ΑΛΓΕΒΡΑ

Αριθμητική πρόοδος

Μια ακολουθία (α_ν), $\nu \in \mathbb{N}^*$ λέγεται αριθμητική πρόοδος αν κάθε όρος της εκτός του πρώτου όρου προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση πάντα του ίδιου αριθμού, δηλαδή:

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega$$

Γενικός όρος αριθμητικής προόδου

Ο γενικός (νιοστός) όρος αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω δίνεται από τον τύπο:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$$

Αριθμητικός μέσος

Τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει:

$$2\beta = \alpha + \gamma \quad \text{ή} \quad \beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

Άθροισμα ν διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου

Το άθροισμα των ν πρώτων όρων αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω δίνεται από τον τύπο:

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu)$$

ο οποίος μπορεί να πάρει και τη μορφή:

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}[\,2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega\,]$$

Γεωμετρική πρόοδος

Μια ακολουθία (α_ν) με $\alpha_1 \neq 0$ λέγεται γεωμετρική πρόοδος αν κάθε όρος της εκτός του πρώτου όρου προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό, δηλαδή ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \lambda, \quad \lambda \neq 0$$

Γενικός όρος γεωμετρικής προόδου

Ο γενικός όρος γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ δίνεται από τον τύπο:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1}$$

Γεωμετρικός μέσος

Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνον αν ισχύει:

$$\beta^2 = \alpha\gamma$$

Ο θετικός αριθμός $\sqrt{\alpha\gamma}$ λέγεται γεωμετρικός μέσος των α και γ.

Άθροισμα ν διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου

Το άθροισμα των ν πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου δίνεται από τους τύπους:

$$S_\nu = \frac{\alpha_1(\lambda^\nu - 1)}{\lambda - 1}, \quad \text{αν } \lambda \neq 1 \qquad \text{και} \qquad S_\nu = \nu\alpha_1, \quad \text{αν } \lambda = 1$$

Άθροισμα των απείρων όρων γεωμετρικής προόδου

Αν σε μια γεωμετρική πρόοδο (α_ν) για το λόγο της λ ισχύει $|\lambda| < 1$, τότε το άθροισμα των άπειρων όρων της είναι:

$$S = \frac{\alpha_1}{1-\lambda}$$

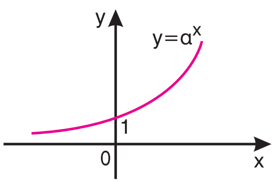
Εκθετική συνάρτηση

Έστω α ένας θετικός αριθμός. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \alpha^x$.
Η συνάρτηση αυτή στην περίπτωση που ισχύει $\alpha \neq 1$ λέγεται εκθετική συνάρτηση με βάση τον αριθμό α.

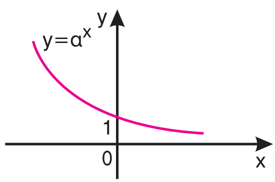
Στοιχειώδης μελέτη της εκθετικής συνάρτησης

1. **Πεδίο ορισμού:** $A = \mathbb{R}$
2. **Σύνολο τιμών:** $B = (0, +\infty)$.
3. **Συμμετρίες:** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης δεν παρουσιάζει συμμετρίες.
4. **Μονοτονία:** Η f είναι γνησίως αύξουσα αν $\alpha > 1$ και γνησίως φθίνουσα αν $0 < \alpha < 1$.
5. **Γραφική παράσταση:**

$\alpha > 1$



$0 < \alpha < 1$



- Για τις εκθετικές συναρτήσεις με τύπους $f(x) = \alpha^x$ και $g(x) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$g(x) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^x = \frac{1}{\alpha^x} = \alpha^{-x} = f(-x)$$

δηλαδή τα σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, g με αντίθετες τετμημένες, έχουν τις ίδιες τεταγμένες πράγμα που σημαίνει ότι αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y.

- Ο αριθμός e

Αποδεικνύεται ότι όταν ο θετικός ακέραιος ν αυξάνει απεριόριστα, τότε οι όροι της ακολουθίας (α_ν) με $\alpha_\nu = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu$ προσεγγίζουν ολοένα και περισσότερο έναν ορισμένο πραγματικό αριθμό.

Ο αριθμός αυτός είναι άρρητος και συμβολίζεται με e.
Για την εκθετική συνάρτηση με τύπο $f(x) = e^x$ ισχύουν όλες οι γνωστές ιδιότητες της συνάρτησης με τύπο $f(x) = \alpha^x$ με $\alpha > 1$.
Οι εκθετικές συναρτήσεις με βάση το e χρησιμοποιούνται συχνά στις σύγχρονες επιστήμες όπως η συνάρτηση $Q(t) = Q_0e^{ct}$ η οποία εκφράζει το νόμο της εκθετικής μεταβολής που αποτελεί ικανοποιητικό μοντέλο για πάρα πολλές εφαρμογές της Φυσικής, της Βιολογίας, στης Στατιστικής και άλλων επιστημών.

Λογάριθμοι

Θεωρούμε την εξίσωση $\alpha^x = \theta$ με $0 < \alpha \neq 1$ και $\theta > 0$. Η εξίσωση αυτή έχει μοναδική λύση την ονομάζουμε λογάριθμο του θ ως προς βάση α και τη συμβολίζουμε $\log_\alpha\theta$. Ισχύει η ισοδυναμία:

$$\alpha^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_\alpha\theta$$

Συνέπειες του ορισμού

- $\log_\alpha \alpha^x = x$ και $\alpha^{\log_\alpha \theta} = \theta$
- $\log_\alpha 1 = 0$ και $\log_\alpha \alpha = 1$

Ιδιότητες των λογάριθμων

Αν $0 < \alpha \neq 1$ τότε για οποιουσδήποτε $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ ισχύουν:

- $\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$
- $\log_\alpha(\theta_1 : \theta_2) = \log_\alpha\theta_1 - \log_\alpha\theta_2$
- $\log_\alpha \theta^\kappa = \kappa\log_\alpha\theta,\ \kappa \in \mathbb{R}$

Ειδικά:

$$\log_\alpha \sqrt[\nu]{\theta} = \log_\alpha \theta^{\frac{1}{\nu}} = \frac{1}{\nu}\log_\alpha\theta$$

Αλλαγή βάσης

Αν $0 < \alpha \neq 1$, $0 < \beta \neq 1$, τότε για κάθε $\theta > 0$ ισχύει:

$$\log_\beta \theta = \frac{\log_\alpha \theta}{\log_\alpha \beta}$$

Άμεση συνέπεια:

$$\log_\alpha \beta \cdot \log_\beta \alpha = 1$$

Λογαριθμική συνάρτηση

Έστω α ένας πραγματικός αριθμός με $0 < \alpha \neq 1$. Τότε για κάθε $x > 0$ μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε θετικό αριθμό x τον αριθμό $\log_\alpha x$, οπότε ορίζεται η συνάρτηση

$$f:\ (0,+\infty) \to \mathbb{R} \text{ με } f(x) = \log_\alpha x.$$

Τη συνάρτηση αυτή τη λέμε λογαριθμική συνάρτηση με βάση α.

Στοιχεία λογαριθμικής συνάρτησης

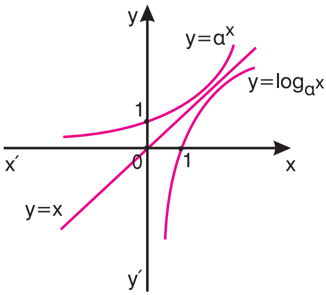
1. **Πεδίο ορισμού:** $A = (0,+\infty)$
2. **Σύνολο τιμών:** Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

3. Μονοτονία: Είναι γνησίως αύξουσα όταν $α > 1$.
Είναι γνησίως φθίνουσα όταν $0 < α < 1$.

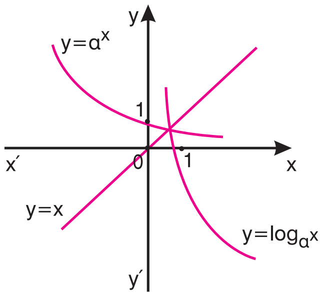
4. Σημεία τομής με τους άξονες
Τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Α(1,0) ενώ έχει ασύμπτωτο τον ημιάξονα Oy΄ όταν $α > 1$ και ασύμπτωτο τον ημιάξονα Oy όταν $0 < α < 1$.

5. Γραφική παράσταση
Η γραφική της παράσταση δεν παρουσιάζει συμμετρίες και φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.

$α > 1$



$0 < α < 1$



ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Λύσεις τριγωνομετρικών εξισώσεων

- $ημx = ημθ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2κπ + θ \\ \quad ή \\ x = 2κπ + π - θ \end{cases}, κ \in \mathbb{Z}$
- $συνx = συνθ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2κπ + θ \\ \quad ή \\ x = 2κπ - θ \end{cases}, κ \in \mathbb{Z}$
- $εφx = εφθ \Leftrightarrow x = κπ + θ,\ κ \in \mathbb{Z}$
- $σφx = σφθ \Leftrightarrow x = κπ + θ,\ κ \in \mathbb{Z}$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος γωνιών

- $συν(α + β) = συνασυνβ - ημαημβ$
- $συν(α - β) = συνασυνβ + ημαημβ$
- $ημ(α + β) = ημασυνβ + συναημβ$
- $ημ(α - β) = ημασυνβ - συναημβ$
- $εφ(α + β) = \dfrac{εφα + εφβ}{1 - εφαεφβ}$ με $συνα \neq 0,\ συνβ \neq 0,\ συν(α + β) \neq 0$
- $εφ(α - β) = \dfrac{εφα - εφβ}{1 + εφαεφβ}$ με $συνα \neq 0,\ συνβ \neq 0,\ συν(α - β) \neq 0$
- $σφ(α + β) = \dfrac{σφασφβ - 1}{σφα + σφβ}$ με $ημα \neq 0,\ ημβ \neq 0,\ ημ(α + β) \neq 0$
- $σφ(α - β) = \dfrac{σφασφβ + 1}{σφβ - σφα}$ με $ημα \neq 0,\ ημβ \neq 0,\ ημ(α - β) \neq 0$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 2α

- $ημ2α = 2ημασυνα$
- $συν2α = συν^2α - ημ^2α = 2συν^2α - 1 = 1 - 2ημ^2α$
- $εφ2α = \dfrac{2εφα}{1 - εφ^2α}$ με $συνα \neq 0$ και $συν2α \neq 0$
- $σφ2α = \dfrac{σφ^2α - 1}{2σφα}$ με $ημα \neq 0$ και $ημ2α \neq 0$

- $ημ^2α = \dfrac{1 - συν2α}{2}$
- $συν^2α = \dfrac{1 + συν2α}{2}$
- $εφ^2α = \dfrac{1 - συν2α}{1 + συν2α}$
- $σφ^2α = \dfrac{1 + συν2α}{1 - συν2α}$
- $ημ2α = \dfrac{2εφα}{1 + εφ^2α}$
- $συν2α = \dfrac{1 - εφ^2α}{1 + εφ^2α}$
- $ημ3α = 3ημα - 4ημ^3α$
- $συν3α = 4συν^3α - 3συνα$

Μετασχηματισμοί τριγωνομετρικών παραστάσεων

- $2ημασυνβ = ημ(α + β) + ημ(α - β)$
- $2συνασυνβ = συν(α + β) + συν(α - β)$
- $2ημαημβ = συν(α - β) - συν(α + β)$
- $ημΑ + ημΒ = 2ημ\dfrac{Α + Β}{2}συν\dfrac{Α - Β}{2}$
- $ημΑ - ημΒ = 2ημ\dfrac{Α - Β}{2}συν\dfrac{Α + Β}{2}$
- $συνΑ + συνΒ = 2συν\dfrac{Α + Β}{2}συν\dfrac{Α - Β}{2}$
- $συνΑ - συνΒ = -2ημ\dfrac{Α - Β}{2}ημ\dfrac{Α + Β}{2} = 2ημ\dfrac{Α + Β}{2}ημ\dfrac{Β - Α}{2}$

Η συνάρτηση f με τύπο f(x) = αημx + βσυνx

Η συνάρτηση $f(x) = αημx + βσυνx$ μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$f(x) = ρημ(x + φ)$$

όπου: $ρ = \sqrt{α^2 + β^2}$ και φ γωνία με: $συνφ = \dfrac{α}{ρ}$, $ημφ = \dfrac{β}{ρ}$

1. **Πεδίο ορισμού:** $A = \mathbb{R}$.
2. **Περιοδικότητα:** Η συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδο $T = 2π$.
3. **Ακρότατα:** Η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή ίση με $|ρ|$ και ελάχιστη τιμή ίση με $-|ρ|$.
4. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ρημ(x + φ)$ προκύπτει από τη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = ρημx$ στον $x'x$ κατά φ μονάδες δεξιά αν $φ < 0$ και αριστερά αν $φ > 0$.

Επίλυση τριγώνου

- Νόμος ημιτόνων

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\dfrac{α}{ημΑ} = \dfrac{β}{ημΒ} = \dfrac{γ}{ημΓ} = 2R$

όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου.

Συνέπειες

$\alpha = 2R\eta\mu A$, $\quad \beta = 2R\eta\mu B$, $\quad \gamma = 2R\eta\mu\Gamma$

$\eta\mu A = \frac{\alpha}{2R}$, $\quad \eta\mu B = \frac{\beta}{2R}$, $\quad \eta\mu\Gamma = \frac{\gamma}{2R}$

- Νόμος συνημιτόνων

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν:

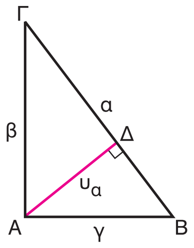
$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A \quad \beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu B \quad \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma$$

Συνέπειες

$$\sigma\upsilon\nu A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}, \quad \sigma\upsilon\nu B = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma}, \quad \sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta}$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

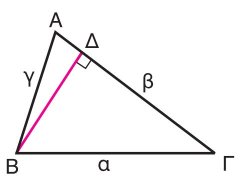
Μετρικές σχέσεις σε ορθογώνιο τρίγωνο



1) $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$ και $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$
2) $AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$ (Πυθαγόρειο θεώρημα)
3) $A\Delta^2 = \Delta B \cdot \Delta\Gamma$
4) $\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{\upsilon_\alpha^2}$

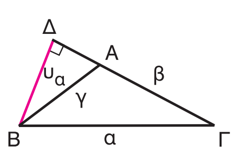
Μετρικές σχέσεις σε τυχαίο τρίγωνο

1. Θεώρημα οξείας γωνίας ($\hat{A} < 90^\circ$)



$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta$$

2. Θεώρημα αμβλείας γωνίας ($\hat{A} > 90^\circ$)



$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot A\Delta$$

Κριτήριο για το είδος τριγώνου ως προς τις γωνίες

Ισχύουν οι ισοδυναμίες:

1. $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} > 90^\circ$ **2.** $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} < 90^\circ$ **3.** $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} = 90^\circ$

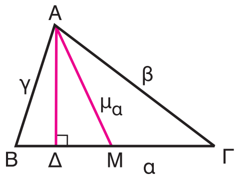
Νόμοι συνημιτόνων

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\text{συν}A$$

΄Υψος τριγώνου

$$\upsilon_\alpha = \frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}, \quad \tau = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$$

3. Θεωρήματα διαμέσων



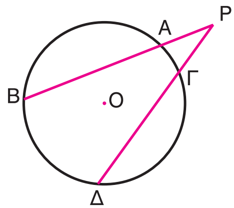
1ο θεώρημα: $\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$

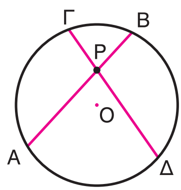
2ο θεώρημα: $\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha M\Delta \quad (\beta>\gamma)$

Τύποι διαμέσων

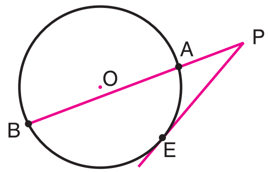
$$\mu_\alpha^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} \qquad \mu_\beta^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4} \qquad \mu_\gamma^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4}$$

Μετρικές σχέσεις σε κύκλο





τέμνουσες κύκλου
$PA \cdot PB = P\Gamma \cdot P\Delta$



Τέμνουσα και εφαπτομένη κύκλου
$PE^2 = PA \cdot PB$

Δύναμη σημείου P ως προς τον κύκλο

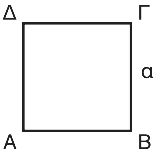
$$\Delta^P_{(0,P)} = \delta^2 - R^2 \quad \text{όπου } \delta = OP$$

Ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$\Delta^P_{(0,R)} > 0 \Leftrightarrow \delta > R \qquad \Delta^P_{(0,R)} < 0 \Leftrightarrow \delta < R \qquad \Delta^P_{(0,R)} = 0 \Leftrightarrow \delta = R$$

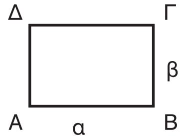
Εμβαδά επίπεδων σχημάτων

1. Τετραγώνου:



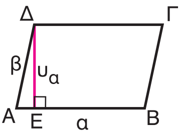
$(ΑΒΓΔ) = α^2$

2. Ορθογώνιου:



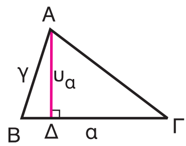
$(ΑΒΓΔ) = αβ$

3. Παραλληλόγραμμου:



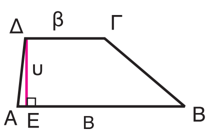
$(ΑΒΓΔ) = α \cdot υ_α$

4. Τριγώνου:



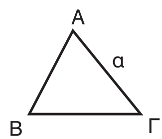
$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} α \cdot υ_α$

5. Τραπεζίου:



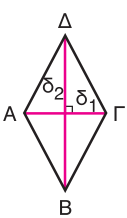
$(ΑΒΓΔ) = \frac{(Β + β)}{2} \cdot υ$

6. Ισόπλευρου τριγώνου:



$(ΑΒΓ) = \frac{α^2\sqrt{3}}{4}$

7. Ρόμβου:



$(ΑΒΓΔ) = \frac{1}{2} δ_1 δ_2$

Ο τύπος ισχύει για κάθε τετράπλευρο (κυρτό ή μη κυρτό) με κάθετες διαγώνιους.

Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου

$Ε = \sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}$, $\quad τ = \frac{1}{2}(α + β + γ)$

$Ε = τ \cdot ρ \quad$ ρ : ακτίνα εγγεγραμμένου κύκλου

$E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$ R : ακτίνα περιγεγραμμένου κύκλου

$E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A$

Νόμοι ημιτόνων

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2R$

Λόγοι εμβαδών τριγώνων και πολυγώνων

1. Αν δύο τρίγωνα ΑΒΓ, Α΄Β΄Γ΄, έχουν

- $\alpha = \alpha'$ τότε $\frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \frac{\upsilon_\alpha}{\upsilon_{\alpha'}}$
- $\upsilon_\alpha = \upsilon_{\alpha'}$ τότε $\frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \frac{\alpha}{\alpha'}$

2. Αν δύο τρίγωνα ΑΒΓ, Α΄Β΄Γ΄, είναι όμοια με λόγο ομοιότητας λ, τότε: $\frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \lambda^2$

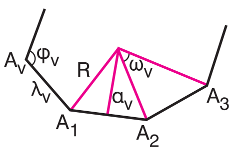
Η ίδια σχέση μεταξύ του εμβαδού τους ισχύει και στην περίπτωση που έχουμε όμοια πολύγωνα με λόγο ομοιότητας λ.

3. Αν για τα τρίγωνα ΑΒΓ, Α΄Β΄Γ΄ ισχύει $\hat{A} = \hat{A}'$ Þ $\hat{A} + \hat{A}' = 180^o$ τότε ισχύει:

$$\frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'}$$

Κανονικά πολύγωνα

Σε κάθε κανονικό ν - γωνο ισχύουν:



1. $\varphi_\nu = 180^\circ - \frac{360^\circ}{\nu}$

2. $\alpha_\nu^2 + \frac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2$

3. $P_\nu = \nu \cdot \lambda_\nu$ P_ν : περίμετρος

4. $\omega_\nu = \frac{360^\circ}{\nu}$

5. $E_\nu = \frac{1}{2}P_\nu \alpha_\nu$

Αν έχουμε δύο κανονικά ν - γωνα τότε ισχύουν: $\frac{\lambda_\nu}{\lambda_\nu'} = \frac{R}{R'} = \frac{\alpha_\nu}{\alpha_\nu'}$

Στοιχεία κανονικών πολυγώνων

	τετράγωνο	Κανονικό εξάγωνο	Ισόπλευρο τρίγωνο	Οκτάγωνο
πλευρά λ_ν	$\lambda_4 = R\sqrt{2}$	$\lambda_6 = R$	$\lambda_3 = R\sqrt{3}$	$\lambda_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$
απόστημα α_ν	$\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$	$\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$	$\alpha_3 = \frac{R}{2}$	$\alpha_8 = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

Τύπος του Αρχιμήδη

Αν ένα κανονικό ν - γωνο και ένα κανονικό 2ν - γωνο είναι εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο τότε ισχύουν:

$$\lambda_{2\nu}^2 = 2R(R - \alpha_\nu) \qquad \alpha_{2\nu}^2 = \frac{R}{2}(R + \alpha_\nu)$$

Μέτρηση κύκλου

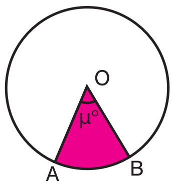
Μήκος κύκλου: $L = 2\pi R$

Μήκος τόξου: $= \dfrac{\pi R \mu}{180}$ (για τοξο μ°)

$= \alpha R$ (για τοξο α rad)

Εμβαδόν κυκλικού δίσκου: $E = \pi R^2$

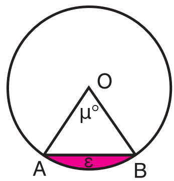
Εμβαδόν κυκλικού τομέα



$(\overset{\frown}{OAB}) = \dfrac{\pi R^2 \mu}{360}$ για τόξο μ°

$(\overset{\frown}{OAB}) = \dfrac{1}{2}\alpha R^2$ για τόξο α rad

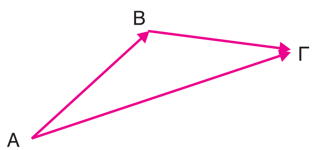
Εμβαδόν κυκλικού τμήματος



$\varepsilon = (\overset{\frown}{OAB}) - (OAB)$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Πρόσθεση διανυσμάτων

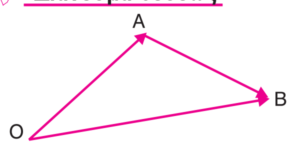


$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$

Ιδιότητες πρόσθεσης διανυσμάτων

- $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$
- $\left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \left(\vec{\beta} + \vec{\gamma}\right)$
- $\vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\alpha}$
- $\vec{\alpha} + \left(-\vec{\alpha}\right) = \vec{0}$

Διάνυσμα θέσεως



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

Μέτρο αθροίσματος διανυσμάτων

$$\left||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\right| \le |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \le |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$$

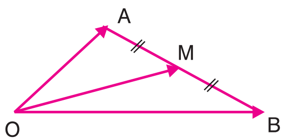
Ιδιότητες πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα

- $\lambda\left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right) = \lambda\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$
- $(\lambda + \mu)\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\alpha}$
- $\lambda\left(\mu\vec{\alpha}\right) = (\lambda\mu)\vec{\alpha}$

Συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων

Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα, με $\vec{\beta} \ne \vec{0}$, τότε: $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}, \ \lambda \in \mathbb{R}$

Διανυσματική ακτίνα μέσου τμήματος



$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

Μέτρο διανύσματος - Απόσταση σημείων

Αν $\vec{\alpha} = (x, y)$, τότε $|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Αν A (x_1, y_1) και B (x_2, y_2), τότε: $|\overrightarrow{AB}| = (AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Ορίζουμε ως εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τον πραγματικό αριθμό $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\varphi$, όπου φ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

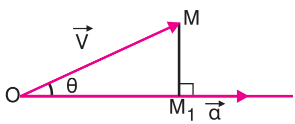
Αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$, τότε ορίζουμε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$. Ισχύουν

- $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{\alpha}$
- $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$
- $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$
- $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$
- $\vec{\alpha}^{\,2} = |\vec{\alpha}|$

Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, τότε είναι:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1x_2 + y_1y_2 \qquad \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Προβολή διανύσματος σε διάνυσμα



$$\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = \vec{\alpha} \cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}$$

ΕΥΘΕΙΑ

Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας

Αν Α (x_1, y_1) και Β (x_2, y_2) με $x_1 \neq x_2$, τότε είναι $\lambda_{AB} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Συνθήκη καθετότητας και παραλληλίας ευθειών

Αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντιστοίχως τότε:

- $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$
- $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$

Εξίσωση ευθείας

- Αν δοθούν ένα σημείο Α (x_0, y_0) και ο συντελεστής διεύθυνσης λ της ευθείας η εξίσωσή της είναι: $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$
- Αν δοθούν δύο σημεία Α (x_1, y_1) και Β (x_2, y_2) της ευθείας, με $x_1 \neq x_2$ η εξίσωσή της είναι:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Στην περίπτωση που είναι $x_1 = x_2$ η εξίσωση της ευθείας είναι: $x = x_1$

Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας

Κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$ με

Α 0 ή Β 0 και αντιστρόφως.

Απόσταση σημείου από ευθεία

Η απόσταση του σημείου $M(x_0, y_0)$ από την ευθεία ε: $Ax + By + \Gamma = 0$ δίνεται από τον τύπο: $d(M, \varepsilon) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Εμβαδόν τριγώνου

Το εμβαδόν ενός τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο: $(AB\Gamma) = \dfrac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})\right|$

ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

Εξίσωση κύκλου

- Η εξίσωση κύκλου με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ είναι: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$
- Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ με $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$

παριστάνει κύκλο κέντρου $K\left(-\dfrac{A}{2}, -\dfrac{B}{2}\right)$ και ακτίνας $\rho = \dfrac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}$

Εξίσωση παραβολής

- Η εξίσωση της παραβολής με εστία $E\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$ και διευθέτουσα δ: $x = -\dfrac{p}{2}$ είναι:

$$y^2 = 2px$$

- Η εξίσωση της παραβολής με εστία $E\left(0, \frac{p}{2}\right)$ και διευθέτουσα δ: $y = -\frac{p}{2}$ είναι:

$$x^2 = 2py$$

Εξίσωση έλλειψης

- Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες Ε΄ (–γ, 0) , Ε (γ, 0) και σταθερό άθροισμα 2α είναι:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \text{όπου } \beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$$

- Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες Ε΄ (0, –γ), Ε (0, γ) και σταθερό άθροισμα 2α είναι:

$$\frac{y^2}{\alpha^2} + \frac{x^2}{\beta^2} = 1, \quad \text{όπου } \beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$$

Εξίσωση υπερβολής

- Η εξίσωση της υπερβολής με εστίες Ε΄(–γ, 0) , Ε(γ, 0) και σταθερή διαφορά 2α είναι:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \text{όπου } \beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}$$

- Η εξίσωση της υπερβολής με εστίες Ε΄(0, –γ) , Ε(0, γ) και σταθερή διαφορά 2α είναι:

$$\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1, \quad \text{όπου } \beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}$$

Ευκλείδεια διαίρεση

Αν α και β είναι ακέραιοι αριθμοί με $\beta \neq 0$, τότε υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι κ και υ, τέτοιοι, ώστε: $\alpha = \kappa\beta + \upsilon, \ 0 \leq \upsilon < |\beta|$

Ιδιότητες της διαιρετότητας

- Αν α/β και β/α, τότε α = β ή α = –β.
- Αν α/β και β/γ, τότε α/γ.
- Αν α/β, τότε α/λβ για κάθε ακέραιο λ.
- Αν α/β και α/γ, τότε α/(β + γ).
- Αν α/β και $\beta \neq 0$, τότε $|\alpha| < |\beta|$

Μέγιστος κοινός διαιρέτης

1. Αν α,β είναι δύο φυσικοί αριθμοί και υ είναι το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του α με τον β, τότε: (α, β) = (β, υ)

2. Αν δ είναι ο Μ.Κ.Δ. των α και β, τότε υπάρχουν ακέραιοι κ και λ τέτοιοι, ώστε: δ = κα + λβ

3. Δύο ακέραιοι α, β είναι πρώτοι μεταξύ τους, αν και μόνο αν υπάρχουν ακέραιοι κ,λ, τέτοιοι, ώστε: κα + λβ = 1

4. Οι κοινοί διαιρέτες δύο ακεραίων α και β είναι οι διαιρέτες του μέγιστου κοινού διαιρέτη τους.

5. Αν για τους ακέραιους α, β, γ ισχύουν α/βγ και (α, β) = 1, τότε α/γ

Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο

Αν α,β είναι δύο θετικοί ακέραιοι, τότε $(\alpha,\beta)[\alpha,\beta] = \alpha \cdot \beta$