ΑΛΓΕΒΡΑ

Ιδιότητες δυνάμεων με εκθέτη ακέραιο

$\alpha^{\kappa} \cdot \alpha^{\lambda} = \alpha^{\kappa+\lambda}$ $\quad \alpha^{\kappa} \cdot \beta^{\kappa} = (\alpha \cdot \beta)^{\kappa}$ $\quad \alpha^{0} = 1$ $\quad \dfrac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}} = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa}$

$\alpha^{-\kappa} = \dfrac{1}{\alpha^{\kappa}}$ $\quad \dfrac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}} = \alpha^{\kappa-\lambda}$ $\quad (\alpha^{\kappa})^{\lambda} = \alpha^{\kappa \cdot \lambda}$

$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta$

$(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$

$(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$

$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$

$(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$

$(\alpha+\beta+\gamma)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3\alpha^2(\beta+\gamma) + 3\beta^2(\alpha+\gamma) + 3\gamma^2(\alpha+\beta) + 6\alpha\beta\gamma$

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = \dfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha-\beta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\gamma-\alpha)^2]$

- Αν ο ν είναι θετικός ακέραιος ισχύει

$\alpha^{\nu} - \beta^{\nu} = (\alpha-\beta)(\alpha^{\nu-1} + \alpha^{\nu-2}\beta + \ldots + \alpha\beta^{\nu-2} + \beta^{\nu-1})$

- Αν ο ν είναι θετικός ακέραιος περιττός ισχύει

$\alpha^{\nu} + \beta^{\nu} = (\alpha+\beta)(\alpha^{\nu-1} - \alpha^{\nu-2}\beta + \ldots - \alpha\beta^{\nu-2} + \beta^{\nu-1})$

Λύση της πρωτοβάθμιας εξίσωσης $\alpha x + \beta = 0$

- Αν Αν $\alpha \neq 0$ η εξίσωση έχει ακριβώς μια λύση, την $x = -\dfrac{\beta}{\alpha}$.
- Αν Αν $\alpha = 0$ η εξίσωση γίνεται $0 \cdot x = \beta$

i) Αν $\beta \neq 0$ η εξίσωση είναι αδύνατη

ii) Αν $\beta = 0$ η εξίσωση είναι ταυτότητα.

Διάταξη πραγματικών αριθμών

- Αν $\alpha > 0$ και $\beta > 0$ τότε $\alpha + \beta > 0$
- Αν $\alpha < 0$ και $\beta < 0$ τότε $\alpha + \beta < 0$
- Αν α, β ομόσημοι αριθμοί τότε $\alpha \cdot \beta > 0$ και $\dfrac{\alpha}{\beta} > 0$
- Αν α, β ετερόσημοι αριθμοί τότε $\alpha \cdot \beta < 0$ και $\dfrac{\alpha}{\beta} < 0$
- Για κάθε αριθμό α ισχύει: $\alpha^2 \geq 0$ $(\alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0)$
- Αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$ τότε $\alpha > \gamma$
- Αν $\gamma > 0$ τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$
- Αν $\gamma < 0$ τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$
- Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε $\alpha + \gamma > \beta + \delta$

- $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$
- Αν α, β είναι θετικοί αριθμοί και ν είναι θετικός ακέραιος, τότε ισχύουν:

$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu$ $\quad\quad$ $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$

Λύση της πρωτοβάθμιας ανίσωσης αx + β > 0

- Αν $\alpha > 0$ τότε: $\alpha x + \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha x > -\beta \Leftrightarrow x > -\dfrac{\beta}{\alpha}$
- Αν $\alpha < 0$ τότε: $\alpha x + \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha x > -\beta \Leftrightarrow x < -\dfrac{\beta}{\alpha}$
- Αν $\alpha = 0$ τότε: $0x > -\beta$

i) Αν $\beta > 0$ η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii) Αν $\beta \leq 0$ είναι αδύνατη.

Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

- $|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$
- $|\alpha| \geq 0$
- $|\alpha|^2 = \alpha^2 = |\alpha^2|$
- $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha$ ή $x = -\alpha$
- Αν $\theta > 0$ τότε:

i) $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$

ii) $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$

iii) $|x| > \theta \Leftrightarrow x > \theta$ ή $x < -\theta$

- $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$
- $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$
- $-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$

Ρίζες πραγματικών αριθμών

- $\sqrt[1]{\alpha} = \alpha$ και $\sqrt[2]{\alpha} = \sqrt{\alpha}$ με $\alpha \geq 0$
- Αν $\alpha, \beta \geq 0$ και κ, μ, ν θετικοί ακέραιοι ισχύουν:

i) $(\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu = \alpha$ και $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \alpha$ $\quad$ **ii)** $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}$ $\quad$ **iii)** $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ $(\beta \neq 0)$

iv) $\sqrt[\nu]{\alpha^\kappa} = (\sqrt[\nu]{\alpha})^\kappa$ $\quad$ **vi)** $\sqrt[\kappa\nu]{\alpha^{\kappa\mu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$ $\quad$ **v)** $\sqrt[\kappa]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\kappa\nu]{\alpha}$

- Αν $\alpha \in R$ τότε $\sqrt[2\nu]{\alpha^{2\nu}} = |\alpha|$

Λύση της εξίσωσης $x^\nu = \alpha$

- Αν ο ν είναι θετικός περιττός ακέραιος τότε:

i) Με $\alpha > 0$ η εξίσωση έχει ακριβώς μια λύση την $\sqrt[\nu]{\alpha}$

ii) Με $\alpha < 0$ η εξίσωση έχει ακριβώς μια λύση την $-\sqrt[\nu]{|\alpha|}$

- Αν ο ν είναι θετικός άρτιος ακέραιος τότε:

i) Με $\alpha > 0$ η εξίσωση έχει ακριβώς δυο λύσεις τις: $\sqrt[\nu]{\alpha}$, $-\sqrt[\nu]{\alpha}$

ii) Με $\alpha < 0$ η εξίσωση δεν έχει λύσεις

Συναρτήσεις

• Μια συνάρτηση f ονομάζεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Α του πεδίου ορισμού της, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

• Μια συνάρτηση f ονομάζεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Α του πεδίου ορισμού της, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

• Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α ονομάζεται άρτια αν ισχύουν:
Για κάθε $x \in A$, $-x \in A$ και $f(-x) = f(x)$

• Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α ονομάζεται περιττή αν ισχύουν:
Για κάθε $x \in A$, $-x \in A$ και $f(-x) = -f(x)$
Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α ονομάζεται περιοδική με περίοδο $T > 0$ αν ισχύουν:
Για κάθε $x \in A$, $(x + T) \in A$, $(x - T) \in A$ και $f(x - T) = f(x + T) = f(x)$

• Συντελεστής διεύθυνσης α μιας ευθείας ονομάζεται η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x΄x.
Αν η ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα y΄y συντελεστής διεύθυνσης δεν ορίζεται.
Ισχύουν: $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$ $\qquad \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \alpha_2 = -1$

Συστήματα γραμμικών εξισώσεων

Έστω το σύστημα: $\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$

• Αν $D \neq 0$ το σύστημα έχει μοναδική λύση την $x = \dfrac{D_x}{D}$, $y = \dfrac{D_y}{D}$

• Αν $D = 0$ και $D_x \neq 0$ ή $D_y \neq 0$ τότε το σύστημα είναι αδύνατο.

• Αν $D = D_x = D_y = 0$ τότε το σύστημα έχει άπειρες το πλήθος λύσεις,ή εκτός από την περίπτωση που είναι $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 0$ και $\gamma \neq 0$ ή $\gamma' \neq 0$ οπότε το σύστημα είναι αδύνατο.

Λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$

• Αν $\Delta > 0$ η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες τις:

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha},\ x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

• Αν $\Delta = 0$ η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα (δυο ρίζες ίσες) τη $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$

• Αν $\Delta < 0$ η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

• Το άθροισμα S και το γινόμενο p των ριζών είναι:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \qquad p = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Αν δύο αριθμοί έχουν άθροισμα S και γινόμενο P προσδιορίζονται από την λύση της εξίσωσης

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Πρόσημο του τριωνύμου $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$

• Αν $\Delta > 0$ το πρόσημο του τριωνύμου εκτός των ριζών του είναι ομόσημο του α και εντός των ριζών του ετερόσημο του α.

• Αν $\Delta = 0$ το πρόσημο του τριωνύμου είναι πάντοτε ομόσημο του α εκτός της διπλής ρίζας που μηδενίζεται.

• Αν $\Delta < 0$ το πρόσημο του τριωνύμου είναι πάντοτε ομόσημο του α.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

- $ημ^2ω + συν^2ω = 1$
- $συν^2ω = \dfrac{1}{1 + εφ^2ω}$
- $ημ^2ω = \dfrac{εφ^2ω}{1 + εφ^2ω}$
- $εφω = \dfrac{ημω}{συνω}$
- $σφω = \dfrac{συνω}{ημω}$

$ημ(-ω) = -ημω$	$συν(-ω) = συνω$	$εφ(-ω) = -εφω$	$σφ(-ω) = -σφω$
$ημ(2κπ + ω) = ημω$	$συν(2κπ + ω) = συνω$	$εφ(2κπ + ω) = εφω$	$σφ(2κπ + ω) = σφω$
$ημ\left(\dfrac{π}{2} - ω\right) = συνω$	$συν\left(\dfrac{π}{2} - ω\right) = ημω$	$εφ\left(\dfrac{π}{2} - ω\right) = σφω$	$σφ\left(\dfrac{π}{2} - ω\right) = εφω$
$ημ\left(\dfrac{π}{2} + ω\right) = συνω$	$συν\left(\dfrac{π}{2} + ω\right) = -ημω$	$εφ\left(\dfrac{π}{2} + ω\right) = -σφω$	$σφ\left(\dfrac{π}{2} + ω\right) = -εφω$
$ημ(π - ω) = ημω$	$συν(π - ω) = -συνω$	$εφ(π - ω) = -εφω$	$σφ(π - ω) = -σφω$
$ημ(π + ω) = -ημω$	$συν(π + ω) = -συνω$	$εφ(π + ω) = εφω$	$σφ(π + ω) = σφω$
$ημ\left(\dfrac{3π}{2} - ω\right) = -συνω$	$συν\left(\dfrac{3π}{2} - ω\right) = -ημω$	$εφ\left(\dfrac{3π}{2} - ω\right) = σφω$	$σφ\left(\dfrac{3π}{2} - ω\right) = εφω$
$ημ\left(\dfrac{3π}{2} + ω\right) = -συνω$	$συν\left(\dfrac{3π}{2} + ω\right) = ημω$	$εφ\left(\dfrac{3π}{2} + ω\right) = -σφω$	$σφ\left(\dfrac{3π}{2} + ω\right) = -εφω$
$ημ(2π - ω) = -ημω$	$συν(2π - ω) = συνω$	$εφ(2π - ω) = -εφω$	$σφ(2π - ω) = -σφω$
$ημ(2π + ω) = ημω$	$συν(2π + ω) = συνω$	$εφ(2π + ω) = εφω$	$σφ(2π + ω) = σφω$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί χαρακτηριστικών γωνιών

γωνία x	**0**	$\dfrac{π}{6}$	$\dfrac{π}{4}$	$\dfrac{π}{3}$	$\dfrac{π}{2}$	**π**	$\dfrac{3π}{2}$
ημx	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1
συνx	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0	–1	0
εφx	0	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–
σφx	–	$\sqrt{3}$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0