta)$ ισχύει $f(x) > f(\beta) \Leftrightarrow f(x) > f(a)$

Άρα για κάθε $x \in (a, \beta)$ ισχύει $f(x) > f(a)$.

β. Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x) = g(x) - g(0)(1+x) + xg(1)$

Είναι $f'(x) = g'(x) - g(0) + g(1)$ και $f''(x) = g''(x)$, οπότε $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Επίσης $f(0) = g(0) - g(0) + 0 = 0$ και $f(1) = g(1) - 2g(0) + g(1) = 0$ Οπότε για την f εφαρμόζεται και το θεώρημα Rolle στο $[0, 1]$. Επομένως για κάθε $x \in (0, 1)$ ισχύει

$$f(x) > f(0) \Leftrightarrow g(x) - g(0)(1+x) + xg(1) > 0 \Leftrightarrow g(x) > g(0)(1+x) - xg(1)$$

ΘΕΜΑ 15^ο (Μονοτονία και με ορισμό – πλήθος ριζών)

α. Ναδειχτεί ότι αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ τότε ισχύει η ισοδυναμία $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2$ ($x_1, x_2 \in \Delta$).

β. Ναδειχτεί ότι η συνάρτηση $g(x) = e^x + x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x^2+x+1} - e^{x+1} + x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα την $x=0$ και για οποιαδήποτε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει $f(x)>0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

α. Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ τότε $f(x_1) < f(x_2)$ αφού $f \uparrow$ στο Δ . Αντίστροφα.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $f(x_1) < f(x_2)$. Αν $x_1 \geq x_2$ τότε $f(x_1) \geq f(x_2)$ (αφού $f \uparrow$ στο Δ) άτοπο. Άρα $x_1 < x_2$. Επομένως $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2$.

β. Είναι $g'(x) = e^x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε $g \uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

γ. Είναι $f(0) = e^1 - e^1 + 0 = 0$ οπότε το $x=0$ ρίζα της $f(x)=0$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow e^{x^2+x+1} - e^{x+1} + x^2 > 0 \Leftrightarrow e^{x^2+x+1} - e^{x+1} + x^2 + x + 1 - (x + 1) > 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{x^2+x+1} + x^2 + x + 1 > e^{x+1} + x + 1$$

$$\Leftrightarrow g(x^2 + x + 1) > g(x + 1) \stackrel{g \uparrow}{\Leftrightarrow} x^2 + x + 1 > x + 1 \Leftrightarrow x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$$

Άρα πράγματι για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $f(x) > 0$

ΘΕΜΑ 16^ο Ακρότατα – Κριτήριο Παρεμβολής – Σύνολο τιμών

α. Ναδειχτεί ότι $ax^{\frac{1}{a}} \leq x + a - 1$ για οποιαδήποτε $x > 0$ και $a > 1$

β. Ναδειχτεί ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x-2} \right)^{\frac{1}{x-5}} = 1$

γ. Ναδειχτεί ότι $2005x^{\frac{1}{2005}} - x - 2004 < e^x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

α. Η ζητούμενη γίνεται $ax^{\frac{1}{a}} - x - a + 1 \leq 0$

Έστω $f(x) = ax^{\frac{1}{a}} - x - a + 1$, $x \in (0, +\infty)$

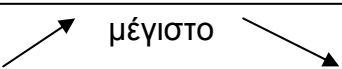
Αρκεί να δείξουμε ότι η f έχει μέγιστο το 0 ή κάποιον μικρότερο του 0.

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $D_f = (0, +\infty)$ με $f'(x) = x^{\frac{1}{a}-1} - 1$ και

$$f''(x) = \left(\frac{1}{a} - 1 \right) x^{\frac{1}{a}-2} < 0 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty) \text{ και } a \in (1, +\infty) \text{ οπότε } f' \downarrow.$$

$$\text{Λύνω την εξίσωση } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^{\frac{1}{a}-1} = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

Για το πρόσημο της f' και την μονοτονία της f σχηματίζω τον πίνακα

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f			

Άρα η f έχει μέγιστο το $f(1) = a - 1 - a + 1 = 0$

β. Η ανισότητα του **α)** ερωτήματος θέτοντας όπου x το $\sqrt{x-2}$ και όπου α το $x-5$ και θεωρώντας $x > 6$ (τότε $\sqrt{x-2} > 0$ και $x-5 > 1$) γίνεται

$$(x-5)(\sqrt{x-2})^{\frac{1}{x-5}} \leq \sqrt{x-2} + x-5-1 \Leftrightarrow (\sqrt{x-2})^{\frac{1}{x-5}} \leq \frac{\sqrt{x-2}}{x-5} + \frac{x-6}{x-5}$$

Αλλά για κάθε $x > 6$ είναι $\sqrt{x-2} > 1$ και αφού $x-5 > 0$ ισχύει $(\sqrt{x-2})^{\frac{1}{x-5}} > 1$

$$\text{Οπότε } 1 < (\sqrt{x-2})^{\frac{1}{x-5}} \leq \frac{\sqrt{x-2}}{x-5} + \frac{x-6}{x-5}$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x-2}}{x-5} + \frac{x-6}{x-5} \right) = 1$$

Επομένως από κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x-2})^{\frac{1}{x-5}} = 1$

γ. Η συνάρτηση f του **α** ερωτήματος για $a=2005$ γίνεται

$$f(x) = 2005x^{\frac{1}{2005}} - x - 2004 \text{ και ισχύει } f(x) \leq 0 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Επίσης $e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άρα για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει $2005x^{\frac{1}{2005}} - x - 2004 < e^x$

ΘΕΜΑ 17^ο (Ανισότητα – μονοτονία – ανισότητα με δύο μεταβλητές)

Να αποδείξετε ότι

α. Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $x > \eta \mu x \sigma \nu x$

β. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{\varepsilon \phi x}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

γ. Αν $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ τότε $\frac{\varepsilon \phi \alpha}{\varepsilon \phi \beta} < \frac{\alpha}{\beta}$

Απόδειξη

α. Έστω $\phi(x) = x - \eta \mu x \sigma \nu x$

Είναι $\phi'(x) = 1 - \sigma \nu x^2 + \eta \mu^2 x = 2\eta \mu^2 x > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Αλλά ϕ συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ οπότε $\phi \uparrow$ στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

Επομένως για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $\phi(x) > \phi(0) \Leftrightarrow x - \eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow x > \eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu x$

β. Είναι

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} x - \epsilon\phi x}{x^2} = \frac{x - \eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu x}{x^2 \sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\phi(x)}{x^2 \sigma\upsilon\nu^2 x} > 0 \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

άρα $f \uparrow$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

γ. Η ζητούμενη, αφού $\epsilon\phi\beta > 0$ και $\alpha > 0$, γίνεται ισοδύναμα $\frac{\epsilon\phi\alpha}{\alpha} < \frac{\epsilon\phi\beta}{\beta} \Leftrightarrow f(\alpha) < f(\beta)$ αληθεύει αφού $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ και $f \uparrow$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

ΘΕΜΑ 18^ο (Μονοτονία – κοίλα – πλήθος ριζών)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$ και $g(x) = e^x \ln x$

α. Να αποδείξετε ότι $g''(x) = e^x f(x)$

β. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα και να βρείτε ένα διάστημα πλάτους $\frac{1}{2}$ στο οποίο περιέχεται

δ. Να αποδείξετε ότι η g έχει μοναδικό σημείο καμπής.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

α. Είναι $D_f = D_g = (0, +\infty)$ όπου f και g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες.

Έχουμε $g'(x) = e^x \ln x + e^x \frac{1}{x}$ και

$$g''(x) = e^x \ln x + e^x \frac{1}{x} + e^x \frac{1}{x} - e^x \frac{1}{x^2} = e^x \left(\ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = e^x f(x)$$

β. Έχουμε

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3} > 0 \text{ για κάθε } x \in D_f \text{ οπότε } f \uparrow$$

$$\text{και } f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} - \frac{6}{x^4} = \frac{-x^2 + 4x - 6}{x^4} < 0 \text{ για κάθε } x \in D_f$$

οπότε η f στρέφει τα κοίλα κάτω

γ. Είναι $f \uparrow$ οπότε η $f(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα. Αρκεί, λοιπόν, να προσδιορίσουμε ένα διάστημα με πλάτος $\frac{1}{2}$, στα άκρα του οποίου, η f έχει ετερόσημες τιμές. Είναι $f(1) = \ln 1 + \frac{2}{1} - \frac{1}{1^2} = 1 > 0$ και επειδή η $f \uparrow$ θα ψάξω τιμή της f για $x < 1$.

Είναι $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln \frac{1}{2} + \frac{2}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -\ln 2 + 4 - 4 = -\ln 2 < 0$ άρα στο διάστημα

$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ η $f(x)=0$ έχει την μοναδική της ρίζα. (αφού f συνεχής).

δ. Από γ. ερώτημα υπάρχει $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$ και $f \uparrow$ οπότε έχουμε τον πίνακα

x	0	x_0	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+
$e^x f(x)$	-	0	+
$g''(x)$	-	0	+
g	Σ Κ		

Άρα η g έχει μοναδικό σημείο καμπής.

ΘΕΜΑ 19^ο (Κοίλα)

Α. Να αποδείξετε ότι αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα άνω σε ένα διάστημα Δ , τότε $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ (1) για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$.

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\ln(\ln x)$

α. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή

β. Να δείξετε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ ισχύει $\ln \frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{\ln x_1 \ln x_2}$

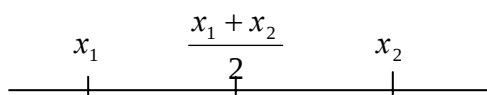
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Α. Η (1) είναι προφανής για $x_1=x_2$. Έστω τώρα $x_1 \neq x_2$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορώ να υποθέσω ότι $x_1 < x_2$.

Η σχέση (1) γίνεται ισοδύναμα

$$2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq f(x_1) + f(x_2) \Leftrightarrow f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1) < f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \quad (2)$$



Αλλά $\frac{x_1 + x_2}{2} - x_1 = x_2 - \frac{x_1 + x_2}{2} > 0$ αφού το $\frac{x_1 + x_2}{2}$ είναι μέσο του διαστήματος με άκρα x_1 και x_2 . Οπότε

$$(2) \Leftrightarrow \frac{f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - f(x_1)}{\frac{x_1 + x_2}{2} - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)}{x_2 - \frac{x_1 + x_2}{2}} \quad (3)$$

Για την f όμως εφαρμόζεται ΘΜΤ σε κάθε διάστημα που είναι υποσύνολο του Δ , αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο Δ . Οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in \left(x_1, \frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ και

$$\xi_2 \in \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, x_2\right) \quad \text{τέτοια} \quad \text{ώστε} \quad f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - f(x_1)}{\frac{x_1 + x_2}{2} - x_1} \quad \text{και}$$

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_2) - f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)}{x_2 - \frac{x_1 + x_2}{2}} \quad \text{οπότε} \quad (3) \Leftrightarrow f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) \quad \text{που αληθεύει αφού}$$

$$\xi_1 < \xi_2 \quad \text{και} \quad f' \uparrow.$$

Β.α. Πρέπει $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$ οπότε $D_f = (1, +\infty)$

$$\text{Έχουμε} \quad f'(x) = -\frac{1}{\ln x} (\ln x)' = -\frac{1}{x \ln x} \quad \text{και} \quad f''(x) = \frac{(x \ln x)'}{(x \ln x)^2} = \frac{\ln x + 1}{(x \ln x)^2} > 0 \quad \text{για}$$

κάθε $x \in (1, +\infty)$. Άρα η f είναι κυρτή.

β. Η f είναι κυρτή, οπότε από **Α** ερώτημα προκύπτει ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ ισχύει

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \Leftrightarrow -\ln\left(\ln \frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{-\ln(\ln x_1) - \ln(\ln x_2)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(\ln \frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{\ln(\ln x_1 \cdot \ln x_2)}{2} \Leftrightarrow \ln\left(\ln \frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \ln \sqrt{\ln x_1 \ln x_2} \stackrel{\ln \uparrow}{\Leftrightarrow} \ln \frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{\ln x_1 \ln x_2}$$

ΘΕΜΑ 20^ο (Συνέχεια – de l' Hospital - εφαπτομένη)

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{a^x + \beta^x + \gamma^x - 3}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{με } 1 \neq a, \beta, \gamma > 0.$$

Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

α. Να αποδειχθεί ότι $a \cdot \beta \cdot \gamma = 1$

β. Να αποδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$.

ΛΥΣΗ

α. Η f είναι συνεχής σε κάθε $x \neq 0$ ως πηλίκο συνεχών, ανεξάρτητα από τα α, β, γ .

Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + \beta^x + \gamma^x - 3}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a^x + \beta^x + \gamma^x - 3)'}{(x)'} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (a^x \ln a + \beta^x \ln \beta + \gamma^x \ln \gamma) = \ln a + \ln \beta + \ln \gamma = \ln(\alpha\beta\gamma)$$

Για να είναι η f συνεχής και στο 0 πρέπει

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \ln(\alpha\beta\gamma) = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma = 1$$

β. Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a^x + \beta^x + \gamma^x - 3}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + \beta^x + \gamma^x - 3}{x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a^x + \beta^x + \gamma^x - 3)'}{(x^2)'} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a + \beta^x \ln \beta + \gamma^x \ln \gamma}{2x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a^x \ln a + \beta^x \ln \beta + \gamma^x \ln \gamma)'}{(2x)'} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln^2 a + \beta^x \ln^2 \beta + \gamma^x \ln^2 \gamma}{2} = \frac{1}{2} (\ln^2 a + \ln^2 \beta + \ln^2 \gamma)$$

$$\text{Οπότε } f'(0) = \frac{1}{2} (\ln^2 a + \ln^2 \beta + \ln^2 \gamma).$$

Επομένως η εφαπτομένη της C_f στο $A(0, f(0))$ είναι

$$\varepsilon: y = \frac{1}{2} (\ln^2 a + \ln^2 \beta + \ln^2 \gamma) x$$

ΘΕΜΑ 21^ο (Απροσδιοριστία – κανόνας De l' Hospital – μονοτονία – σύνολο τιμών)

$$\text{Δίνεται ότι η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} e^x + x - x \ln x, & x > 0 \\ \lim_{h \rightarrow a} \left(\frac{h-a}{2} \varepsilon\phi \frac{\pi h}{2a} \right), & x = 0 \end{cases} \quad (a \neq 0) \quad \text{είναι}$$

συνεχής στο πεδίο ορισμού της

α. Να βρεθεί ο αριθμός a

β. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η f και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

γ. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=e$.

ΛΥΣΗ

α. Για το $f(0)$ θέτω $h-a = x \Leftrightarrow h = x+a$ ΟΠΟΤΕ $h \rightarrow a \Leftrightarrow x \rightarrow 0$

$$\text{Έχουμε } \lim_{h \rightarrow a} \frac{h-a}{2} \varepsilon\phi \frac{\pi h}{2a} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} \cdot \varepsilon\phi \frac{\pi(x+a)}{2a} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} \varepsilon\phi \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{2a} \right) =$$

$$-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} \sigma\phi \frac{\pi x}{2a} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{\pi x}{2a} \frac{\pi x}{2a} = k}{\eta\mu \frac{\pi x}{2a}} = -\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\pi}{2} \frac{\sigma\upsilon\nu k}{\eta\mu k} = -\frac{a}{\pi} \lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{k}{\eta\mu k} \sigma\upsilon\nu k \right) = -\frac{a}{\pi}$$

Οπότε $f(0) = -\frac{a}{\pi}$.

Επίσης $\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$

Οπότε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x - x \ln x) = 1$. Άρα πρέπει $-\frac{a}{\pi} = 1 \Leftrightarrow a = -\pi$

β. Είναι $f(x) = \begin{cases} e^x + x - x \ln x, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

Για $x > 0$ έχουμε $f'(x) = e^x + 1 - \ln x - 1 = e^x - \ln x$

Για $x \in (0, 1]$ είναι $\ln x \leq 0 \Leftrightarrow -\ln x \geq 0$ οπότε $f'(x) > 0$

Για $x > 1$ είναι $f''(x) = e^x - \frac{1}{x} > 0$ αφού $e^x > e > 1 > \frac{1}{x} \Rightarrow e^x - \frac{1}{x} > 0$ οπότε $f' \uparrow$

στο $[1, +\infty)$ (αφού είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$) άρα για $x > 1$ ισχύει $f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > e$

Επομένως για κάθε $x > 0$ ισχύει $f'(x) > 0$

Αλλά f συνεχής στο $[0, +\infty)$ επομένως $f \uparrow$ στο $[0, +\infty)$

Το σύνολο τιμών της f είναι $f([0, +\infty)) = [f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x))$

Έχουμε όμως $f(0) = 1$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x - x \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^x \left(1 + \frac{x}{e^x} - \frac{x \ln x}{e^x} \right) \right]$$

Όμως $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{e^x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x \ln x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 1}{e^x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x + 1)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x e^x} = 0$$

Οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty(1 + 0 - 0) = +\infty$. Επομένως $f([0, +\infty)) = [1, +\infty)$

γ. Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E = \int_1^e |f(x)| dx = \int_1^e f(x) dx$ αφού $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$

Έχουμε $E = \int_1^e (e^x + x - x \ln x) dx = \int_1^e (e^x + x) dx + \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} \right) \ln x dx =$

$$= \left[e^x + \frac{x^2}{2} \right]_1^e + \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} (\ln x)' dx = e^e + \frac{e^2}{2} - e - \frac{1}{2} + \frac{e^2 \ln e}{2} - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$e^e + \frac{e^2}{2} - e - \frac{1}{2} + \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e = e^e + e^2 - e - \frac{1}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = e^e + \frac{3}{4}e^2 - e - \frac{1}{4}$$

ΘΕΜΑ 22^ο (Ολοκλήρωμα – μονοτονία – σύνολο τιμών)

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $(1, +\infty)$ για την οποία ισχύει $f(x) = -\frac{xf'(x)}{2} \ln x$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$ και η γραφική της παράσταση τέμνει την ευθεία $x=e$ στο σημείο της με τεταγμένη 4. Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$

α. Να βρεθεί η συνάρτηση f

β. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = a$ έχει μοναδική ρίζα στο $(1, +\infty)$ για οποιοδήποτε $a \in (0, +\infty)$.

ΛΥΣΗ

α. Η δοθείσα σχέση γίνεται

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{2}{x \ln x} \Leftrightarrow (\ln |f(x)|)' = (-2 \ln |\ln x|)' \stackrel{\ln x > 0}{\Leftrightarrow} (\ln |f(x)|)' = (\ln (\ln x)^{-2})' \Leftrightarrow$$

$$\int (\ln |f(x)|)' dx = \int (\ln (\ln x)^{-2})' dx \Leftrightarrow \ln |f(x)| = \ln (\ln x)^{-2} + c \Leftrightarrow \ln |f(x)| = \ln (\ln x)^{-2} + \ln e^c \Leftrightarrow$$

$$|f(x)| = (\ln x)^{-2} \cdot e^c \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow \stackrel{x=e}{|f(e)|} = (\ln e)^{-2} e^c \Leftrightarrow 4 = e^c$$

$$\text{Οπότε } |f(x)| = \frac{4}{\ln^2 x}$$

Αλλά f συνεχής οπότε ή $f(x) = \frac{4}{\ln^2 x}$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$ ή $f(x) = -\frac{4}{\ln^2 x}$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$. (Διατηρεί πρόσημο αφού $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in D_f$)

Είναι όμως $f(e) = 4 > 0$. Άρα $f(x) = \frac{4}{\ln^2 x}$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$

β. Αρκεί να δείξουμε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$ (για να έχει μια τουλάχιστο ρίζα η εξίσωση $f(x) = a$, $a > 0$) και f “1-1” (για να έχει μια το

πολύ ρίζα). Είναι $f'(x) = -\frac{4(\ln^2 x)'}{(\ln x)^4} = -\frac{4 \cdot 2 \ln x (\ln x)'}{(\ln x)^4} = -\frac{8}{x \ln^3 x} < 0$ αφού $x > 1$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα οπότε και “1-1”. Το σύνολο τιμών της είναι $f((1, +\infty)) = (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x))$.

Αλλά $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{\ln^2 x} = 0$ αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4}{\ln^2 x} = +\infty \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x = 0 \text{ και } \ln^2 x > 0$$

Άρα $f((1, +\infty)) = (0, +\infty)$

Επομένως πράγματι η εξίσωση $f(x)=a$ έχει μοναδική ρίζα στο $(1, +\infty)$ για κάθε $a \in (0, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 23^ο (Παράγωγος – διαφορική εξίσωση – κανόνας de l' Hospital – εξίσωση – εμβαδό)

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f'(1) = 1$ και $f(xy) = xf(y) + yf(x)$ για όλα τα $x, y \in (0, +\infty)$

α. Να αποδείξετε ότι

i. $f'(x) = 1 + \frac{f(x)}{x}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

ii. $f(x) = x \ln x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

β. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

γ. Να λύσετε την εξίσωση $2f(x) = x^2 - 1$

δ. Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $h(x) = 2f(x)$, τη γραφική παράσταση της $g(x) = x^2 - 1$ και την ευθεία $x=e$.

ΛΥΣΗ

α. i. Δίνεται $f(xy) = xf(y) + yf(x) \xrightarrow{x=y=1} f(1) = f(1) + f(1) \Leftrightarrow f(1) = 0$

Επίσης δίνεται $f'(1) = 1 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(h) - f(1)}{h - 1} = 1 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(h)}{h - 1} = 1$

Είναι $f'(x) = \lim_{w \rightarrow x} \frac{f(w) - f(x)}{w - x}$

Θέτουμε $\frac{w}{x} = h \Leftrightarrow w = hx$ ΟΠΟΤΕ $w \rightarrow x \Leftrightarrow h \rightarrow 1$ και

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(hx) - f(x)}{hx - x} = \lim_{h \rightarrow 1} \frac{hf(x) + xf(h) - f(x)}{hx - x} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 1} \left(\frac{f(x)(h-1)}{x(h-1)} + \frac{xf(h)}{x(h-1)} \right) = \frac{f(x)}{x} + f'(1) = \frac{f(x)}{x} + 1$$

ii. Έχουμε

$$f'(x) = 1 + \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow f'(x) - \frac{f(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow \frac{f'(x)x - f(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = \frac{1}{x}$$

Οπότε $\int \left(\frac{f(x)}{x} \right)' dx = \int \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \ln|x| + c \xrightarrow{x>0} f(x) = x \ln x + cx \quad (1)$

Είναι $f'(x) = \ln x + 1 + c$ ΟΠΟΤΕ $f'(1) = 1 + c$

Αλλά $f'(1) = 1 \Leftrightarrow 1 + c = 1 \Leftrightarrow c = 0$

Άρα $(1) \Leftrightarrow f(x) = x \ln x$

β. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$

γ. Η ζητούμενη εξίσωση γίνεται $2f(x) - x^2 + 1 = 0$

Έστω $\phi(x) = 2f(x) - x^2 + 1 = 2x \ln x - x^2 + 1$

Είναι $\phi'(x) = 2 \ln x + 2 - 2x$ και $\phi''(x) = \frac{2}{x} - 2$

x	0	1	$+\infty$
$\phi''(x)$	+	0	-
ϕ'		μέγιστο	

Οπότε $\phi'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ με το “=” να ισχύει μόνο για $x=1$.

Επομένως η ϕ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση. Άρα η εξίσωση $\phi(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα.

Είναι φανερό όμως ότι $\phi(1) = 2 \cdot 1 \ln 1 - 1^2 + 1 = 0$. Άρα η εξίσωση $\phi(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα την $x=1$.

δ. Η εξίσωση $h(x) = g(x)$ γίνεται

$2f(x) = x^2 - 1 \Leftrightarrow \phi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ μοναδική ρίζα

Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E = \int_1^e |h(x) - g(x)| dx$

Αλλά $h(x) - g(x) = \phi(x)$ και $\phi \downarrow$ οπότε για $x \geq 1$ ισχύει $\phi(x) \leq 0$

Άρα

$$\begin{aligned}
 E &= \int_1^e (-h(x) + g(x)) dx = \int_1^e (-2x \ln x + x^2 - 1) dx = -\int_1^e (x^2)' \ln x dx + \int_1^e (x^2 - 1) dx = \\
 &= -\left[x^2 \ln x\right]_1^e + \int_1^e x^2 (\ln x)' dx + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^e = -e^2 \ln e + 1^2 \ln 1 + \int_1^e x^2 \frac{1}{x} dx + \frac{e^3}{3} - e - \left(\frac{1^3}{3} - 1\right) = \\
 &= -e^2 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e + \frac{e^3}{e} - e + \frac{2}{3} = -e^2 + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{e^3}{3} - e + \frac{2}{3} = \frac{e^3}{3} - \frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 24^ο (Θ.Μ.Τ. – Ολοκλήρωμα με αντικατάσταση)

Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f , για την οποία ισχύει $2f(2x) - f(x) = 2x$ (1), $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $F(x) = x \int_1^2 f(xt) dx - x^2 + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1 \in (0, 1)$ και $x_2 \in (1, 2)$ τέτοια ώστε $f'(x_1) + 2f'(x_2) = 2$.

β. Να αποδείξετε ότι η F είναι σταθερή και να βρείτε την τιμή της.

γ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^4 f(x) dx$

ΛΥΣΗ

α. (1) $\xRightarrow{x=0} 2f(0) - f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$

(1) $\xRightarrow{x=1} 2f(2) - f(1) = 2$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε εφαρμόζεται ΘΜΤ σε κάθε διάστημα. Επομένως υπάρχουν $x_1 \in (0, 1)$ και $x_2 \in (1, 2)$ τέτοια ώστε

$$f'(x_1) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) \text{ και}$$

$$f'(x_2) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = f(2) - f(1) \Leftrightarrow 2f'(x_2) = 2f(2) - 2f(1)$$

Οπότε $f'(x_1) + 2f'(x_2) = 2$

β. Για το ολοκλήρωμα $I_1 = x \int_1^2 f(xt) dt = \int_1^2 f(xt) x dt$ θέτουμε $u = xt = g(t)$ οπότε

$$u_1 = g(1) = x, \quad u_2 = g(2) = 2x \text{ και } du = x dt \text{ οπότε } I_1 = \int_x^{2x} f(u) du$$

Οπότε $F(x) = \int_x^{2x} f(u) du - x^2 + 3$

$$\text{Έχουμε } F'(x) = \left(\int_1^{2x} f(u) du - \int_1^x f(u) du - x^2 + 3 \right)' =$$

$$f(2x)(2x)' - f(x) - 2x \stackrel{(1)}{=} 2f(2x) - f(x) - 2x = 0$$

Οπότε F σταθερή

Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $F(x) = F(0) = 0 \int_1^2 f(0) dt - 0^2 + 3 = 3$

γ. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε

$$F(x) = \int_x^{2x} f(u) du - x^2 + 3 \Leftrightarrow \int_x^{2x} f(u) du = x^2 \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} (2) &\Rightarrow \int_1^{x=1} f(u) du = 1 \\ (2) &\Rightarrow \int_2^{x=2} f(u) du = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \int_1^4 f(x) dx \stackrel{(+)}{=} 5 \Leftrightarrow I = 5$$

ΘΕΜΑ 25^ο (Μονοτονία – σύνολο τιμών – εμβαδό)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\eta\mu x}$, $x \in (0, \pi)$

α. Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

β. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f

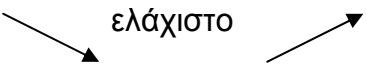
γ. Να αποδειχθεί ότι το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από την C_f τον άξονα

x και τις ευθείες $x = \frac{\pi}{3}$ και $x = \frac{\pi}{2}$ είναι $E = \frac{1}{2} \ln 3$.

ΛΥΣΗ

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με $f'(x) = \frac{-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$

Σχηματίζουμε τον πίνακα

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f'(x)$	-	0	+
f			

Άρα $f \downarrow$ στο $(0, \frac{\pi}{2}]$, $f \uparrow$ στο $[\frac{\pi}{2}, \pi)$

Στο $\frac{\pi}{2}$ η f έχει ελάχιστο το $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\eta\mu \frac{\pi}{2}} = 1$

β. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\eta\mu x} = +\infty$ αφού $\eta\mu x > 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \eta\mu x = 0$

Οπότε $f((0, \pi)) = [1, +\infty)$ (Δεν χρειάζεται το $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$ αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$)

γ. Είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\eta\mu x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{2\varepsilon\phi \frac{x}{2}}{1 + \varepsilon\phi^2 \frac{x}{2}}} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \varepsilon\phi^2 \frac{x}{2}}{2} \cdot \frac{1}{\varepsilon\phi \frac{x}{2}} dx =$$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\varepsilon\phi \frac{x}{2}} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\varepsilon\phi \frac{x}{2})' \cdot \frac{1}{\varepsilon\phi \frac{x}{2}} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\ln \left(\varepsilon\phi \frac{x}{2} \right) \right)' dx = \left[\ln \left(\varepsilon\phi \frac{x}{2} \right) \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \ln \left(\varepsilon\phi \frac{\pi}{4} \right) - \ln \left(\varepsilon\phi \frac{\pi}{6} \right) = \ln 1 - \ln \frac{\sqrt{3}}{3} = -\ln \sqrt{3} + \ln 3 = -\frac{1}{2} \ln 3 + \ln 3 = \frac{1}{2} \ln 3$$

Β' τρόπος

$$E = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\eta \mu x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta \mu x}{1 - \sigma \upsilon \nu^2 x} dx$$

Θέτω $u = \sigma \upsilon \nu x = g(x)$ οπότε $du = -\eta \mu x dx \Leftrightarrow -du = \eta \mu x dx$

$$u_1 = g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sigma \upsilon \nu \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \text{ και } u_2 = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sigma \upsilon \nu \frac{\pi}{2} = 0$$

Οπότε

$$E = \int_{\frac{1}{2}}^0 \left(-\frac{1}{1-u^2}\right) du = -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{u^2-1} du$$

Θα βρω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\frac{1}{u^2-1} = \frac{\alpha}{u-1} + \frac{\beta}{u+1} \Leftrightarrow 1 = \alpha(u+1) + \beta(u-1) \Leftrightarrow$$

$$1 = (\alpha + \beta)u + \alpha - \beta \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Οπότε } E = -\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\frac{1}{2}}{u-1} - \frac{\frac{1}{2}}{u+1} \right) du = -\frac{1}{2} [\ln|u-1| - \ln|u+1|]_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$-\frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{2} - \ln \frac{3}{2} \right) = -\frac{1}{2} (-\ln 2 - \ln 3 + \ln 2) = \frac{1}{2} \ln 3$$

ΘΕΜΑ 26^ο Εφαπτομένη – ανισότητα – εμβαδό

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 \ln x$

α. Ναδειχθεί ότι υπάρχει ένα μόνο σημείο Α της C_f , στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, το οποίο και να βρεθεί.

β. Ναδειχθεί $\ln x^{x^3} \geq -\frac{1}{3e}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

γ. Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=x_A$ όπου x_A η τετμημένη του σημείου Α του πρώτου ερωτήματος.

ΛΥΣΗ

α. Είναι $D_f = (0, +\infty)$ όπου f παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = 3x^2 \ln x + x^2 = x^2(3 \ln x + 1)$$

Λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3 \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ μοναδική

λύση. Οπότε σε ένα μόνο σημείο η εφαπτομένη είναι παράλληλη του $x'x$.

Είναι $f\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) = \left(e^{-\frac{1}{3}}\right)^3 \ln e^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}e^{-1} = -\frac{1}{3e}$. Επομένως το ζητούμενο σημείο είναι $A\left(\frac{1}{\sqrt[3]{e}}, -\frac{1}{3e}\right)$.

β. Για το πρόσημο της f' και την μονοτονία της f σχηματίζουμε τον πίνακα

x	0	$e^{-\frac{1}{3}}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	↗ ελάχ ↘		

Άρα για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει $f(x) \geq f(e^{-\frac{1}{3}}) \Leftrightarrow x^3 \ln x \geq -\frac{1}{3e} \Leftrightarrow \ln x^{x^3} \geq -\frac{1}{3e}$

γ. Λύνω την $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 \ln x = 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$\begin{aligned} E &= \int_{e^{-\frac{1}{3}}}^1 |f(x)| dx = \int_{e^{-\frac{1}{3}}}^1 x^3 \ln x dx \stackrel{\ln x \leq 0}{=} - \int_{e^{-\frac{1}{3}}}^1 \left(\frac{x^4}{4}\right)' \ln x dx = - \left[\frac{x^4}{4} \ln x \right]_{e^{-\frac{1}{3}}}^1 + \int_{e^{-\frac{1}{3}}}^1 \frac{x^4}{4} (\ln x)' dx = \\ &= -\frac{1}{4} \ln 1 + \frac{\left(e^{-\frac{1}{3}}\right)^4}{4} \ln e^{-\frac{1}{3}} + \int_{e^{-\frac{1}{3}}}^1 \frac{x^4}{4} \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{3} \cdot \frac{e^{-\frac{4}{3}}}{4} + \left[\frac{x^4}{16} \right]_{e^{-\frac{1}{3}}}^1 = -\frac{e^{-\frac{4}{3}}}{12} + \frac{1}{16} - \frac{(e^{-\frac{1}{3}})^4}{16} = \\ &= -\frac{e^{-\frac{4}{3}}}{12} + \frac{1}{16} - \frac{e^{-\frac{4}{3}}}{16} = \frac{-7 + 3e^{\frac{4}{3}}}{48e^{\frac{4}{3}}} = \frac{3e^{\frac{4}{3}} - 7}{48e^{\frac{4}{3}}} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 27^ο (Κοίλα - Εμβαδό)

α. Δίνεται η τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία $f^{(3)}(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f^{(3)}(0) \geq 0$ και $f''(0) = 0$. Να δειχτεί ότι η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$ και κυρτή στο $[0, +\infty)$.

β. Να μελετηθεί ως προς τα κοίλα η συνάρτηση $f(x) = -e^{-x} - 3 - x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$

γ. Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$.

ΛΥΣΗ

α. Αφού η f'' είναι παραγωγίσιμη θα είναι και συνεχής. Για το πρόσημο της $f^{(3)}$ και την μονοτονία της f'' σχηματίζουμε τον πίνακα.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f^{(3)}(x)$	+		+
f''	↗ ↘		

Αλλά $f''(x) = 0$ οπότε για $x > 0$ ισχύει $f''(x) > 0$ και για $x < 0$ ισχύει $f''(x) < 0$.
Επομένως στο $(-\infty, 0]$ η f είναι κοίλη και στο $[0, +\infty)$ η f είναι κυρτή.

β. Έχουμε $f'(x) = e^{-x} - 1 + x + \frac{x^2}{2}$, $f''(x) = -e^{-x} + 1 + x$ και $f^{(3)}(x) = e^{-x} + 1 > 0$
και $f''(0) = 0$ άρα από **α)** ερώτημα η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty, 0]$ και
άνω στο $[0, +\infty)$.

γ. Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E = \int_0^1 |f(x)| dx$. Είναι $f'' \uparrow$ και $f''(0) = 0$ οπότε
για $x > 0$ ισχύει $f''(x) > 0$. Αλλά f' συνεχής στο $[0, +\infty)$ οπότε $f' \uparrow$ στο
 $[0, +\infty)$. Όμως $f'(0) = 0$ οπότε για $x > 0$ ισχύει $f'(x) > 0$. Αλλά f συνεχής στο
 $[0, +\infty)$ οπότε $f \uparrow$ στο $[0, +\infty)$. Επομένως για $0 \leq x \leq 1$ ισχύει
 $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$.

Είναι $f(0) = -4$ και $f(1) = -e^{-1} - 3 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{e} - 4 + \frac{4}{6} = -\frac{1}{e} - 4 + \frac{2}{3} < 0$

άρα για κάθε $x \in [0, 1]$ είναι $f(x) < 0$.

$$\begin{aligned} \text{Οπότε } E &= \int_0^1 (-f(x)) dx = \int_0^1 (e^{-x} + 3 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}) dx = \\ &= \left[-e^{-x} + 3x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} \right]_0^1 = -e^{-1} + 3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + 1 = \\ &= -\frac{1}{e} + 4 + \frac{12 - 4 - 1}{24} = -\frac{1}{e} + 4 + \frac{7}{24} = \frac{103e - 24}{24} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 28^ο (Συνάρτηση οριζόμενη από ολοκλήρωμα)

Θεωρούμε την συνεχή στο διάστημα $[a, \beta]$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει
 $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$. Να αποδείξετε ότι

α. Για την συνάρτηση $h(x) = \int_a^x f(t) dt \int_x^\beta f(t) dt$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του
θεωρήματος Rolle στο $[a, \beta]$

β. Αν $\xi \in (a, \beta)$ με $h'(\xi) = 0$ τότε η ευθεία $x = \xi$ χωρίζει το χωρίο που καθορίζεται
από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = a$ και $x = \beta$ σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

α. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ με

$$h'(x) = \left(\int_a^x f(t) dt \right)' \int_x^\beta f(t) dt + \int_a^x f(t) dt \left(\int_x^\beta f(t) dt \right)' = f(x) \int_x^\beta f(t) dt - f(x) \int_a^x f(t) dt$$

$$\text{Επίσης } \left. \begin{aligned} h(a) &= \int_a^a f(t) dt \int_a^\beta f(t) dt = 0 \\ h(\beta) &= \int_a^\beta f(t) dt \int_\beta^\beta f(t) dt = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(a) = h(\beta)$$

Άρα για την h ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[a, \beta]$

β. Η f έχει θετικές τιμές στο $[\alpha, \beta]$ οπότε αρκεί $\int_{\alpha}^{\xi} f(x)dx = \int_{\xi}^{\beta} f(x)dx$

$$\text{Αλλά } h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) \int_{\xi}^{\beta} f(t)dt - f(\xi) \int_{\alpha}^{\xi} f(t)dt = 0 \stackrel{f(\xi) \neq 0}{\Leftrightarrow} \int_{\alpha}^{\xi} f(t)dt = \int_{\xi}^{\beta} f(t)dt$$

ΘΕΜΑ 29^ο (Μιγαδικοί, ασύμπτωτες, εμβαδό)

Δίνεται ο σταθερός μιγαδικός $w \neq 0$.

α. Να αποδειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(z)$ του μιγαδικού επιπέδου, για τους οποίους ισχύει

$$\left| z \right|^2 - 2 \begin{vmatrix} \operatorname{Re}(z) & \operatorname{Im}(z) \\ -\operatorname{Im}(w) & \operatorname{Re}(w) \end{vmatrix} = 0 \quad (1) \text{ είναι κύκλος με κέντρο την εικόνα του } w.$$

β. Αν $|w| = 4$ και ρ η ακτίνα του παραπάνω κύκλου, τότε να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x \ln x$, την ασύμπτωτη στο $+\infty$ της συνάρτησης $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2} - x$, την κατακόρυφη ασύμπτωτη της συνάρτησης $\phi(x) = \frac{2x^2 - 5x + 7}{x - e}$ και την ευθεία $x = \rho$.

ΛΥΣΗ

α. Έστω $w = a + \beta i$ και $z = x + yi$ τότε

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2 \begin{vmatrix} x & y \\ -\beta & a \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2\beta y = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2 = a^2 + \beta^2 \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - \beta)^2 = |w|^2$$

που παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(a, \beta)$ δηλαδή την εικόνα του w .

β. Είναι

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 2} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 2} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1} = \frac{2 + 0}{\sqrt{1 + 0 + 0} + 1} = \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

Οπότε η ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$ είναι η $y=1$

Επίσης $D_y = R - \{e\}$ όπου φ συνεχής και

$$\lim_{x \rightarrow e^+} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow e^+} \left(\frac{1}{x - e} (2x^2 - 5x + 7) \right) = +\infty (2e^2 - 5 \cdot e + 7) = +\infty \text{ άρα η } x=e \text{ μοναδική}$$

κατακόρυφη ασύμπτωτη. Ακόμη $|w| = 4$ οπότε $\rho=4$. Άρα το ζητούμενο

εμβαδό είναι $E = \int_e^4 |f(x) - 1| dx$. Αλλά για $x \geq e$ ισχύει $f(x) \geq e$ οπότε

$$\begin{aligned}
 E &= \int_e^4 (f(x) - 1) dx = \int_e^4 \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln x dx - \int_e^4 dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_e^4 - \int_e^4 \frac{x^2}{2} (\ln x)' dx - (4 - e) = \\
 &= 8 \ln 4 - \frac{e^2}{2} - \int_e^4 \frac{x}{2} dx - 4 + e = 8 \ln 4 - \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_e^4 - 4 + e = 8 \ln 4 - \frac{e^2}{2} - 4 + \frac{e^2}{4} - 4 + e = \\
 &= 8 \ln 4 - \frac{e^2}{4} + e - 8
 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 30^ο (Μονοτονία - Ολοκλήρωμα)

Δίνονται οι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν $f'(x) = 3e^{3e^x - 1 + x - f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 2$, και $g'(x) = 2g(x) - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της g τέμνει τον $y'g$ στο ίδιο σημείο που τον τέμνει και η f ενώ βρίσκεται όλη πάνω από την ευθεία $y = 1$.

α. Ναδειχθεί ότι οι συναρτήσεις f και g είναι γνησίως αύξουσες.

β. Να βρεθούν οι συναρτήσεις f και g και ναδειχθεί ότι οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν δύο κοινά σημεία.

γ. Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g .

ΛΥΣΗ

α. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $3e^{3e^x + x - 1 - f(x)} > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$ άρα $f \uparrow$ στο $\mathbb{R}$. Δίνεται $g(x) > 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2g(x) - 2 > 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0$ άρα $g \uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

β. Είναι

$$f'(x) = 3e^{3e^x + x - 1 - f(x)} \Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)} = 3e^x e^{3e^x - 1} \Leftrightarrow$$

$$(e^{f(x)})' = (e^{3e^x - 1})' \Leftrightarrow \int (e^{f(x)})' dx = \int (e^{3e^x - 1})' dx \Leftrightarrow e^{f(x)} = e^{3e^x - 1} + c \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow e^{f(0)} = e^{3e^0 - 1} + c \Leftrightarrow e^2 = e^2 + c \Leftrightarrow c = 0 \quad \text{οπότε}$$

$$e^{f(x)} = e^{3e^x - 1} \Leftrightarrow f(x) = 3e^x - 1$$

Επίσης

$$g'(x) = 2(g(x) - 1) \Leftrightarrow \frac{g'(x)}{g(x) - 1} = 2 \Leftrightarrow$$

$$(\ln|g(x) - 1|)' = (2x)' \Leftrightarrow \int (\ln(g(x) - 1))' dx = \int (2x)' dx$$

$$\Leftrightarrow \ln(g(x) - 1) = 2x + c \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow \ln(g(0) - 1) = 0 + c \Leftrightarrow c = 0 \quad \text{οπότε}$$

$$\ln(g(x) - 1) = 2x \Leftrightarrow g(x) - 1 = e^{2x} \Leftrightarrow g(x) = e^{2x} + 1$$

Η εξίσωση $f(x) = g(x)$ γίνεται

$$3e^x - 1 = e^{2x} + 1 \Leftrightarrow e^{2x} - 3e^x + 2 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$y = 1 \quad \text{ή} \quad y = 2 \Leftrightarrow e^x = 1 \quad \text{ή} \quad e^x = 2 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = \ln 2$$

Άρα οι C_f και C_g έχουν δύο κοινά σημεία.

$$\gamma. E = \int_0^{\ln 2} |f(x) - g(x)| dx = \int_0^{\ln 2} |3e^x - 1 - e^{2x} - 1| dx = \int_0^{\ln 2} |-e^{2x} + 3e^x - 2| dx$$

$$\text{Είναι } -e^{2x} + 3e^x - 2 = -(e^x - 1)(e^x - 2)$$

x	$-\infty$	0	$\ln 2$	$+\infty$
$e^x - 1$	-	0	+	+
$e^x - 2$	-	-	0	+
$-(e^x - 1)(e^x - 2)$	-	0	+	-

$$\text{Άρα } E = \int_0^{\ln 2} (-e^{2x} + 3e^x - 2) dx = \left[-\frac{e^{2x}}{2} + 3e^x - 2x \right]_0^{\ln 2} =$$

$$-\frac{e^{2\ln 2}}{2} + 3e^{\ln 2} - 2\ln 2 - \left(-\frac{e^0}{2} + 3e^0 - 2 \cdot 0 \right) = -2 + 6 - 2\ln 2 + \frac{1}{2} - 3 = \frac{3}{2} - 2\ln 2$$

Παρατήρηση

Το α ερώτημα θα μπορούσε να λυθεί μετά το β και με χρήση αυτού.

ΘΕΜΑ 31^ο (Bolzano – Rolle – De l' Hospital – Ολοκλήρωμα)

Δίνεται η συνάρτηση $\phi(x) = x \ln x$, $x > 0$ και έστω $a = \lim_{x \rightarrow 0} \phi(x)$. Δίνεται ακόμη η τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ συνάρτηση g με θετικές τιμές στο διάστημα $(0, 1)$ για την οποία ισχύουν $\int_0^2 g(x) dx < 0$, $g(a) = 0$ και $g'(0) = 0$.

Δίνεται ακόμη συνάρτηση $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^{x^2}} \int_0^x g(t) dt, & x > a \\ 0, & x = a \end{cases}$$

α . Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια η συνάρτηση f

β . Ναδειχθεί ότι υπάρχει $\rho \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f(\rho) = 0$

γ . Ναδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0

δ . Ναδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$

ΛΥΣΗ

α. Αρχικά $a = \lim_{x \rightarrow 0} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$

οπότε $g(0)=0$ και $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{ex^2} \int_0^x g(t)dt, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $(0, +\infty)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων με $f'(x) = -\frac{2}{ex^3} \int_0^x g(t)dt + \frac{g(x)}{ex^2}$ οπότε και συνεχής. Για τη συνέχεια στο 0 έχουμε $f(0)=0$ και

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x g(t)dt}{ex^2} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x g(t)dt\right)'}{(ex^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{2ex} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(g(x))'}{(2ex)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x)}{2e} \stackrel{(*)}{=} \frac{g'(0)}{2e} = 0$$

οπότε f συνεχής στο 0. Άρα f συνεχής στο $[0, +\infty)$.

* g τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ οπότε g' συνεχής στο 0.

β. Η $f(x) = \frac{1}{ex^2} \int_0^x g(t)dt$ είναι συνεχής στο $[1, 2]$.

Επίσης $f(1) \cdot f(2) = \frac{1}{e} \int_0^1 g(t)dt \cdot \frac{1}{4e} \int_0^2 g(t)dt < 0$ αφού $\int_0^2 g(t)dt < 0$ και

$\int_0^1 g(t)dt > 0$ επειδή $g(x) > 0$ στο $(0, 1)$ και g συνεχής στο $[0, 1]$. Άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει $\rho \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f(\rho)=0$.

γ. Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x g(t)dt}{ex^3} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{3ex^2} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x)}{6ex} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g''(x)}{6e} = \frac{g''(0)}{6e} \in \mathbb{R} \text{ άρα } f$$

παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = \frac{g''(0)}{6e}$

δ. Στο διάστημα $[0, \rho]$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f οπότε υπάρχει $\xi \in (0, \rho)$ άρα και $\xi \in (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

ΘΕΜΑ 32^ο (“1-1” – αντιστροφή – μονοτονία από αντίστροφη – όριο - εμβαδό)

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία $f^5(x) + f^3(x) + x = 5$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Ναδειχθεί ότι η f είναι “1-1”

β. Να βρεθεί η αντίστροφη της f

γ. Αν μια συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ τότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η ισοδυναμία $x_1 < x_2 \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$

δ. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η f

ε. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=0$

στ. Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ζ. Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την C_f τους άξονες x' και y' .

ΛΥΣΗ

α. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$ τότε

$$\left\{ \begin{array}{l} f^5(x_1) = f^5(x_2) \\ f^3(x_1) = f^3(x_2) \\ 3f(x_1) = 3f(x_2) \end{array} \right\} \text{ οπότε}$$

$$f^5(x_1) + f^3(x_1) + 3f(x_1) = f^5(x_2) + f^3(x_2) + 3f(x_2) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 5 - x_1 = 5 - x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η f είναι “1-1”

β. Είναι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ οπότε $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

Έστω $f(x) = y$ τότε $f^{-1}(y) = x$ οπότε

$$(1) \Leftrightarrow y^5 + y^3 + 3y + f^{-1}(y) = 5 \Leftrightarrow f^{-1}(y) = -y^5 - y^3 - 3y + 5$$

Άρα $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^{-1}(x) = -x^5 - x^3 - 3x + 5$

γ. Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Τότε αφού $g \downarrow$ ισχύει $g(x_1) > g(x_2)$

Αντίστροφα

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $g(x_1) > g(x_2)$

Αν $x_1 \geq x_2$ τότε αφού $g \downarrow$ θα είναι $g(x_1) \leq g(x_2)$ άτοπο

Άρα $x_1 < x_2$

Επομένως για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η ισοδυναμία $x_1 < x_2 \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$

δ. Είναι $(f^{-1})'(x) = -5x^4 - 3x^2 - 3 < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε η f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$

Επειδή το σύνολο τιμών της f^{-1} (πεδίο ορισμού της f) είναι το $\mathbb{R}$, υπάρχουν

$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f^{-1}(y_1) = x_1$ και $f^{-1}(y_2) = x_2$

Οπότε $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) \stackrel{f^{-1} \downarrow}{\Leftrightarrow} y_1 > y_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ άρα $f \downarrow$ στο $\mathbb{R}$

ε. $f(x) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(0) = x$. Αλλά $f^{-1}(0) = 5$ οπότε $x=5$

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα $x=5$

στ. Είναι $D_f = R = (-\infty, +\infty)$ και $f \downarrow$ οπότε $f(R) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right)$

Αλλά $f(R) = D_{f^{-1}} = R = (-\infty, +\infty)$. Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

ζ. Οι συμμετρικές γραμμές των C_f , $y'y$, $x'x$ ως προς την ευθεία $y=x$ είναι οι $C_{f^{-1}}$, $x'x$, $y'y$ αντίστοιχα. Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι ίσο (λόγω συμμετρίας) με το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις $C_{f^{-1}}$, $x'x$, $y'y$.

Είναι $f^{-1}(x) = 0 \Leftrightarrow -x^5 - x^3 - 3x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ φανερά ρίζα και μάλιστα μοναδική αφού $f^{-1} \downarrow$.

Άρα είναι $E = \int_0^1 f^{-1}(x) dx = \int_0^1 |-x^5 - x^3 - 3x + 5| dx$

Είναι $f^{-1}(1) = 0$ και $f^{-1} \downarrow$ οπότε στο $[0, 1]$ είναι $f^{-1}(x) \geq 0$ άρα

$$E = \int_0^1 (-x^5 - x^3 - 3x + 5) dx = \left[-\frac{x^6}{6} - \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 5x \right]_0^1 = -\frac{1}{6} - \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 5 = \frac{-2-3-18+60}{12} = \frac{37}{12}$$

ΘΕΜΑ 33^ο ΘΜΤ – μονοτονία - ολοκλήρωμα

Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $[-a, a]$ ($a > 0$) συνάρτηση f . Αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα να αποδείξετε ότι :

α. $f(x) > (x+a)f'(a) + f(-a)$ για κάθε $x \in (-a, a]$

β. $\frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(x) dx \geq af'(a) + f(-a)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

α. Η f είναι συνεχής στο $[-a, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(-a, x)$ οπότε από ΘΜΤ

υπάρχει $\xi \in (-a, x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x) - f(-a)}{x - (-a)} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(x) - f(-a)}{x + a}$

Αλλά $\xi < x$ και $x \leq a$. Επίσης $f' \downarrow$ οπότε $f'(\xi) > f'(a) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(-a)}{x + a} > f'(a) \Leftrightarrow$

$$x > -a \Leftrightarrow x + a > 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) - f(-a) > (x + a)f'(a) \Leftrightarrow f(x) > (x + a)f'(a) + f(-a) \quad (1)$$

β. Η (1) γίνεται $f(x) - (x + a)f'(a) - f(-a) > 0$ για κάθε $x \in (-a, a]$

Έστω $g(x) = f(x) - (x + a)f'(a) - f(-a)$ $x \in [-a, a]$

Είναι $g(x) > 0$ για κάθε $x \in (-a, a]$ και $g(-a) = 0$ οπότε $\int_{-a}^a g(x) dx > 0 \Leftrightarrow$

$$\int_{-a}^a f(x)dx - f'(a)\int_{-a}^a (x+a)dx - f(-a)\int_{-a}^a dx > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_{-a}^a f(x)dx > f'(a)\left[\frac{x^2}{2} + ax\right]_{-a}^a + f(-a)(a+a) \Leftrightarrow$$

$$\int_{-a}^a f(x)dx > f'(a)\left(\frac{a^2}{2} + a^2 - \left(\frac{(-a)^2}{2} + a(-a)\right)\right) + 2af(-a) \Leftrightarrow$$

$$\int_{-a}^a f(x)dx > 2a^2 f'(a) + 2af(-a) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2a}\int_{-a}^a f(x)dx > af'(a) + f(-a)$$