

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

✓ Σχετική συχνότητα

$$f_i = \frac{v_i}{v} \quad \text{και} \quad f_i \% = 100 f_i$$

Ισχύουν:

- $0 \leq f_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, \kappa$
- $f_1 + f_2 + \dots + f_\kappa = 1$

✓ Αθροιστικές συχνότητες

$$N_i = v_1 + v_2 + \dots + v_i, \quad v_i = N_i - N_{i-1} \quad F_i = f_1 + f_2 + \dots + f_i, \quad f_i = F_i - F_{i-1}$$

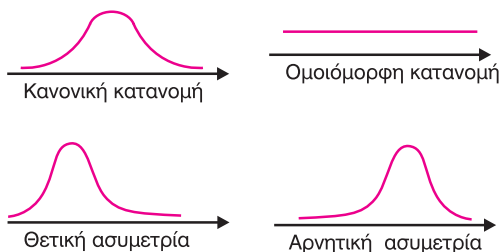
✓ Υπολογισμός του τόξου σε κυκλικό διάγραμμα

$$\alpha_i = \frac{360^\circ}{v} v_i = 360^\circ f_i$$

✓ Υπολογισμός πλάτους κλάσεων σε ομαδοποιημένα δεδομένα

$$c = \frac{R}{\kappa},$$

όπου R: εύρος του δείγματος και κ: πλήθος κλάσεων

✓ Καμπύλες συχνότητων✓ Μέτρα θέσης

1. Μέση τιμή (αριθμητικός μέσος)

$$\bar{x} = \frac{1}{v} \sum t_i \quad (\text{για απλές παρατηρήσεις})$$

$$\bar{x} = \frac{1}{v} \sum x_i v_i = \sum x_i f_i \quad (\text{όταν η τιμή } x_i \text{ έχει συχνότητα } v_i)$$

- Ο δεύτερος τύπος χρησιμοποιείται και στην περίπτωση που έχουμε ομαδοποιημένα δεδομένα και x_i, v_i είναι η κεντρική τιμή και η συχνότητα της i κλάσης αντίστοιχα.
- Αν για τη μεταβλητή y ισχύει $y = ax + \beta$, τότε $\bar{y} = a\bar{x} + \beta$

2. Σταθμικός μέσος

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i w_i}{\sum w_i} \text{ όπου } w_i \text{ ο συντελεστής βαρύτητας της τιμής } x_i.$$

- Ο σταθμικός μέσος μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τον προσδιορισμό της μέσης τιμής περισσότερων ομάδων δεδομένων, με διαφορετικό μέγεθος, των οποίων γνωρίζουμε τις μέσες τιμές.

3. Διάμεσος

Η διάμεσος n παρατηρήσεων που έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά είναι:

- Η μεσαία παρατήρηση αν n περιττός

- Ο αριθμητικός μέσος των δύο μεσαίων παρατηρήσεων αν n άρτιος

Στην περίπτωση ομαδοποιημένων δεδομένων η διάμεσος προσδιορίζεται γραφικά ή με την βοήθεια ομοιότητας τριγώνων.

4. Επικρατούσα τιμή

Ορίζεται η παρατήρηση με τη μεγαλύτερη συχνότητα.

Στην περίπτωση ομαδοποιημένων δεδομένων η επικρατούσα τιμή προσδιορίζεται γραφικά ή με τη βοήθεια ομοιότητας τριγώνων.

✓ Μέτρα διασποράς

1. Εύρος (R)

Η διαφορά της μικρότερης από τη μεγαλύτερη παρατήρηση.

2. Διακύμανση (s^2)

$$s^2 = \frac{1}{v} \sum (t_i - \bar{x})^2 \text{ (για απλές παρατηρήσεις)}$$

- Στην περίπτωση που η μέση τιμή δεν είναι ακέραιος μας διευκολύνει ο τύπος

$$s^2 = \frac{1}{v} \left[\sum t_i^2 - \frac{(\sum t_i)^2}{v} \right] \quad \text{ή} \quad s^2 = \frac{\sum x_i^2}{v} - \bar{x}^2$$

- Στην περίπτωση που έχουμε συχνότητες ή ομαδοποιημένα δεδομένα χρησιμοποιούμε τους τύπους:

$$s^2 = \frac{1}{v} \sum (x_i - \bar{x})^2 v_i \quad \text{ή} \quad s^2 = \frac{1}{v} \left[\sum x_i^2 v_i - \frac{(\sum x_i v_i)^2}{v} \right]$$

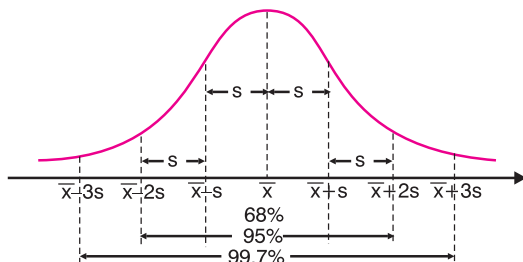
αντίστοιχα όπου: όταν έχουμε ομαδοποιημένα δεδομένα x_i είναι τα κέντρα των κλάσεων και v_i οι αντίστοιχες συχνότητες.

3. Τυπική απόκλιση (s)

$$s = \sqrt{s^2}$$

Στην περίπτωση κανονικής ή περίπου κανονικής κατανομής ισχύουν:

- Το 68% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$
- Το 95% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$
- Το 99,7% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$
- Το εύρος είναι περίπου ίσο με έξι τυπικές αποκλίσεις, δηλαδή $R \approx 6s$



4. Συντελεστής μεταβολής (cv)

$$cv = \frac{s}{\bar{x}}, \quad \bar{x} \neq 0 \quad (\text{επί τοις εκατό})$$

Αν $cv \leq 10\%$ τότε το δείγμα λέγεται ομοιογενές.

➤ Αν $y = \alpha + \beta x$ τότε ισχύει:

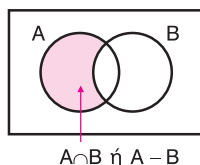
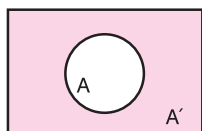
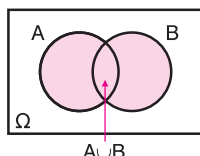
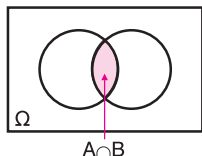
$$S_y^2 = \beta^2 S_x^2 \text{ και } S_y = |\beta| S_x$$

5. Γραμμική παλινδρόμηση

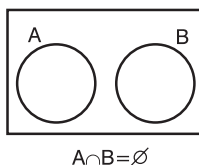
Ευθεία ελαχίστων τετραγώνων: $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$, όπου $\hat{\beta} = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$, $\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x}$

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

✓ Πράξεις με ενδεχόμενα



✓ Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα



➤ Τα ενδεχόμενα $A \cap B'$, $A \cap B$, $A' \cap B$ είναι ανά δύο ασυμβίβαστα.

✓ Χαρακτηριστικές εκφράσεις και διατύπωση τους με σύμβολα

- "Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A, B " $(A \cup B)'$ ή $A' \cap B'$
- "Τα A, B δεν πραγματοποιούνται συγχρόνως" $(A \cap B)'$ ή $A' \cup B'$
- "Πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα A, B "
 $(A \cap B') \cup (A' \cap B)$ ή $(A - B) \cup (B - A)$
- "Η πραγματοποίηση του A συνεπάγεται την πραγματοποίηση του B " $A \subseteq B$

✓ Κλασικός ορισμός της πιθανότητας

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} \quad (\text{εφαρμόζεται όταν έχουμε ισοπιθανά απλά ενδεχόμενα})$$

Συνέπειες:

$$P(\Omega) = 1 \quad P(\emptyset) = 0 \quad 0 \leq P(A) \leq 1$$

✓ Αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Σε κάθε άπλο ενδεχόμενο $\{\omega_i\}$ του Ω αντιστοιχίζουμε τον πραγματικό αριθμό $P(\omega_i)$ έτσι ώστε να ισχύουν:

$$\bullet 0 \leq P(\omega_i) \leq 1 \quad \bullet P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_n) = 1$$

Τον αριθμό $P(\omega_i)$ ονομάζουμε πιθανότητα του ενδεχομένου $\{\omega_i\}$.

Ως πιθανότητα του μη κενού ενδεχομένου $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ ορίζουμε

$$P(A) = P(\alpha_1) + P(\alpha_2) + \dots + P(\alpha_k).$$

Ως πιθανότητα του αδύνατου ενδεχομένου $\emptyset$ ορίζουμε $P(\emptyset) = 0$

Συνέπεια: $P(\Omega) = 1$

✓ Κανόνες λογισμού πιθανοτήτων

- Απλός προσθετικός νόμος
Αν τα ενδεχόμενα A, B είναι ασυμβίβαστα, τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
Ισχύει και για περισσότερα ενδεχόμενα αρκεί να είναι ανά δύο ασυμβίβαστα.
- $P(A') = 1 - P(A)$
- Προσθετικός νόμος

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Αν $A \subseteq B$ τότε $P(A) \leq P(B)$
- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

ΑΛΓΕΒΡΑ

✓ Μιγαδικοί αριθμοί

- Αν $v = 4\rho + u$, $u = 0, 1, 2, 3$ ισχύουν:

$$i^v = \begin{cases} 1, & \text{αν } v = 0 \\ i, & \text{αν } v = 1 \\ -1, & \text{αν } v = 2 \\ -i, & \text{αν } v = 3 \end{cases}$$

- Αν $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$ ισχύουν:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \alpha = \gamma \text{ και } \beta = \delta \quad z_1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ και } \beta = 0$$

$$z_1 + z_2 = (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)i \quad z_1 - z_2 = (\alpha - \gamma) + (\beta - \delta)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (\alpha\gamma - \beta\delta) + (\alpha\delta + \beta\gamma)i \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2}i$$

- Αν $z = \alpha + \beta i$ και $\bar{z} = \alpha - \beta i$ ισχύουν:

$$z + \bar{z} = 2\alpha \quad z - \bar{z} = 2\beta i$$

- Αν $z = \alpha + \beta i$ ισχύουν:

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z} \quad z \in i \Leftrightarrow z = -\bar{z}$$

- Αν $z = \alpha + \beta i$ ισχύουν:

$$|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad |z| = |\bar{z}| = |-z| \quad |z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0$$

$$|z^v| = |z|^v \quad ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

- Η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z για τον οποίο ισχύει:

$|z - z_0| = \rho$, $\rho > 0$ ανήκει σε κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ .

- Η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z για τον οποίο ισχύει:

$|z - z_1| = |z - z_2|$ ανήκει στη μεσοκάθετη του τμήματος με άκρα τα σημεία $A(z_1)$ και $B(z_2)$

- Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού: $z = \alpha + \beta i = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

όπου $\rho = |z|$ και θ γωνία με $\cos\theta = \frac{\alpha}{\rho}$, $\sin\theta = \frac{\beta}{\rho}$ (ένα όρισμα του z).

- Αν $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ και $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, τότε:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2 \text{ και } \theta_1 - \theta_2 = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

- Αν $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ είναι μιγαδικός αριθμός σε τριγωνομετρική μορφή και v είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε:

$$z^v = \rho^v [\cos(v\theta) + i\sin(v\theta)]$$

- Η εξίσωση $z^v = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ όπου v θετικός ακέραιος και $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ η τριγωνομετρική μορφή ενός μιγαδικού αριθμού έχει v διαφορετικές λύσεις οι οποίες δίνονται από τον τύπο:

$$z_k = \sqrt[v]{\rho} e^{i\frac{2k\pi + \theta}{v}} = \sqrt[v]{\rho} \left[\cos\frac{2k\pi + \theta}{v} + i\sin\frac{2k\pi + \theta}{v} \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, v-1$$

- Αν ο μιγαδικός αριθμός $z_0 = \alpha + \beta i$ είναι ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης με πραγματικούς συντελεστές, τότε και ο συζυγής του $\bar{z}_0 = \alpha - \beta i$ είναι ρίζα της εξίσωσης αυτής.

✓ Συναρτήσεις

- Έστω οι συναρτήσεις f και g με πεδία ορισμού A και B αντίστοιχα.

Οι συναρτήσεις $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ έχουν πεδίο ορισμού το $A \cap B$ και η $\frac{f}{g}$ το $A \cap B$ εξαιρουμένων των τιμών του x για τις οποίες είναι $g(x) = 0$.

Οι τύποι των παραπάνω συναρτήσεων είναι:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

- Αν f , g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A , B αντίστοιχα, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g , και συμβολίζουμε με $g \circ f$ τη συνάρτηση με τύπο

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

και πεδίο ορισμού το σύνολο $A_1 = \{x \in A / f(x) \in B\} \neq \emptyset$

- Αν μια συνάρτηση f είναι “1-1” τότε αντιστρέφεται, στην περίπτωση αυτή ισχύουν:

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{και} \quad f(f^{-1}(y)) = y$$

✓ Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \ell) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \ell$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta \mu x = \eta \mu x_0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma \nu \eta x = \sigma \nu \eta x_0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma \nu \eta x - 1}{x} = 0$

✓ Κριτήριο παρεμβολής

- Αν για τις συναρτήσεις f , g , h ισχύουν:

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x) \text{ κοντά στο } x_0 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

✓ Όριο συνάρτησης στο άπειρο

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^v = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^v} = 0$, $v \in \mathbb{N}^*$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^v = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } v \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } v \text{ περιττός} \end{cases}$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^v} = 0$

- Αν $P(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_v \neq 0$
 $Q(x) = \beta_k x^k + \beta_{k-1} x^{k-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0$, $\beta_k \neq 0$, τότε
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_v x^v)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} P(a_v x^v)$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_v x^v}{\beta_k x^k}$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_v x^v}{\beta_k x^k}$
- Αν $a > 1$, τότε
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$
- Αν $0 < a < 1$, τότε
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$

✓ Συνέχεια συνάρτησης

- Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A και $x_0 \in A$. Αν ισχύει:
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ θα λέμε ότι η f είναι συνάρτηση συνεχής στο σημείο x_0 .

• Θεώρημα Bolzano

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[a, b]$. Αν

➤ Η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και

➤ $f(a) \cdot f(b) < 0$,

τότε υπάρχει, ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε να είναι $f(x_0) = 0$.

• Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[a, b]$. Αν

➤ η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και

➤ $f(a) \neq f(b)$,

τότε για κάθε αριθμό n μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$ υπάρχει ένα, τουλάχιστον $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε να είναι $f(x_0) = n$

• Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$, τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a, b]$ τέτοια ώστε αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει:

$$m \leq f(x) \leq M, \text{ για κάθε } x \in [a, b].$$

• Εύρεση συνόλου τιμών συνεχώς συνάρτησης

1. Το πεδίο ορισμού είναι το διάστημα $A = [a, b]$

α. Αν $f \uparrow A$ τότε $f(A) = [f(a), f(b)]$

β. Αν $f \downarrow A$ τότε $f(A) = [f(b), f(a)]$

2. Το πεδίο ορισμού είναι το διάστημα $A = (a, b)$

α. Αν $f \uparrow A$ τότε $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right)$

β. Αν $f \downarrow A$ τότε $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right)$

✓ Παράγωγος συνάρτησης

• Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A και $x_0 \in A$. Θα λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in A$ αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός, δηλαδή:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

• Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

• Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

✓ Παράγωγοι συναρτήσεων

$$\bullet (c)' = 0 \quad (x)' = 1 \quad (x^v)' = vx^{v-1}, \quad v \in \mathbb{N} - \{0,1\}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x \in (0, +\infty)$$

$$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x \quad (\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$$

$$(e^x)' = e^x \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

$$(x^a)' = ax^{a-1}, \quad a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$$

$$(\alpha^x)' = \alpha^x \ln \alpha, \quad \alpha > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet (f^v(x))' = v f^{v-1}(x) f'(x)$$

$$(\sqrt{f(x)})' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} f'(x)$$

$$(\eta\mu f(x))' = \sigma\upsilon\nu f(x) f'(x)$$

$$(\sigma\upsilon\nu f(x))' = -\eta\mu f(x) f'(x)$$

$$(e^{f(x)})' = e^{f(x)} f'(x)$$

$$(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} f'(x)$$

• Θεώρημα μέσης τιμής

Αν μια συνάρτηση f είναι:

➤ συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$

➤ παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, β) ,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε να είναι:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$$

• Θεώρημα Rolle

Αν μια συνάρτηση f είναι:

➤ συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$

➤ παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, β)

➤ $f(a) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε να είναι

$$f'(x) = 0$$

- Αν για μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ ισχύουν:
 - είναι συνεχής στο Δ
 - $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι σταθερή στο Δ .
- Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ ισχύουν:
 - οι f, g είναι συνεχείς στο Δ
 - $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε να είναι

$$f(x) = g(x) + c$$

- Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .
 - Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .
 - Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .
- Θεώρημα Fermat

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό τότε $f'(x_0) = 0$.

- Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ .
 - Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$, τότε η f είναι κυρτή στο Δ .
 - Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$, τότε η f είναι κοίλη στο Δ .

✓ Ασύμπτωτες

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$ αν και μόνον αν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}$$

αντιστοίχως:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}$$

✓ Κανόνες de L'Hospital

- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

το παραπάνω θεώρημα ισχύει και για τις μορφές $\frac{+\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$

✓ Ολοκλήρωμα

Αόριστο ολοκλήρωμα

- $\int f'(x)dx = f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$
- $\int 0 dx = c \quad \int 1 dx = x + c$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c, \quad x \neq 0$
- $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \quad a \neq -1$
- $\int \sin x dx = -\eta\mu x + c$
- $\int \eta\mu x dx = -\sin x + c$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \varepsilon\phi x + c$
- $\int \frac{1}{\eta\mu^2 x} dx = -\sigma\phi x + c$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
- $\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx$
- $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

$$u = g(x) \quad \text{και} \quad du = g'(x)dx$$

Ορισμένο ολοκλήρωμα

- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
 - $\int_a^a f(x)dx = 0$
 - Αν $f(x) \geq 0$ τότε $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
 - $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$
 - $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
 - $\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$
- Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$, με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ και η f δεν είναι παντού μηδέν, τότε:

$$\int_a^b f(x) dx > 0$$

- Αν η f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^y f(x) dx + \int_y^b f(x) dx$$

✓ Η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

- Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και $\alpha \in \Delta$, τότε η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in \Delta$

είναι μια παράγουσα της f στην Δ . Δηλαδή ισχύει

$$F'(x) = \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \Delta$$

- Αν F είναι μια παράγουσα της συνεχούς συνάρτησης f στο διάστημα $[a, \beta]$ τότε:

$$\int_a^b f(x) dx = F(\beta) - F(a)$$

✓ Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

✓ Ολοκλήρωση με αλλαγή μεταβλητής

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u) du$$

όπου $u = g(x)$, $du = g'(x) dx$, $u_1 = g(a)$ και $u_2 = g(\beta)$

✓ Θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε να είναι

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(\beta - a)$$

✓ Εμβαδό επίπεδου χωρίου

- Έστω f μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$. Το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = a$ και $x = \beta$ είναι:

$$E = \int_a^b |f(x)| dx$$

- Έστω f, g δύο συναρτήσεις συνεχείς στο διάστημα $[a, \beta]$. Το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = a$ και $x = \beta$ είναι:

$$E = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$